

Andrey Nikolaevich
TIKHONOV

COLLECTION OF SCIENTIFIC WORKS
IN TEN VOLUMES

Андрей Николаевич
ТИХОНОВ

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ
В ДЕСЯТИ ТОМАХ

Том II

Математика

Часть 2

Вычислительная математика

1956–1979

Математическая физика

1933–1948

ПРЕДИСЛОВИЕ

Второй том полного собрания сочинений содержит статьи А.Н. Тихонова, посвященные вычислительной математике и некоторым задачам математической физики. Этот цикл работ, представляющий собой одну из вершин научного творчества А.Н. Тихонова, оказал фундаментальное влияние на развитие данной научной области.

Включены работы А.Н. Тихонова, посвященные как общей постановке методологических проблем вычислительной математики, так и решению конкретных математических задач. В статье «Вычислительная математика» (БСЭ, 1971, т. 5) Андрей Николаевич определяет предмет вычислительной математики, как раздел математики, включающий круг вопросов, связанных с использованием электронных вычислительных машин в различных областях или, как сказали бы сейчас, связанных с компьютеризацией научной и практической деятельности. В вычислительной математике можно выделить следующие три больших раздела: анализ математических моделей, разработка методов и алгоритмов решения типовых математических задач, теория и практика программирования для ЭВМ.

Статья А.Н. Тихонова «Вычислительная математика и научно-технический прогресс», опубликованная в 1971 г. и посвященная 225-летию Московского университета, содержит детальную конкретизацию разделов вычислительной математики и многочисленные примеры применения численных методов. Подчеркивается, что теперь при формулировке математических моделей не нужно стремиться к упрощениям, которые были необходимы раньше при желании получить ответ в явном виде. Вместо этого появляется возможность «правильно учесть все наиболее существенные особенности изучаемого объекта и отразить их в математической модели».

Особо следует отметить работы А.Н. Тихонова и А.А. Самарского, посвященные построению разностных методов решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Это направление исследований, называемое теорией разностных схем, представляет собой уникальное явление в мировой математической науке. Авторы впервые поставили и решили задачу теоретического исследования сходимости разностных схем для уравнений с переменными и даже разрывными коэффициентами. Отмечено, что «автоматизация вычисле-

ний, связанная с использованием ЭВМ, ставит вопрос о выборе наилучших разностных схем, обладающих как максимальной точностью, так и применимостью в возможно более широком классе коэффициентов».

Была выдвинута концепция однородных разностных схем, позволившая сформулировать принципы построения заведомо сходящихся разностных схем для широких классов уравнений с переменными коэффициентами. Однородность разностной схемы означает, что ее коэффициенты являются функционалами коэффициентов дифференциального уравнения, зависящими от шага сетки как от параметра и не зависящими от узла сетки и от выбора коэффициентов из заданного класса функций.

В работах А.Н. Тихонова и А.А. Самарского предложены и обоснованы разностные схемы, позволяющие проводить расчет, не прибегая к явному выделению точек разрыва. Для обоснования сходимости полученных схем потребовалось введение нового понятия — консервативности схемы. Консервативными были названы те схемы, которые выражают на сетке законы сохранения, присущие исходному дифференциальному уравнению. Знаменитый пример (1959 г.), показывающий, что консервативность схемы является необходимым условием сходимости в классе разрывных, и даже кусочно-постоянных, коэффициентов, ныне можно найти во многих учебниках по численным методам решения задач математической физики.

При исследовании сходимости разностных схем для уравнений с разрывными коэффициентами и схем на неравномерных сетках было пересмотрено понятие погрешности аппроксимации. Априорные оценки, выражающие погрешность приближенного решения через погрешность аппроксимации в специально построенной норме, позволили доказать сходимость и получить оценку точности разностных методов в классах разрывных коэффициентов и в случае произвольных неравномерных сеток. Показано, что однородные консервативные разностные схемы на произвольной последовательности неравномерных сеток имеют тот же порядок точности, что и на равномерных сетках как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов.

Обратим внимание на важные и математически красивые результаты А.Н. Тихонова в цикле работ, выполненных совместно с А.А. Самарским и посвященных однородным разностным схемам высокого порядка точности. Здесь для краевых задач с переменными коэффициентами и задачи Штурма–Лиувилля построены точная схема и на ее основе так называемые усеченные разностные схемы любого порядка точности. Все предложенные схемы относятся к семейству однородных консервативных разностных схем.

Цикл работ А.Н. Тихонова, выполненных совместно с А.Д. Горбуновым, связан с теоретическим исследованием методов Рунге–Кутты и Адамса решения задачи Коши для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и выбором оптимальных сеток.

В раздел «Математическая физика» вошли ранние ставшие классическими статьи А.Н. Тихонова, в которых доказаны теоремы единственности для уравнений теплопроводности. В § 8 статьи Tychonoff A. Theoremes d'unicite pour l'equation de la chaleur (Матем. сборн. — 1935. — Т. 42, № 2) исследуется совершенно новая задача теплопроводности. Эта задача названа «обратной задачей теплопроводности»; тогда как предыдущие задачи имели целью определить «температуру» в «будущем» (при $t \geq t_0$), «обратная задача» заключается в том, чтобы найти «исторический ход» температуры, зная её значения для настоящего времени (при $t = t_0$). В этом случае нет необходимости знать граничные условия: они определены другими условиями задачи. Это **первая публикация по «обратным задачам»**.

Результаты этих работ составили основу докторской диссертации А.Н. Тихонова на тему «О функциональных уравнениях типа Volterra и их приложениях к некоторым задачам математической физики», которая была защищена 22 июня 1936 года на механико-математическом факультете и утверждена 17 октября 1937 года (см. Докторские и кандидатские диссертации, защищенные в Московском государственном университете с 1934 по 1954 г. Вып. 1. Факультеты механико-математический, физический, химический. — М.: Издательство Московского университета, 1956. — С. 27).

Включены первые статьи А.Н. Тихонова по электродинамике, положившие начало научному направлению, которое сформировалось под его руководством и активно развивается его учениками и «научными внуками». Статьи в соавторстве с А.А. Самарским содержатся в томе 8.

Разработанные А.Н. Тихоновым принципиально новые методы позволили приступить к созданию автоматизированных систем вычислительной диагностики, интерпретации результатов наблюдений, управления научными экспериментами и технологическими процессами (см. том 9).

Численные методы активно используются как при решении различных математических проблем, так и в геофизике, астрофизике, электродинамике, физике плазмы и лазеров, физической химии, медицине, космических исследованиях, обработке видео и аудио информации, экономике и многих других научных и практических сферах человеческой деятельности.

ОТ РЕДАКТОРОВ-СОСТАВИТЕЛЕЙ ТОМА 2

Настоящее издание - это труд большого коллектива энтузиастов Института прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН (ИПМ) и Института математического моделирования РАН, трех факультетов Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (МГУ) — вычислительной математики и кибернетики, физического и механико-математического — и Издательства Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО).

От имени Редакционной коллегии издания благодарим

— за участие в подготовке материалов для издания сотрудников ИПМ Л.А. Хальзову, Н.С. Богданову, В.В. Владимирову, М.М. Горбунова-Посадова, А.В. Ермакова, Е.П. Лесникову, Е.А. Караульщикovu, Л.С. Комарову, В.С. Корнееву, С.В. Максакову, В.П. Стрела, Л.Н. Шибашову;

— за научную корректуру сотрудников МГУ С.В. Богомолова, А.Я. Буничеву, С.А. Волошина, Г.Г. Еленина, Н.Б. Есикову, В.П. Ильютко, Н.И. Ионкина, Е.С. Куркину, С.И. Мухина, Е.С. Николаева, Н.П. Савенкову, Н.В. Соснина, А.П. Фаворского, М.М. Хапаева-мл., А.Б. Хруленко;

— за перевод статей с французского и их научную корректуру К.В. Брушлинского, А.Н. Дарьина, Т.Н. Фоменко;

— секретарей декана ВМиК МГУ Инну Георгиевну и Елену Юрьевну за повсеместную помощь в организации издания собрания трудов;

— И.В. Яценко и Ю.Н. Торхова за сотрудничество, Издательство МЦНМО за электронный набор и участие в подготовке оригинала макета.

Благодарим С.А. Стрелкова за разработку специальных стилевых средств для всего издания собрания трудов, выполнение контрольной верстки и поддержку сотрудничества с Академиздатцентром «Наука» РАН.

Благодарим руководство и сотрудников Академиздатцентра «Наука» РАН и Научно-издательского совета (НИСО) при Президиуме РАН за сотрудничество по изданию «Собрания научных трудов академика Андрея Николаевича Тихонова» в серии «Классики науки».

Выражаем глубокую признательность Российскому Фонду фундаментальных Исследований за финансовую поддержку издания и персонально Председателю Экспертного совета направления «Математика, механика, информатика» академику Д.В. Аносову за поддержку издания.

Качество иллюстрационного материала соответствует качеству представленных оригиналов статей.

Т.А. Сушкевич, А.В. Гулин

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ
МАТЕМАТИКА**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

А. Н. Тихонов

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА, раздел математики, включающий круг вопросов, связанных с использованием электронных вычислительных машин (ЭВМ). Содержание термина «В. м.» нельзя считать установившимся, так как эта область интенсивно развивается в связи с быстро растущими применениями ЭВМ в новых направлениях. Часто термин «В. м.» понимается как теория численных методов и алгоритмов решения типовых математических задач. Это толкование термина «В. м.» получило распространение на первоначальном этапе, когда использование ЭВМ предъявило новые требования к численным методам; основной задачей на этом этапе была разработка новых методов, «удобных» для ЭВМ. Ниже «В. м.» понимается в первом — широком смысле этого термина.

В «В. м.» можно выделить следующие три больших раздела. Первый связан с применением ЭВМ в различных областях научной и практической деятельности и может быть охарактеризован как анализ математических моделей. Второй — с разработкой методов и алгоритмов решения типовых математических задач, возникающих при исследованиях математических моделей. Третий раздел связан с вопросом об упрощении взаимоотношений человека с ЭВМ, включая теорию и практику программирования задач для ЭВМ, в т. ч. автоматизацию программирования задач для ЭВМ.

Анализ математических моделей включает в себя изучение постановки задачи, выбор модели, анализ и обработку входной информации, численное решение математических задач, возникающих в связи с исследованием модели, анализ результатов вычислений, и, наконец, вопросы, связанные с реализацией полученных результатов. Задача выбора модели должна решаться с учётом следующего требования. Степень достоверности, с которой результаты анализа модели позволяют исследовать конкретное явление (или класс явлений), должна соответствовать точности исходной информации. При этом с появлением возможности получать более точную инфор-

мацию обычно возникает необходимость совершенствования построенной модели, а в ряде случаев даже коренной её замены. Для этих задач приобретает существенное значение обработка исходной информации, что в большинстве случаев требует привлечения методов математической статистики. Математические модели сыграли важную роль в развитии естествознания; в настоящее время использование математических моделей является существенным фактором в широком диапазоне человеческой деятельности (в т. ч. в вопросах управления, планирования, прогнозирования и т. д.).

Изучение реальных явлений на основе анализа построенных моделей, как правило, требует развития *численных методов* и привлечения ЭВМ. Таким образом, в «В. м.» важное место занимают численные методы решения поставленных математических задач и в первую очередь типовых математических задач («В. м.» в узком смысле слова).

В качестве примера типовых математических задач, часто встречающихся в приложениях, можно назвать задачи алгебры: здесь большое значение имеют численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (в частности, больших систем), обращение матриц, нахождение собственных значений матриц (как нескольких первых значений — ограниченная проблема собственных значений, так и нахождение всех собственных значений — полная проблема собственных значений). Другие примеры — численные методы дифференцирования и интегрирования функций одного или нескольких переменных; численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (сюда включают, в частности, изучение и сравнительный анализ численных методов различных типов, напр. Адамса, Рунге–Кутты). Значительное число исследований посвящено численным методам решения уравнений с частными производными. Здесь большое направление составляют «экономичные методы», т. е. методы, позволяющие получать результаты при относительно малом (экономном) числе операций.

Быстро развивающимся направлением «В. м.» являются численные методы оптимизации. Задача оптимизации состоит в изучении экстремальных (наибольших или наименьших) значений функционалов на множествах, как правило, весьма сложной структуры. В первую очередь следует упомянуть задачи *математического программирования* (в т. ч. линейного и динамического), к которым сводятся многие задачи экономики. К задачам оптимизации примыкают минимаксные задачи (и соответствующие численные методы), возникающие при решении задач исследования операций (см. *Операций исследование*) и теории игр (см. *Игр теория*). Особенно сложные

задачи типа $\min \max \min \max$ возникают при решении многошаговых (динамически развивающихся) игр. Здесь даже математический эксперимент (проигрывание вариантов поведения играющих) невозможен без использования мощных ЭВМ.

Применение ЭВМ к решению сложных задач, в особенности задач больших размеров, вызвало к жизни одно из главных направлений в теории численных методов — исследования устойчивости методов и алгоритмов к различного рода ошибкам (в т. ч. к ошибкам округления).

Обратные задачи, например, задача определения элемента x из уравнения $Ax = b$ при известной информации об операторе A и элементе b , часто являются неустойчивыми (некорректно поставленными) задачами (малым погрешностям во входных данных могут соответствовать большие погрешности в x). Более того, обратные задачи часто имеют решение не для всех b , поэтому, задавая приближённое значение b , следует учитывать, что формально решение этой задачи может не существовать.

Неустойчивые задачи потребовали специального определения понятия приближённых решений и развития соответствующих методов для их нахождения. К неустойчивым задачам относится широкий класс задач, связанных с проблемами автоматизации обработки результатов экспериментов.

В большинстве разделов «В. м.» важное место занимают вопросы оптимизации методов решения задач. Особенно это существенно для задач большого объёма (например, с большим числом переменных).

Применение ЭВМ непрерывно расширяет круг пользователей и поэтому возникает тенденция такой степени автоматизации, при которой становится менее существенным знакомство пользователей с численными методами. Это предъявляет новые требования к алгоритмам, их классификации и к стандартным программам решения типовых задач.

В настоящее время выделился ряд направлений прикладной науки, где современные темпы научно-технического прогресса были бы невысказимы без развития численных методов и применения ЭВМ.

Основной задачей теории *программирования* можно считать облегчение отношений человека с машиной, хотя этот взгляд и конкретное направление исследований претерпевают радикальные изменения с развитием вычислительной техники. Смена ряда поколений вычислительных машин обусловила смену трёх этапов в развитии программирования.

От составления программ на внутреннем языке машины программирование быстро перешло к составлению стандартных программ решения

типовых задач и комплексов таких программ. При их употреблении для широкого класса задач отпадает необходимость в программировании метода решения; достаточно лишь ограничиться заданием исходной информации. Однако задание такой информации, а также написание нестандартных блоков всё равно требуют существенного объёма программирования на языке машины.

Появление машин следующего поколения с большим быстродействием сопровождалось ростом числа задач, предъявляемых к решению; в результате этого возникло узкое место системы человек — машина: скорость программирования. Это вызвало к жизни новый этап программирования — создание алгоритмических языков с трансляторами для перевода с алгоритмического языка на внутренний язык машины. Вследствие большей близости алгоритмических языков к общечеловеческому их внедрение упростило программирование и существенно расширило круг пользователей.

Наряду с созданием универсальных алгоритмических языков (Алгол, Фортран) был разработан ряд проблемно-ориентированных языков для определённого круга пользователей, например, связанных с задачами обработки экономической информации. Создание специализированных языков вызвано следующим: универсальные языки и трансляторы, предназначенные для решения широкого класса задач, иногда слабо учитывают специфику отдельных важных классов задач, что снижает эффективность использования всех возможностей машины.

При дальнейшем повышении скорости ЭВМ узким местом системы человек-машина стали устройства для ввода и вывода информации; их медленная работа сводила на нет высокопроизводительную работу центрального устройства. Необходимость преодоления этого противоречия явилась одной из причин создания систем одновременного решения на машине нескольких задач. Другой причиной было требование одновременной работы на машине большого коллектива пользователей (в частности, последнее особенно существенно при применении ЭВМ в автоматизированных системах управления).

Всё это вместе с рядом других причин обусловило появление нового этапа программирования — системного программирования. Основной задачей системного программирования является создание операционных систем, управляющих работой машины, программным путём расширяющих возможности машины и предоставляющих пользователю дополнительное обслуживание, не предусмотренное аппаратурой: возможность ввода и вывода одновременно с решением задач, автоматизация редактирования

выдачи, вывод графиков, работа с экраном, диалог с машиной, возможность одновременного решения на машине многих задач (система разделения времени).

Развитие применения ЭВМ характерно также организацией работы комплексов, включающих большое число машин, в т. ч. машин различных типов, вводные устройства, каналы связи между машинами и пользователем, а зачастую и физические установки. Такие высокопроизводительные системы создаются, например, для решения задач экономики и обработки физических экспериментов, требующих ввода и обработки большого количества информации.

Задача развития вычислительных систем, в частности информационных систем и автоматизированных систем управления, является одной из наиболее актуальных научных проблем.

О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Член-корреспондент АН СССР А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

1. Различные конечноразностные схемы, пригодные для решения определенного типа дифференциальных уравнений, могут различаться как по порядку точности, так и в смысле применимости в зависимости от класса коэффициентов этих уравнений. Автоматизация вычислений, связанная с использованием машин, ставит вопрос о выборе «наилучших» разностных схем, обладающих как максимальной точностью, так и применимостью в возможно более широком классе коэффициентов. Так, например, желательно, чтобы одна и та же разностная схема позволяла решать задачи для дифференциальных уравнений как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов, без явного выделения точек разрыва.

Рассмотрим ряд относящихся сюда вопросов на примере следующей краевой задачи:

$$L^{(k)}y = \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dy}{dx} \right] = -f(x) \quad (0 < x < l); \quad y(0) = y'(l) = 0 \quad (1)$$

в классе кусочно-непрерывных коэффициентов $k(x) \geq k_0 > 0$.

2. Будем рассматривать трехточечную разностную схему

$$L_h^{(k_i)} y_i = \frac{1}{h^2} (A_i y_{i-1} + C_i y_i + B_i y_{i+1}) = -f_i, \quad f_i = f(x_i), \quad (2)$$

где A_i, B_i и C_i являются функциями величин $k_{i-1} = k(x_{i-1})$, $k_i = k(x_i)$, $k_{i+1} = k(x_{i+1})$, а h — шаг равномерной сетки.

Будем обозначать: C_p — класс функций, имеющих p непрерывных производных в интервале $(0, l)$; Q_p — класс функций, кусочно-непрерывных и имеющих кусочно-непрерывные производные до p -го порядка в интервале $(0, l)$. Будем считать, что $f \in C_1$.

Определение 1. Разностную схему будем называть *однородной*, если $A_i = A(k_{i-1}, k_i, k_{i+1})$, $C_i = C(k_{i-1}, k_i, k_{i+1})$, $B_i = B(k_{i-1}, k_i, k_{i+1})$. Иными словами, для однородной схемы вычисление коэффициентов A_i , B_i и C_i происходит во всех точках по единому закону.

Определение 2. Трехточечную однородную разностную схему будем называть *линейной*, если функции $A(\alpha, \beta, \gamma)$, $B(\alpha, \beta, \gamma)$, $C(\alpha, \beta, \gamma)$ линейны относительно своих аргументов, т. е.

$$A = a_{-1}\alpha + a_0\beta + a_1\gamma, \quad B = b_{-1}\alpha + b_0\beta + b_1\gamma, \quad C = c_{-1}\alpha + c_0\beta + c_1\gamma, \quad (3)$$

где a_s, b_s ($s = -1, 0, 1$) – постоянные числа.

В этой заметке мы ограничимся изучением только линейных однородных схем.

Определение 3. Пусть Ly – некоторый дифференциальный оператор m -го порядка, а $L_h y_i$ – некоторый разностный оператор, определенный для всякого значения $h \leq h_0$. Будем говорить, что разностный оператор $L_h y_i$ имеет в точке x_i локальный порядок точности, равный n , если разность $L_h y_i - (Ly)_i = O(h^n)$, где $y(x)$ – произвольная функция, имеющая $(n + m)$ -ю непрерывную производную.

Определение 4. Разностная схема $L_h^{(k_i)} y_i$ для дифференциального оператора (1) имеет порядок n , если для всякой функции $k(x)$ из класса C_{n+1} ($n = 1, 2$) соответствующий разностный оператор $L_h y_i$ имеет n -й локальный порядок точности.

Определение 5. Разностная схема называется *безавостной*, если краевая задача для нее разрешима при любом заданном шаге h , любых значениях коэффициентов и любой правой части уравнения.

Если разностная схема не удовлетворяет такому условию, то при машинном счете для этого значения h и этих коэффициентов и правой части будет иметь место аварийный останов машины («авост»). Так как наличие машинного авоста, вызванное неудачным выбором шага h , не означает неразрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения, то такой авост естественно назвать *схемным авостом*.

3. Рассмотрим схему (2) для $k(x) \in C_2$ и потребуем, чтобы она имела первый порядок точности:

$$L_h y = Ly + O(h) = ky'' + k'y' + O(h). \quad (4)$$

Разлагая $y(x)$ в окрестности $x = x_i$, получим

$$L_h^{(k_i)} y_i = \frac{A_i + C_i + B_i}{h^2} y_i + \frac{B_i - A_i}{h} y_i' + \frac{B_i + A_i}{2} y_i'' + O(h). \quad (5)$$

Сравнение с (4) дает

$$\begin{aligned} A_i + C_i + B_i &= O(h^3), \\ B_i - A_i &= k_i' h + O(h^2), \\ B_i + A_i &= 2k_i + O(h). \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i} = 1 - \frac{hk_i'}{k_i} + O(h^2). \quad (7)$$

Для линейных схем отсюда также получаем

$$C_i = -(A_i + B_i), \quad (8)$$

$$a_{-1} + a_0 + a_1 = 1, \quad b_{-1} + b_0 + b_1 = 1, \quad (b_1 - b_{-1}) - (a_1 - a_{-1}) = 1. \quad (9)$$

4. Пусть ξ — точка разрыва функции $k(x)$ из класса Q_2 и

$$k(\xi - 0) = k_{\text{л}} \neq k_{\text{п}} = k(\xi + 0).$$

Решение уравнения (1) $y = \tilde{y}(x)$ удовлетворяет при $x = \xi$ условиям сопряжения

$$\tilde{y}_{\text{л}} = \tilde{y}_{\text{п}} = \tilde{y}(\xi), \quad k_{\text{л}} \tilde{y}_{\text{л}}' = k_{\text{п}} \tilde{y}_{\text{п}}' = w.$$

Разлагая $\tilde{y}(x)$ и $k(x)$ в окрестности точки $x = \xi = x_n + \theta h$ ($0 < \theta < 1$), получим:

$$L_h \tilde{y}_n = (L\tilde{y})_n + \frac{R_n}{h}, \quad L_h \tilde{y}_{n+1} = (L\tilde{y})_{n+1} + \frac{R_{n+1}}{h}, \quad (10)$$

$$R_n = \left[B_n \frac{(1-\theta)k_{\text{л}} + \theta k_{\text{п}}}{k_{\text{л}} k_{\text{п}}} - \frac{A_n}{k_{\text{л}}} \right] w + O(h), \quad (11)$$

$$R_{n+1} = \left[\frac{B_{n+1}}{k_{\text{п}}} - A_{n+1} \frac{(1-\theta)k_{\text{л}} + \theta k_{\text{п}}}{k_{\text{л}} k_{\text{п}}} \right] w + O(h).$$

Если в окрестности точки ξ при $|\xi - x| < \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ — любое число, не содержится других точек разрыва и $f(x)$ дифференцируема, то для схемы 1-го порядка точности разность $z_i = y_i - \tilde{y}_i$ удовлетворяет уравнениям

$$B_i r_{i+1} = A_i r_i - \varphi_i, \quad r_i = z_i - z_{i-1},$$

$$\varphi_i = \varphi_n \delta_{i,n} + \varphi_{n+1} \delta_{i,n+1} + O(h^3);$$

(12)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \quad \varphi_n = O(h), \quad \varphi_{n+1} = O(h).$$

5. Лемма. Пусть ξ — некоторая фиксированная точка интервала $(0, l)$ и $z_i = y_i - \tilde{y}_i$ удовлетворяет условиям (12) для любого шага h , причем $x_n < \xi < x_{n+1}$. Для сходимости любой последовательности решений y_i^h разностного уравнения $L_h y_i = -f_i$ к решению \tilde{y}_i дифференциального уравнения (1) в некотором интервале $|\xi - x| < \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 > 0$) необходимо выполнение условия

$$\Delta_n = A_{n+1} \varphi_n + B_n \varphi_{n+1} = o(h), \quad (13)$$

где $o(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ быстрее, чем первая степень h .

Полагая в условии (13) $\varphi_n = R_n h$, $\varphi_{n+1} = R_{n+1} h$ и пользуясь для R_n и R_{n+1} формулой (11), получаем необходимое δ -условие сходимости разностной схемы в точке разрыва:

$$\delta_n = \frac{B_n B_{n+1}}{k_n} - \frac{A_n A_{n+1}}{k_{n+1}} = O(h). \quad (\delta)$$

6. Для линейных схем 1-го порядка из δ -условия получаем 4 уравнения для a_k и b_k ($k = -1, 0, 1$), решая которые совместно с уравнениями (9), приходим к следующим 4 семействам схем:

- | | |
|---|--|
| I. $A_i = (1 - a_0)k_{i-1} + a_0 k_i,$ | $B_i = (1 - a_0)k_i + a_0 k_{i+1} = A_{i+1}.$ |
| II. $A_i = (1 - a_0)k_{i-1} + a_0 k_i,$ | $B_i = (1 - a_0)k_{i-1} - (1 - a_0)k_i + k_{i+1}.$ |
| III. $A_i = k_{i-1} + a_0 k_i - a_0 k_{i+1},$ | $B_i = (1 + a_0)k_i - a_0 k_{i+1}.$ |
| IV. $A_i = k_{i-1} + a_0 k_i - a_0 k_{i+1},$ | $B_i = (1 + a_0)k_{i-1} - (1 + a_0)k_i + k_{i+1}.$ |

7. Условие безавостности, предъявляемое нами к разностным схемам, означает, что $A_i \neq 0$ и $B_i \neq 0$ при любых значениях $\{k_i\}$. В самом деле, рассмотрим краевую задачу $y_0 = 0$, $r_{N+1} = y_{N+1} - y_N = 0$ и предположим, что n — наибольший номер, при котором $A_n = 0$. Если $B_i \neq 0$ для $i \geq n$, то можно написать:

$$r_{N+1} = -\bar{f}_{n+1}h^2 \prod_{m=n+1}^N \alpha_m - \sum_{k=n+1}^{N-1} h^2 \bar{f}_k \prod_{m=k+1}^N \alpha_m - \bar{f}_N h^2 \quad (\bar{f}_i = f_i/B_i).$$

Полагая $f_i = 0$ для $n+1 \leq i < N$, а $\bar{f}_N \neq 0$, получим $r_{N+1} \neq 0$, т. е. разностная краевая задача неразрешима. Если $B_m = 0$ при $m > n$, то аналогичное рассуждение также приводит к противоречию. Если $B_n = 0$, то аналогичные рассуждения следует провести для задачи $r_1 = 0$, $y_{N+1} = 0$.

Для линейных однородных схем требование безавостности означает неотрицательность a_s и b_s ($s = -1, 0, 1$).

8. Нетрудно видеть, что из четырех схем, полученных в п. 6, только первая схема

$$A_i = (1 - a_0)k_{i-1} + a_0k_i, \quad B_i = A_{i+1} \quad \text{при} \quad 0 \leq a_0 \leq 1$$

является безавостной.

Если $B_i = A_{i+1}$, то такую разностную схему будем называть *консервативной*. Для консервативной схемы можно ввести понятие потока

$$w_{i-1/2} = -\frac{A_i(y_i - y_{i-1})}{h},$$

относимого к «полуцелой» точке $x = x_{i-1/2}$, и записать разностное уравнение в виде

$$w_{i-1/2} - w_{i+1/2} = -q_i, \quad q_i = f_i h. \quad (14)$$

Если уравнение (14) интерпретировать как некий «закон сохранения» для интервала $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, означающий, что разность потоков равна источнику q_i , то для консервативной схемы закон сохранения для любого интервала $(x_{m-1/2}, x_{n+1/2})$ имеет вид

$$w_{m-1/2} - w_{n+1/2} = -\sum_{i=m}^n q_i.$$

Формулу

$$w_{i-1/2} = \frac{A_i(y_{i-1} - y_i)}{h}$$

следует рассматривать как интерполяционную формулу для вычисления потока $w = -ky'$ при $x = x_{i-1/2}$.

Нетрудно заметить, что всякая консервативная схема 1-го или 2-го порядка точности удовлетворяет δ -условию.

Если точки разрыва $k(x)$ являются узловыми точками разностной сетки, то формулы для A_i и B_i следует брать в виде

$$A_i = (1 - a_0)k_{i-1,p} + a_0k_{i,p}, \quad B_i = (1 - a_0)k_{i,p} + a_0k_{i+1,p} = A_{i+1}.$$

9. Теорема 1. Пусть $L_h^{(k_i)}y_i$ — однородная, линейная, трехточечная разностная схема, удовлетворяющая требованию безавоности, необходимому δ -условию сходимости на разрыве. Тогда:

1) если она имеет 1-й порядок точности, то она принадлежит однопараметрическому семейству консервативных разностных схем:

$$A_i = (1 - a_0)k_{i-1} + a_0k_i, \quad B_i = A_{i+1}, \quad 0 \leq a_0 \leq 1; \quad (15)$$

2) если она имеет 2-й порядок точности, то она определена однозначно:

$$A_i = 0,5(k_{i-1} + k_i), \quad B_i = A_{i+1} \quad (a_0 = 0,5). \quad (15')$$

Теорема 2. Решение разностной краевой задачи

$$L_h y_i = \frac{1}{h} (w_{i-1/2} - w_{i+1/2}) = -f_i, \quad w_{i-1/2} = A_i(y_{i-1} - y_i),$$

$$y_0 = 0, \quad w_{N+1/2} = 0,$$

$$A_i = (1 - a_0)k_{i-1} + a_0k_i \quad (0 \leq a_0 \leq 1)$$

сходится к решению краевой задачи (1), если коэффициент $k(x) \in Q_1$.

Если $k(x) \in Q_2$, то

$$z_i = y_i - \tilde{y}_i = O(h).$$

Аналогичные теоремы имеют место и для линейных краевых условий других типов.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Член-корреспондент АН СССР А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

Как известно, всякий линейный функционал $A[f]$, определенный в классе C_0 непрерывных функций, заданных в интервале (a, b) , представляется с помощью интеграла Стильтьеса

$$A[f] = \int_a^b f(x) d\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — функция с ограниченной вариацией (теорема Рисса). Известно также, что этот функционал может быть продолжен на класс Q_0 кусочно-непрерывных функций. Однако это продолжение неоднозначно.

Цель настоящей статьи — дать представление для произвольного линейного функционала, определенного в Q_0 .

§ 1. Рассмотрим линейный функционал $A[f]$, определяемый условиями

$$1) A[f_1 + f_2] = A[f_1] + A[f_2];$$

$$2) |A[f]| \leq M \sup |f|$$

в классе $Q_0(f)$ кусочно-непрерывных функций, заданных в интервале (a, b) .

Рассмотрим кусочно-непрерывные функции

$$\eta_\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } a < x < \xi; \\ 0, & \text{при } \xi \leq x < b; \end{cases}$$

$$\pi_\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = \xi; \\ 0, & \text{при } x \neq \xi \end{cases}$$

и обозначим

$$\alpha(\xi) = A[\eta_\xi(x)], \quad \sigma(\xi) = A[\pi_\xi(x)].$$

В частности, $\alpha(b) = A[1]$, так как $\eta_b(x) = 1$.

В дальнейшем будет показано, что функции $\alpha(\xi)$ и $\sigma(\xi)$, которые мы назовем характеристическими, однозначно определяют линейный функционал на Q_0 .

§ 2. Лемма 1. *Существует не более счетного числа точек $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_j, \dots$, в которых $\sigma(\xi) \neq 0$, причем*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\sigma(\zeta_j)| \leq M.$$

Будем называть линейный функционал $A[f] = f(\zeta)\sigma(\zeta)$, где $a < \zeta < b$, простейшим точечным функционалом точки ζ .

Линейный функционал, представимый в виде суммы простейших точечных функционалов:

$$A[f] = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j f(\zeta_j) \quad \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\sigma_j| \leq M \right),$$

будем называть точечным функционалом.

Линейный функционал $\bar{A}[f]$ будем называть регулярным, если $\bar{\sigma}(\xi) = \bar{A}[\pi_\xi(x)] \equiv 0$ при любом $a < \xi < b$.

§ 3. Покажем, что всякий линейный функционал $A[f]$ может быть представлен в виде суммы регулярного и точечного линейных функционалов.

Рассмотрим точечный функционал $A^*[f]$, равный

$$A^*[f] = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(\zeta_j) f(\zeta_j),$$

где

$$\sigma(\zeta_j) = A[\pi_{\zeta_j}(x)], \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\sigma(\zeta_j)| \leq M.$$

Линейный функционал

$$\bar{A}[f] = A[f] - A^*[f],$$

как нетрудно заметить, является регулярным и имеет норму $\overline{M} \leq 2M$. Отсюда и следует возможность представления

$$A[f] = \overline{A}[f] + A^*[f].$$

Характеристическая функция для $A^*[f]$ равна

$$\alpha^*(\xi) = A^*[\eta_\xi(x)] = \sum_{\zeta_j < \xi} \sigma(\zeta_j),$$

а характеристическая функция для $\overline{A}[f]$ дается формулой

$$\overline{\alpha}(\xi) = \overline{A}[\eta_\xi(x)] = \alpha(\xi) - \alpha^*(\xi).$$

§ 4. Лемма 2. *Функция $\overline{\alpha}(\xi)$ имеет ограниченную вариацию.*

Всякая функция ограниченной вариации в каждой точке имеет правое и левое предельные значения:

$$\overline{\alpha}_n(\xi) = \overline{\alpha}(\xi + 0), \quad \underline{\alpha}_n(\xi) = \overline{\alpha}(\xi - 0).$$

Лемма 3. *Существует не более счетного числа точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \dots, \xi_i, \dots$, в которых $\overline{\alpha}_n(\xi_i) \neq \overline{\alpha}(\xi_i)$ или $\underline{\alpha}_n(\xi_i) \neq \overline{\alpha}(\xi_i)$.*

Следует отметить, что $\alpha(\xi)$ является также функцией с ограниченной вариацией.

§ 5. Рассмотрим функционал

$$\overline{\overline{A}}[f] = \overline{A}[f] - \sum_{\xi_i < \xi} f_n(\xi_i)[\overline{\alpha}_n(\xi_i) - \overline{\alpha}(\xi_i)] - \sum_{\xi_i \leq \xi} f_n(\xi_i)[\overline{\alpha}(\xi_i) - \overline{\alpha}_n(\xi_i)]$$

и его характеристическую функцию

$$\overline{\overline{\alpha}}(\xi) = \overline{\overline{A}}[\eta_\xi(x)] = \overline{\alpha}_n(\xi) - \sum_{\xi_i < \xi} [\overline{\alpha}_n(\xi_i) - \overline{\alpha}(\xi_i)]. \quad (1)$$

Эта формула имеет место как в том случае, когда ξ — точка разрыва функции $\overline{\alpha}(\xi)$, так и в случае, когда ξ есть точка непрерывности и $\overline{\alpha}_n(\xi) = \overline{\alpha}(\xi)$.

Лемма 4. *Функция $\overline{\overline{\alpha}}(\xi)$ непрерывна при $a < \xi < b$ и*

$$\overline{\overline{\sigma}}(\xi) = \overline{\overline{A}}[\pi_\xi(x)] = 0.$$

Отметим, что $\overline{\overline{\alpha}}(\xi)$ имеет ограниченную вариацию $\overline{\overline{M}} \leq 2\overline{M}$.

Лемма 5. Если для некоторого регулярного функционала $\overline{A}[f]$ характеристическая функция $\overline{\alpha}(\xi)$ непрерывна, то в классе $Q_0(f)$ имеет место представление

$$\overline{A}[f] = \int_a^b f(x) d\overline{\alpha}(x).$$

В самом деле, разобьем интервал (a, b) на части точками $x = x_i$, включая все точки разрыва функции $f(x)$, и возьмем ступенчатую функцию

$$\overline{f}(x) = f_n(x_{i-1}), \quad x_{i-1} < x \leq x_i.$$

Разность $f(x) - \overline{f}(x)$ можно представить в виде

$$f(x) - \overline{f}(x) = \varepsilon(x) + \sum_i [f(x_{i-1}) - f_n(x_{i-1})] \pi_{x_{i-1}}(x),$$

где $\varepsilon(x)$ — кусочно-непрерывная функция, причем $|\varepsilon(x)| < \varepsilon_0$ при достаточно густой сети. Отсюда следует, что

$$|\overline{A}[f(x)] - \overline{A}[\overline{f}(x)]| \leq \overline{M}\varepsilon_0 \quad (\overline{\sigma}(x_i) = 0)$$

или

$$|\overline{A}[f] - \sum_i f_n(x_{i-1})[\overline{\alpha}(x_i) - \overline{\alpha}(x_{i-1})]| \leq M\varepsilon_0.$$

Переходя к пределу при $\Delta x = x_i - x_{i-1} \rightarrow 0$, получаем

$$\overline{A}[f] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i f_n(x_{i-1})[\overline{\alpha}(x_i) - \overline{\alpha}(x_{i-1})] = \int_a^b f(x) d\overline{\alpha}(x).$$

Из построения $\overline{\alpha}(x)$ видно, что эта функция является непрерывной частью функции $\overline{\alpha}(x)$.

§ 6. Таким образом, имеет место

Теорема 1. Всякий линейный функционал $A[f]$, определенный в классе $Q_0(f)$ кусочно-непрерывных функций $f(x)$, заданных на интервале (a, b) , может быть представлен в виде

$$A[f] = \int_a^b f(x) d\overline{\alpha}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \{f_n(\xi_i)[\overline{\alpha}_n(\xi_i) - \overline{\alpha}(\xi_i)] + f_n(\xi_i)[\overline{\alpha}(\xi_i) - \overline{\alpha}_n(\xi_i)]\} + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(\zeta_j) f(\zeta_j), \quad (2)$$

где

$$\bar{\alpha}(\xi) = \alpha(\xi) - \sum_{\zeta_j < \xi} \sigma(\zeta_j);$$

$\alpha(\xi)$ и $\sigma(\xi)$ — характеристические функции функционала $A[f]$; $\bar{\alpha}(\xi)$ — непрерывная часть функции $\bar{\alpha}(\xi)$, вычисляемая по формуле (1).

Отметим, что для непрерывной функции

$$\bar{A}[f] = \int_a^b f(x) d\bar{\alpha}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i) [\bar{\alpha}_n(\xi_i) - \bar{\alpha}_n(\xi_i)],$$

т. е. регулярный функционал $A[f]$ полностью определяется характеристической функцией $\bar{\alpha}(\xi)$ в точках ее непрерывности.

§ 7. Линейный функционал

$$\Gamma[f] = \sum_{j=1}^{\infty} [\omega_j^{(0)} f(\xi_j) + \omega_j^{(1)} f_n(\xi_j) + \omega_j^{(2)} f_n(\xi_j)], \quad \text{где } \omega_j^{(0)} + \omega_j^{(1)} + \omega_j^{(2)} = 0,$$

будем называть нуль-функционалом.

В классе $C_0(f)$ нуль-функционал всегда равен нулю. Если $\Gamma = \Gamma_R$ — регулярный функционал, то $\omega_j^{(0)} = 0$, $\omega_j^{(1)} = -\omega_j^{(2)}$ и

$$\Gamma_R[f] = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^{(2)} [f_n(\xi_j) - f_n(\xi_j)].$$

Теорема 2. Разность двух линейных функционалов, совпадающих на $C_0(f)$, является на $Q_0(f)$ нуль-функционалом.

§ 8. Линейный функционал $A[f]$ будем называть неотрицательным (положительным), если $A[f] \geq 0$ при $f \geq 0$ ($A[f] > 0$ при $f \geq \varepsilon > 0$).

Теорема 3. Для неотрицательности (положительности) линейного функционала $A[f]$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

- 1) характеристическая функция $\bar{\alpha}(\xi)$ регулярной части $\bar{A}[f]$ функционала $A[f]$ является неубывающей функцией;
- 2) характеристические коэффициенты $\sigma(\zeta_j)$ неотрицательны: $\sigma(\zeta_j) \geq 0$;
- 3) $\alpha(b) = A[1] > 0$.

§ 9. Назовем линейные регулярные функционалы $A[f]$ и $B[f]$, определенные на $Q_0(f)$, взаимно симметричными, если выполнено условие

$$B[f(x)] = A[f(-x)]$$

для любой функции $f(x) \in Q_0$, заданной в интервале (a, b) .

Теорема 4. Условия

$$\alpha(b) = \beta(b), \quad b = -a, \quad \beta(\xi) + \alpha(-\xi) = \alpha(b) = \beta(b)$$

необходимы и достаточны для взаимной симметрии $A[f]$ и $B[f]$.

§ 10. Для некоторых приложений требуется представление линейных функционалов на $Q_m(f)$ ($m > 0$), где Q_m — класс функций, кусочно-непрерывных в (a, b) вместе со своими производными до m -го порядка включительно. Поскольку характеристические функции $\alpha(\xi) = A[\eta_\xi(x)]$ и $\sigma(\xi) = A[\pi_\xi(x)]$ функционала $A[f]$ определяются при помощи функций, входящих в класс Q_m , то для $A[f]$, определенного на $Q_m(f)$, имеет место представление (2).

Нетрудно убедиться в том, что линейный функционал A , заданный на Q_m , может быть однозначно продолжен и на более широкий класс функций, например, на класс функций $R_{\bar{\alpha}(x)}(f)$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $f(x)$ — ограниченная, измеримая на (a, b) функция;
- 2) $f(x)$ имеет правое и левое предельные значения $f_{\text{л}}$ и $f_{\text{п}}$ во всех точках разрыва функции $\bar{\alpha}(x)$.

Поступило 20 VI 1958

ОБ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ

Член-корреспондент АН СССР А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

В статье [1] была поставлена задача об отыскании разностных схем, пригодных для единообразного решения дифференциальных уравнений в возможно более широком классе коэффициентов. Настоящая работа является дальнейшим развитием работы [1].

§ 1. Рассмотрим уравнение

$$Lu = -f(x) \quad (0 < x < 1), \quad (1)$$

где L — некоторый линейный дифференциальный оператор.

Пусть S_N ($x_0 = 0$, $x_1 = h$, ..., $x_i = ih$, ..., $x_N = Nh = 1$) — разностная сетка;

$$L_h y_i^h = -F_i^h \quad (2)$$

разностное уравнение, соответствующее уравнению (1).

Линейный разностный оператор L_h определяется при помощи матрицы коэффициентов a_{ij}^h системы линейных уравнений (2), являющихся функциями шага разностной сетки $h = \frac{1}{N}$. Для получения разностных уравнений (2), кроме того, необходимо задать функционалы $F_i^h[f]$, определенные в некотором классе $\{f(x)\}$, и граничные условия.

§ 2. Рассмотрим класс уравнений

$$L^{(p(x))} u = -f(x). \quad (3)$$

Функции $(p(x)) = \{p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)\}$ назовем *коэффициентами уравнения* (3).

Класс дифференциальных уравнений (3) будет определен, если фиксирован тип оператора L и указан класс, к которому принадлежат коэффициенты $(p(x))$.

Пусть $L_h^{(p)}$ обозначает класс разностных операторов L_h , элементы матрицы a_{ij}^h которых являются функционалами, определенными в рассматриваемом классе коэффициентов ($p(x)$) и зависящими от параметра h . Такую матрицу-функционал $L_h^{(p)} = (a_{ij}^h[p(x)])$ будем называть *разностной сеткой*.

§ 3. Введем необходимые для дальнейшего определения:

1. Назовем $C_m^\gamma(f)$ класс функций $f(x)$, имеющих m -ю производную, удовлетворяющую на отрезке $[0, 1]$ условию Гельдера порядка $\gamma > 0$. Если m -я производная непрерывна, то соответствующий класс функций будем обозначать $C_m(f)$. В частности, $C_0(f)$ есть класс непрерывных функций.

2. Будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу $Q_m(f)$, если $f(x)$ и ее m производных кусочно-непрерывны на $(0, 1)$. Если, кроме того, m -я производная в каждом из интервалов непрерывности удовлетворяет условию Гельдера порядка γ , то соответствующий класс назовем Q_m^γ . В частности, Q_0 — класс кусочно-непрерывных функций.

3. Пусть $u(x)$ есть некоторое решение уравнения

$$Lu = -f;$$

y_i^h — соответствующее решение уравнения

$$L_h y_i^h = -F_i^h; \quad z_i^h = y_i^h - u(x_i);$$

$z(x, h)$ — функция, равная z_i^h при $x = x_i$ и линейная между соседними узловыми точками сетки. Будем говорить, что разностный оператор L_h сходится к дифференциальному оператору L , если функция $z(x, h)$ равномерно стремится к нулю при $h \rightarrow 0$ и произвольной функции $f(x)$ из некоторого класса, т. е.

$$|z(x, h)| < \rho(h), \quad \text{где } \rho(h) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Если $z(x, h) = O(h^n)$ или $|z(x, h)| < Mh^n$, где M — положительная постоянная, зависящая от выбора функции $f(x)$, то будем говорить, что L_h имеет n -й (интегральный) порядок точности относительно L .

4. Разностный оператор L_h имеет n -й порядок аппроксимации относительно оператора L , если найдется такое m , что для любой функции $y(x)$ из класса C_m при всех значениях N и во всех точках разностной сетки будем иметь

$$|L_h y_i - (Ly)_i| \leq Mh^n,$$

где M — положительная постоянная, зависящая от выбора $y(x)$. Аналогично можно говорить о порядке аппроксимации на некотором отрезке $[a, b] \subset [0, 1]$.

5. Если при любом выборе коэффициентов $(p(x))$ из заданного функционального класса разностная схема дает разностный оператор L_h , сходящийся к оператору L , который соответствует выбранным коэффициентам $(p(x))$, то разностную схему $L_h^{(p)}$ будем называть сходящейся в данном классе коэффициентов. Аналогично будем говорить, что разностная схема $L_h^{(p)}$ имеет n -й интегральный порядок точности (или n -й порядок аппроксимации) в данном классе коэффициентов, если для любых функций $(p(x))$ из этого класса разностный оператор L_h имеет n -й интегральный порядок точности (n -й порядок аппроксимации).

6. Разностные схемы $L_h^{(p)}$ и $\bar{L}_h^{(p)}$ эквивалентны в смысле сходимости в некотором классе коэффициентов $(p(x))$, если для любых функций из этого класса разность $y(x, h) - \bar{y}(x, h)$ равномерно стремится к нулю при $h \rightarrow 0$.

Если $y(x, h) - \bar{y}(x, h) = O(h^n)$ (или $L_h^{(p)} y_i - \bar{L}_h^{(p)} y_i = O(h^n)$) при любой функции $p(x)$ из данного класса, то разностные схемы $L_h^{(p)}$ и $\bar{L}_h^{(p)}$ имеют n -й интегральный (или локальный) порядок эквивалентности.

Очевидно, что:

Если $L_h^{(p)}$ и $\bar{L}_h^{(p)}$ имеют n -й порядок точности, то они имеют n -й интегральный порядок эквивалентности.

Если $L_h^{(p)}$ и $\bar{L}_h^{(p)}$ имеют n -й интегральный (или локальный) порядок эквивалентности и $L_h^{(p)}$ имеет n -й порядок точности (или n -й порядок аппроксимации), то и $\bar{L}_h^{(p)}$ обладает тем же свойством.

7. Будем называть разностную схему

$$L_h^{(p)} = (a_{ij}^h [p(x)])$$

симметричной схемой, если разностный оператор L_h остается неизменным при изменении направления оси x . Условия симметрии имеют вид:

$$1) a_{ij}^h [p(x)] = a_{i, 2i-j}^h [p(2x_i + x)] \quad (x_i = ih);$$

$$2) 0 \leq (2i - j)h \leq 1.$$

8. Разностная схема $L_h^{(p)}$ называется *однородной* схемой, если элементы a_{ij}^h матрицы L_h во всех точках i определяются единообразно для всех

функций ($p(x)$), т. е. являются функционалами вида

$$a_{ij}^h[p(x)] = a_{j-i}^h[\bar{p}(s)], \quad \bar{p}(s) = p(x_i + sh), \quad -n_1 \leq j - i \leq n_2.$$

Если однородная схема симметрична, то

- 1) $n_1 = n_2$;
- 2) $a_{j-i}^h[p(x_i + sh)] = a_{i-j}^h[p(x_i - sh)]$.

§ 4. Рассмотрим на отрезке $0 \leq x \leq 1$ первую краевую задачу для класса уравнений

$$L^{(p)}u = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right] = -f(x), \quad (0 < M_1 \leq p(x) \leq M_2). \quad (4)$$

Пусть

$$L_h^{(p)}y_i = \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{A_i^h} y_{i-1} + \frac{1}{C_i^h} y_i + \frac{1}{B_i^h} y_{i+1} \right] \quad (5)$$

трехточечная однородная разностная схема, коэффициенты которой

$$A_i^h = A^h[p(x_i + sh)], \quad B_i^h = B^h[p(x_i + sh)], \quad C_i^h = C^h[p(x_i + sh)],$$

где $A^h[\bar{p}(s)]$, $B^h[\bar{p}(s)]$, $C^h[\bar{p}(s)]$ суть функционалы от функции $\bar{p}(s)$, заданной для $-1 < s < 1$. Для того чтобы разностная схема имела в классе $C_m(p)$ ($m \geq k+1$, $k = 1, 2$) k -й порядок аппроксимации, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\frac{1}{A_i^h} + \frac{1}{C_i^h} + \frac{1}{B_i^h} = O(h^{k+2}), \quad (6)$$

$$\frac{1}{h} \left[\frac{1}{B_i^h} - \frac{1}{A_i^h} \right] = -\frac{p_i'}{p_i^2} + O(h^k), \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B_i^h} + \frac{1}{A_i^h} \right) = \frac{1}{p_i} + O(h^k). \quad (7)$$

Лемма 1. Если разностная схема (5) имеет k -й порядок аппроксимации, то и схема

$$L_h^{(p)}y_i = \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{B_i^h} (y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{A_i^h} (y_i - y_{i-1}) \right] \quad (8)$$

обладает тем же свойством.

§ 5. Однородную разностную схему (8) будем называть *p-линейной* (или просто линейной), если:

- 1) $A^h[\bar{p}]$ и $B^h[\bar{p}]$ являются линейными регулярными функционалами [2];
- 2) при $0 \leq h \leq h_0 < 1$ имеет место представление

$$\begin{aligned} A^h[\bar{p}] &= A^{(0)}[\bar{p}] + hA^{(1)}[\bar{p}] + h^2A^{(2)}[\bar{p}] + O_{\bar{p}}(h^3), \\ B^h[\bar{p}] &= B^{(0)}[\bar{p}] + hB^{(1)}[\bar{p}] + h^2B^{(2)}[\bar{p}] + O_{\bar{p}}(h^3), \end{aligned} \quad (9)$$

где $|O_{\bar{p}}(h^3)| < K_{\bar{p}}h^3$; $K_{\bar{p}}$ — постоянная, зависящая от выбора \bar{p} , причем все коэффициенты при степенях h^0, h, h^2 являются линейными регулярными функционалами. Линейная разностная схема

$$\begin{aligned} L_h^{(p)} y_i &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{B_i} (y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{A_i} (y_i - y_{i-1}) \right], \\ A_i &= A[p(x_i + sh)], \quad B_i = B[p(x_i + sh)] \end{aligned} \quad (10)$$

называется *канонической*, если функционалы $A[\bar{p}(s)]$ и $B[\bar{p}(s)]$ не зависят от h .

Лемма 2. Если линейная разностная схема вида (8) имеет k -й порядок аппроксимации ($k = 1, 2$), то и соответствующая ей каноническая схема, у которой $A = A^{(0)}$, $B = B^{(0)}$, также имеет k -й порядок аппроксимации.

Отметим, что для схемы первого порядка аппроксимации должны выполняться условия

$$A[1] = 1, \quad B[1] = 1, \quad B[s] - A[s] = 1,$$

а для схемы второго порядка аппроксимации — условия

$$A[1] = 1, \quad B[1] = 1, \quad A[s] = -0,5, \quad B[s] = 0,5, \quad A[s^2] = B[s^2].$$

Лемма 3. Если каноническая схема первого порядка аппроксимации симметрична, то она имеет второй порядок аппроксимации.

§ 6. Требование определенности $L_h^{(p)}$ в $Q_m(p)$ означает, что $A_i \neq 0$, $B_i \neq 0$ ни в одной точке разностной сетки для любой функции $p \in Q_m$. Эти условия будут выполнены, если функционалы A и B являются положительными ($A[\bar{p}] > 0$, $B[\bar{p}] > 0$ при $\bar{p}(s) > 0$) (см. [2]).

Если каноническая схема $L_h^{(p)}$ симметрична и функционалы $A[\bar{p}(s)]$, $B[\bar{p}(s)]$ положительны, то такая разностная схема называется *нормальной*. В дальнейшем мы будем рассматривать нормальные схемы.

Связь между порядком аппроксимации и порядком точности устанавливает следующая

Теорема. *Сходимость нормальной разностной схемы в смысле аппроксимации необходима и достаточна для интегральной сходимости, точнее:*

1) *Если нормальная схема сходится в $C_1^\gamma(p)$, то она имеет первый порядок аппроксимации в $C_2(p)$ и, в силу симметрии, второй порядок аппроксимации для $p(x) \in C_3$.*

2) *Если нормальная схема имеет второй порядок аппроксимации в $C_3(p)$, то она сходится в $C_1^\gamma(p)$, имеет первый порядок точности в $C_2(p)$ и второй порядок точности в $C_3(p)$.*

Вопросы о сходимости и порядке точности нормальных разностных схем в классе $Q_m(p)$ будут рассмотрены отдельно.

Поступило 20 VI 1958

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 108, № 3. — С. 393–396.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О представлении линейных функционалов в классе разрывных функций // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 2. — С. 188–191.

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Член-корреспондент АН СССР А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

Многие разностные схемы, применяемые для решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и сходящиеся в классе гладких коэффициентов, являются расходящимися в случае разрывных коэффициентов. Цель настоящей статьи — установить необходимые условия сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов для уравнения

$$Lu = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right] = -f(x) \quad (0 < x < 1, 0 < m \leq p(x) \leq M), \quad (1)$$

а также дать общую характеристику класса нормальных [1] схем, удовлетворяющих необходимому условию сходимости.

п. 1. Рассмотрим класс дифференциальных операторов $L^{(p)}u$, определенных на интервале $0 < x < 1$, и соответствующую нормальную разностную схему (см. [1]) $L_h^{(p)}$, определенную на равномерной разностной сетке S_N ($x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_i = ih, \dots, x_N = Nh = 1$):

$$L_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{B_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i} \right], \quad (2)$$

где $A_i = A[\bar{p}(s)]$, $B_i = B[\bar{p}(s)]$ при $\bar{p}(s) = p(x_i + sh)$ ($-1 < s < 1$); A и B — нормальные, т. е. линейные регулярные, положительные и не зависящие от h функционалы, удовлетворяющие условию взаимной симметрии [2].

п. 2. Будем называть $L_h^{(p)}$ квазиконсервативной разностной схемой, если $B_i = A_{i+1}$ или $B[p(x_i + sh)] = A[p(x_{i+1} + sh)]$ в классе $C_m(p)$. Если A и B — линейные регулярные функционалы, то условие квазиконсервативности означает, что:

1) функционал $A[\bar{p}(s)]$ определен для функций $\bar{p}(s)$, заданных на интервале $-1 < s < 0$, а $B[\bar{p}(s)]$ — на интервале $0 < s < 1$;

2) в классе разрывных коэффициентов $Q_m(\bar{p})$

$$B[\bar{p}(s)] = A[\bar{p}(1+s)] + \Gamma[\bar{p}(s)],$$

где $\Gamma[\bar{p}(s)]$ — нуль-функционал (см. [2]).

Если условие $B_i = A_{i+1}$ выполняется и в классе $Q_m(p)$, то разностную схему $L_h^{(p)}$ мы будем называть консервативной схемой. В этом случае $B[\bar{p}(s)] = A[\bar{p}(1+s)]$ для $\bar{p}(s) \in Q_m$, и разностный оператор $L_h^{(p)}$ можно представить в виде

$$L_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{A_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i} \right] = \frac{1}{h^2} \Delta \left(\frac{1}{A_i} \nabla y_i \right).$$

п. 3. Перейдем к изучению вопроса о сходимости в $Q_m(p)$ нормальной разностной схемы (2), имеющей 2-й порядок точности в $C_m(p)$ ($m \geq 3$). Предположим, что $p(x)$ из Q_m имеет разрыв 1-го рода в точке $x = \xi$ ($0 < \xi < 1$), причем $\xi = x_n + \theta h$, $0 \leq \theta \leq 1$, где $x_n = nh$ — узловая точка разностной сетки S_N ($h = 1/N$). Очевидно, что $\theta = \theta(h)$, $n = n(h)$.

Вычислим погрешность схемы $L_h^{(p)}$ в окрестности точки $x = \xi$. Если $p \in Q_m$ ($m \geq 3$), то погрешность аппроксимации

$$\varphi_i = L_h u_i - (Lu)_i = O(h^2) \quad \text{при } i \neq n, i \neq n+1,$$

где $u = u(x)$ — решение дифференциального уравнения (1).

Для φ_n и φ_{n+1} получаем выражения

$$\begin{aligned} \varphi_n = \frac{w}{h} \left[\frac{\theta p_n + (1-\theta)p_n}{B_n} - \frac{p_n}{A_n} \right] + \frac{1}{B_n} [(1-\theta)^2 u_n'' - \theta^2 u_n''] + \\ + \frac{1}{A_n} (0,5 + \theta) u_n'' - \left(\frac{1}{p} u' \right)'_n + O(h) = \varphi_n^0 + O(h), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} = \frac{w}{h} \left[\frac{p_n}{B_{n+1}} - \frac{\theta p_n + (1-\theta)p_n}{A_{n+1}} \right] - \frac{1}{A_{n+1}} [(1-\theta)^2 u_n'' - \theta^2 u_n''] + \\ + \frac{1}{B_{n+1}} (1,5 - \theta) u_n'' - \left(\frac{1}{p} u' \right)'_n + O(h) = \varphi_{n+1}^0 + O(h), \quad (4) \end{aligned}$$

где $w = u'_n/p_n = u'_n/p_n$, $f_l = f(\xi - 0)$, $f_n = f(\xi + 0)$.

Если $p(x) \in Q_1^\gamma$, то

$$\begin{aligned} \varphi_i &= O(h^\gamma) \quad \text{при } i \neq n, \quad i \neq n+1; \\ \varphi_n &= \varphi_n^0 + O(h^\gamma), \quad \varphi_{n+1} = \varphi_{n+1}^0 + O(h^\gamma); \\ |O(h^\gamma)| &< Kh^\gamma \quad (\gamma > 0); \end{aligned}$$

K — положительная постоянная, зависящая от выбора функции $p(x)$.

п. 4. Рассмотрим отрезок $[\bar{x}, \bar{\bar{x}}]$, целиком лежащий внутри отрезка $[0, 1]$ и содержащий фиксированную точку $x = \xi$, $\bar{x} < \xi < \bar{\bar{x}}$. Точка $x = \xi$ принадлежит некоторому интервалу сетки S_N , так что $x_n \leq \xi \leq x_{n+1}$. Рассмотрим разностное уравнение

$$L_h z_i = \frac{1}{h^2} \left[\frac{z_{i+1} - z_i}{B_i^h} - \frac{z_i - z_{i-1}}{A_i^h} \right] = -\psi_i \quad (\bar{x} < x_i < \bar{\bar{x}}) \quad (*)$$

и предположим, что коэффициенты A_i^h, B_i^h и правая часть ψ_i удовлетворяют условиям:

I. Существуют такие $m > 0$ и $M > 0$, что $m \leq A_i^h \leq M$, $m \leq B_i^h \leq M$.

II. Существует такое $b > 0$, что $\varkappa_i \geq e^{-bh}$ при $x_i > \xi + h$ ($i > n+1$); $\varkappa_i \leq e^{+bh}$ при $x_i < \xi - h$ ($i < n$); $\varkappa_i = B_i^h/A_{i+1}^h$.

III. $|\psi_i| < \rho(h)$, где $\rho(h) \rightarrow 0$ при $h = 1/N \rightarrow 0$, если $i \neq n$ и $i \neq n+1$.

Пусть z_i^h — решение уравнения (*), а $z(x, h)$ — полигональная функция.

Лемма 1. Если для уравнения (*) выполнены условия I, II, III и существует некоторая последовательность решений $z(x, h_N)$ уравнения (*), равномерно сходящаяся к нулю при $h_N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), то выполняется условие

$$\Delta(\xi, h) = h \left(\frac{\psi_n}{A_{N+1}^h} + \frac{\psi_{n+1}}{B_n^h} \right) = \rho(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h = h_N \rightarrow 0. \quad (5)$$

Лемма 2. Если выполнены условия леммы 1 и, кроме того:

1) $\psi_i = O(h^2)$ или $|\psi_i| < C_1 h^2$ при $i \neq n, i \neq n+1$;

2) $|z(x, h_N)| < C_2 h^2$ на некоторой последовательности сеток S_N ,

то выполняются условия

$$\Delta(\xi, h) = O(h^2), \quad \psi_n = O(1), \quad \psi_{n+1} = O(1). \quad (6)$$

п. 5. Обозначая $u(x)$ решение дифференциального уравнения

$$L^{(p)}u = -f(x),$$

а y_i — решение уравнения

$$L_h^{(p)}y = -F_i^h, \quad F_i^h = F[\bar{f}(s)], \quad \bar{f}(s) = f(x_i + sh),$$

где F — нормальный симметричный функционал, удовлетворяющий условию нормировки $F[1] = 1$, получим для разности $z_i = y_i - u(x_i)$ уравнение

$$L_h^{(p)}z_i = -\psi_i, \quad \psi_i = \varphi_i + F_i^h - f(x_i).$$

Пусть $L_h^{(p)}$ — нормальная схема 2-го порядка аппроксимации; $p \in Q_1^\gamma$, $f \in Q_0^\gamma$. Если $\xi = x_n + \theta h$ ($0 < \theta < 1$) — точка разрыва $p(x)$ и $f(x)$, то $\psi_i = O(h^\gamma)$ при $i \neq n, i \neq n+1$ (условие III). Нетрудно убедиться в том, что условия II и III из п. 4 также выполнены. Подставляя в формулу (5) выражения (3) и (4) для φ_n и φ_{n+1} и учитывая, что

$$F_n^h - f(x_n) = O(1), \quad F_{n+1}^h - f(x_{n+1}) = O(1),$$

получим необходимое условие сходимости однородной разностной схемы $L_h^{(p)}$ в классе кусочно-непрерывных и кусочно-гладких коэффициентов $p(x)$. Это условие имеет вид:

$$\frac{B_n^h B_{n+1}^h}{P_n} - \frac{A_n^h A_{n+1}^h}{P_n} = \rho(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (\delta)$$

Аналогично, подставляя в (6) выражения (3) и (4) для ψ_n и ψ_{n+1} , получим, в силу леммы 2, необходимые условия 2-го интегрального порядка точности схемы $L_h^{(p)}$ в $Q_m(p)$:

$$\frac{\psi_n}{A_{n+1}^h} + \frac{\psi_{n+1}}{B_n^h} = O(h), \quad \varphi_n = O(1), \quad \varphi_{n+1} = O(1).$$

п. 6. Пусть $L_h^{(p)}$ — нормальная, сходящаяся в $C_m(p)$ схема. Представим $p(x)$ в виде суммы

$$p(x) = \widehat{p}(x) + \widetilde{p}(x),$$

где

$$\begin{aligned}\widehat{p}(x) &= p_{\text{л}} = p(\xi - 0) \quad \text{при } x < \xi; \\ \widehat{p}(x) &= p_{\text{п}} = p(\xi + 0) \quad \text{при } x > \xi,\end{aligned}$$

а функция $\widetilde{p}(x)$ непрерывна, причем

$$\widetilde{p}(\xi) = 0, \quad \widetilde{p}'_{\text{л}} = p'_{\text{л}}, \quad \widetilde{p}'_{\text{п}} = p'_{\text{п}}.$$

Поэтому

$$A[\widetilde{p}(x_n + sh)] = O(h), \quad B[\widetilde{p}(x_n + sh)] = O(h),$$

и, следовательно,

$$A_n = \widehat{A}_n + O(h), \quad B_n = \widehat{B}_n + O(h),$$

где

$$\widehat{A}_n = A[\widehat{p}(x_n + sh)], \quad \widehat{B}_n = B[\widehat{p}(x_n + sh)].$$

Пользуясь функцией

$$\eta_{\xi}(x) = 1 \quad \text{при } x < \xi; \quad \eta_{\xi}(x) = 0 \quad \text{при } x \geq \xi,$$

можно написать

$$\widehat{p}(x) = \eta_{\xi}(x)p_{\text{л}} + (1 - \eta_{\xi}(x))p_{\text{п}}.$$

Тогда будем иметь

$$\widehat{A}_n = \alpha(\theta)p_{\text{л}} + [1 - \alpha(\theta)]p_{\text{п}}, \quad \widehat{B}_n = \beta(\theta)p_{\text{л}} + [1 - \beta(\theta)]p_{\text{п}},$$

где $\alpha(\theta) = A[\eta_{\theta}(x)]$, $\beta(\theta) = B[\eta_{\theta}(x)]$ — характеристические функции регулярных линейных функционалов A и B [2].

Аналогично находим

$$\widehat{A}_{n+1} = \alpha(-1 + \theta)p_{\text{л}} + [1 - \alpha(-1 + \theta)]p_{\text{п}},$$

$$\widehat{B}_{n+1} = \beta(-1 + \theta)p_{\text{л}} + [1 - \beta(-1 + \theta)]p_{\text{п}}.$$

Необходимое условие сходимости (δ) можно записать в виде

$$\frac{\widehat{B}_n \widehat{B}_{n+1}}{p_{\text{п}}} - \frac{\widehat{A}_n \widehat{A}_{n+1}}{p_{\text{л}}} = \rho(h). \quad (\widehat{\delta})$$

Нашей задачей является предельный переход при $N \rightarrow \infty$ ($h = 1/N \rightarrow 0$) в условии $(\widehat{\delta})$. При этом необходимо сначала рассмотреть возможные пределы функции $\theta = \theta(1/N) = N\xi - n$, когда $N \rightarrow \infty$, пробегая какую-либо последовательность возрастающих чисел $N_1, N_2, \dots, N_k, \dots$.

В дальнейшем мы будем опираться на следующую теорему П. Л. Чебышева [4]:

Если a — количество несоизмеримое, то найдется бесконечное множество таких целых чисел x, y , при которых выражение $y - ax$ будет разниться с каким-либо данным количеством b менее, чем на $2/x$. Одни из этих величин x, y будут давать $y - ax > b$, другие $y - ax < b$.

Из теоремы Чебышева следует, что для иррационального ξ и любого θ_0 , $0 < \theta_0 < 1$:

1) существует бесконечная последовательность таких сеток $S_{\overline{N}_k}$ с шагом $\overline{h}_k = 1/\overline{N}_k$, что $\lim_{\overline{N}_k \rightarrow 0} \theta = \theta_0 + 0$, т. е. $\theta \rightarrow \theta_0$ справа;

2) существует бесконечная последовательность таких $S_{\overline{N}_k}$ с шагом $\overline{h}_k = 1/\overline{N}_k$, что $\theta \rightarrow \theta_0$ слева при $\overline{N}_k \rightarrow \infty$.

Отметим, что:

а) если θ_0 — рациональное число, то найдется такое ξ , что равенство $\theta(1/N) = \theta_0$ имеет место для бесконечного множества разностных сеток S_{N_k} ;

б) если θ_0 — иррациональное число, то, каково бы ни было ξ , равенство $\theta_0 = \theta(1/N) = N\xi - n$ возможно не более, чем для одного значения N , т. е. не более, чем для одной разностной сетки.

п. 7. Потребуем теперь, чтобы наша нормальная схема $L_h^{(p)}$ удовлетворяла необходимому условию $(\widehat{\delta})$ в $Q_m(p)$. Выбирая произвольное $0 \leq \theta_0 \leq 1$ и совершая предельный переход по последовательности сеток $S_{\overline{N}_k}$ (или $S_{\overline{N}_k}$) при $\overline{N}_k \rightarrow \infty$, а также учитывая симметрию схемы, условия нормировки $\alpha(1) = A[1] = 1$, $\beta(1) = B[1] = 1$ и положительность функционалов A и B , получим:

1) $\beta(\xi) = 0$ при $-1 < \xi < 0$; $\alpha(\xi) = 1$ при $0 < \xi < 1$;

2) $\beta(\xi) = \alpha(-1 + \xi)$ в точках непрерывности α и β .

Отсюда следует, что условию сходимости (δ) удовлетворяет только квазиконсервативная схема

$$B[\bar{p}(s)] = A[\bar{p}(1+s)] + \Gamma[\bar{p}(s)],$$

где

$$\Gamma[\bar{p}(s)] = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(\zeta_j) [p_{\text{л}}(\zeta_j) - p_{\text{п}}(\zeta_j)]$$

— нуль-функционал. В силу замечания б) п. 6 суммирование проводится только по иррациональным особым точкам функционала Γ .

Л е м м а 3. На любой последовательности разностных сеток S_{N_k}

$$\Gamma[p(x_i + sh_{N_k})] = \rho(h_{N_k}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N_k \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что найденной нами схеме эквивалентна консервативная схема, для которой

$$\beta(\xi) = \alpha(-1 + \xi) \quad \text{при всех} \quad 0 < \xi < 1.$$

Учитывая условие симметрии, найдем

$$\alpha(\xi) = 0,5 + \omega(\xi + 0,5),$$

где $\omega(t)$ — произвольная нечетная функция ограниченной вариации:

$$\omega_{\text{л}}(-t) = -\omega_{\text{п}}(t),$$

удовлетворяющая условию нормировки $\omega(0,5) = 0,5$.

п. 8. Рассматривая сходимость для однородного уравнения и пользуясь следующим определением сходимости:

разностная схема $L_h^{(p)}$ сходится к дифференциальному оператору $L^{(p)}$ в заданном классе коэффициентов $(p(x))$, если для любого решения $u(x)$ уравнения $L^{(p)}u = 0$ с коэффициентами из заданного класса найдется такое решение разностного уравнения $L_h^{(p)}y_i = 0$, что на любой последовательности сеток S_{N_k} полигональная функция $y(x, h)$ равномерно сходится к $u(x)$ при $h = 1/N_k \rightarrow 0$, т. е.

$$|y(x, h) - u(x)| < \rho(h) \rightarrow 0,$$

можно формулировать теоремы:

Теорема 1. Если нормальная разностная схема $L_h^{(p)}$ сходится в $Q_1^\gamma(p)$, то она квазиконсервативна.

Теорема 2. Для всякой сходящейся в $Q_1^\gamma(p)$ квазиконсервативной нормальной схемы $L_h^{(p)}$ существует эквивалентная ей в смысле сходимости консервативная схема.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило 13 X 1958

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 4. — С. 562–565.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О представлении линейных функционалов в классе разрывных функций // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 2. — С. 188–191.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 108, № 3. — С. 393–396.
4. Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 1. — М.—Л.: 1944. — С. 271.

ОБ ОДНОЙ НАИЛУЧШЕЙ ОДНОРОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ

Член-корреспондент АН СССР А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

В работе [1] было найдено необходимое условие сходимости в классе кусочно-непрерывных и кусочно-гладких коэффициентов $Q_m(p)$ нормальной разностной схемы (см. [2]) $L_h^{(p)}$, применяемой для решения класса дифференциальных уравнений

$$L^{(p)}u = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right] = -f(x) \quad (0 < x < 1, 0 < m \leq p(x) \leq M). \quad (1)$$

Ставится задача: найти «наилучшие» разностные схемы, которые могут давать второй интегральный порядок точности в $Q_m(p)$ [1]. Показано, что существует только одна наилучшая нормальная схема.

п. 1. Рассмотрим нормальную разностную схему

$$L_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{B_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i} \right] \quad \left(h = \frac{1}{N} \right), \quad (2)$$

где $B_i = B[\bar{p}(s)]$, $A_i = A[\bar{p}(s)]$, $\bar{p}(s) = p(x_i + sh)$; A и B — нормальные (линейные, регулярные, положительные [3], не зависящие от h) и взаимно симметричные функционалы. Если $L_h^{(p)}$ удовлетворяет необходимому условию сходимости в $Q_1^{(p)}$, то она квазиконсервативна [1], т. е. функционал $A[\bar{p}(s)]$ определен для $-1 < s < 0$, $B[\bar{p}(s)]$ — для $0 < s < 1$, причем

$$B[\bar{p}(s)] = A[\bar{p}(1+s)] + \Gamma[\bar{p}(s)],$$

где $\Gamma[\bar{p}(s)]$ — нуль-функционал. Иными словами,

$$\begin{aligned} B_i &= A_{i+1} + \Gamma[p(x_i + sh)] && \text{в } Q_m(p), \\ B_i &= A_{i+1} && \text{в } C_m(p). \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать такие схемы.

п. 2. Пусть $p(x)$ имеет разрыв 1-го рода в точке $x = \xi = x_n + \theta h$, где $\theta = \theta(h)$, $0 \leq \theta \leq 1$, $n = n(h)$, и принадлежит классу $Q_m(p)$ ($m \geq 3$). Обозначая $u(x)$ некоторое решение дифференциального уравнения $L^{(p)}u$, а y_i — некоторое решение разностного уравнения $L_h^{(p)}y_i = 0$, получим для их разности $z_i = y_i - u(x_i)$ неоднородное уравнение

$$L_h^{(p)}z_i = -\varphi_i,$$

где

$$\varphi_i = L_h^{(p)}u_i - (L^{(p)}u)_i.$$

Если $i \neq n$, $i \neq n + 1$, то $\varphi_i = O(h^2)$ или $|\varphi_i| < Ch^2$. Выражения для φ_n и φ_{n+1} даны в [1] (формулы (3) и (4)).

Положим, по аналогии с [1],

$$p(x) = \widehat{p}(x) + \widetilde{p}(x),$$

где

$$\widehat{p}(x) = p_{\text{л}} = p(\xi - 0) \quad \text{при } x < \xi;$$

$$\widetilde{p}(x) = p_{\text{п}} = p(\xi + 0) \quad \text{при } x > \xi.$$

Тогда будем иметь

$$A_n = A[\widehat{p}(x_n + sh)] + A[\widetilde{p}(x_n + sh)] = p_{\text{л}} + O(h) \quad (A[1] = 1),$$

$$B_{n+1} = p_{\text{п}} + O(h) \quad (B[1] = 1).$$

Если $i \neq n$, то $B_i = A_{i+1}$ и $\kappa_i = B_i/A_{i+1} = 1$, т. е. условия леммы (при $\psi_i = \varphi_i$) из [1] выполнены.

Отсюда следует, что для того, чтобы полигональная функция $z(x, h)$ имела второй порядок малости по h , т. е. $|z(x, h)| < Ch^2$ при $h \rightarrow 0$, должны выполняться необходимые условия второго порядка точности:

$$\overline{\Delta}(\xi, h) = \frac{\varphi_n}{A_{n+1}} + \frac{\varphi_{n+1}}{B_n} = O(h), \quad \varphi_n = O(1), \quad \varphi_{n+1} = O(1) \quad (3)$$

(третье условие является следствием первых двух условий).

п. 3. Выражение для φ_n можно записать в виде

$$\varphi_n = \frac{w}{h} \left[\frac{\theta p_{\text{л}} + (1 - \theta)p_{\text{п}}}{B_n} - 1 \right] + O(1), \quad w = \frac{u'_{\text{л}}}{p_{\text{л}}} = \frac{u'_{\text{п}}}{p_{\text{п}}}.$$

Требование $\varphi_n = O(1)$ дает

$$B_n = \theta(h)p_{\text{л}} + [1 - \theta(h)]p_{\text{п}} + O(h).$$

С другой стороны, имеем

$$B_n = B[\bar{p}(x_n + sh)] + B[\tilde{p}(x_n + sh)] = \beta(\theta)p_{\text{л}} + (1 - \beta(\theta))p_{\text{п}} + O(h).$$

Сравнивая оба выражения для B_n , получим

$$\beta(\theta) - \theta = O(h).$$

Совершим предельный переход по последовательности сеток $S_{\bar{N}_k}$ при $\bar{N}_k \rightarrow \infty$ ($\bar{h}_k \rightarrow 0$), а затем по последовательности сеток $S_{\overline{\bar{N}}_k}$ при $\overline{\bar{N}}_k \rightarrow \infty$ ($\overline{\bar{h}}_k \rightarrow 0$) (см. [1]). В силу теоремы Чебышева [4] будем иметь

$$\beta_{\text{п}}(\theta_0) = \theta_0, \quad \beta_{\text{л}}(\theta_0) = \theta_0,$$

где θ_0 — любое число в интервале $(0, 1)$.

В силу положительности функционала B

$$\beta_{\text{п}}(\theta_0) - \beta(\theta_0) \geq 0, \quad \beta(\theta_0) - \beta_{\text{л}}(\theta_0) \geq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\beta_{\text{л}}(\theta_0) = \beta_{\text{п}}(\theta_0) = \theta_0.$$

Таким образом, характеристическая функция $\beta(s)$ функционала B непрерывна и равна $\beta(s) = s$ ($0 < s < 1$).

Аналогично, из условия $\varphi_{n+1} = O(1)$ находим

$$\alpha(s) = 1 + s \quad (-1 < s < 0),$$

т. е.

$$A[\bar{p}(s)] = \int_{-1}^0 \bar{p}(s) ds, \quad B[\bar{p}(s)] = \int_0^1 \bar{p}(s) ds.$$

Схема $L_h^{(p)}$ консервативна.

Требование

$$\bar{\Delta}(\xi, h) = O(h)$$

сводится к условию

$$\varphi_n + \varphi_{n+1} = O(h).$$

Подставляя сюда полные выражения для φ_n и φ_{n+1} из [1], получаем

$$\varphi_n + \varphi_{n+1} = (0,5 - \theta)[(Lu)_{\text{п}} - (Lu)_{\text{л}}] + O(h) = O(h).$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. Второй интегральный порядок точности в классе $Q_m(p)$ среди нормальных схем $L_h^{(p)}$ может иметь только одна схема

$$L_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{A_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i} \right] = \frac{1}{h^2} \Delta \left(\frac{1}{A_i} \nabla y_i \right), \quad (\alpha)$$

$$A_i = \int_0^1 p(x_i + sh) ds = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx.$$

Эта «наилучшая» схема консервативна [1]. Можно показать, что схема (α) в самом деле реализует второй порядок точности в $Q_m(p)$ для однородного уравнения $L_h^{(p)} y_i = 0$.

п. 4. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$L^{(p,q)} u = -f(x),$$

где

$$L^{(p,q)} u = L^{(p)} u - q(x)u = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right] - q(x)u \quad (0 \leq q(x) < M).$$

Для удобства изложения запишем это уравнение в виде

$$\mathcal{L}^{(p,q,f)} u = 0,$$

где

$$\mathcal{L}^{(p,q,f)} u = L^{(p,q)} u + f(x).$$

Ему соответствует разностное уравнение

$$\mathcal{L}_h^{(p,q,f)} y_i = L_h^{(p,q)} y_i + F_i^h = 0,$$

где

$$L_h^{(p,q)} y_i = L_h^{(p)} y_i - l_i^h y_i;$$

$$l_i^h = l[q(x_i + sh)];$$

$L_h^{(p)}$ — нормальная разностная схема (2); $l[\bar{q}(s)]$ — нормальный симметричный функционал, определенный на $Q_m(q)$ в интервале $-1/2 < s < 1/2$, а $F_i^h = F[f(x_i + sh)]$ обладает теми же свойствами, что и l_i^h .

Разностную схему $\mathcal{L}_h^{(p,q,f)}$, обладающую такими свойствами, будем также называть нормальной схемой.

Теорема 2. Для всякой сходящейся в классе

$$C_{m_p, m_q, m_f}(p, q, f) = \{C_{m_p}(p), C_{m_q}(q), C_{m_f}(f)\}$$

однородной линейной трехточечной разностной схемы $\tilde{L}_h^{(p, q, f)}$ можно указать нормальную схему $\mathcal{L}_h^{(p, q, f)}$, эквивалентную $\tilde{L}_h^{(p, q, f)}$ в смысле сходимости и имеющую тот же порядок точности.

Теорема 3. Второй интегральный порядок точности в классе

$$Q_{m_p, m_q, m_f}(p, q, f) = \{Q_{m_p}(p), Q_{m_q}(q), Q_{m_f}(f)\} \quad (m_p \geq 3, m_q \geq 2, m_f \geq 2)$$

среди нормальных разностных схем $\mathcal{L}_h^{(p, q, f)}$ может иметь только одна схема

$$\mathcal{L}_h^{(p, q, f)} y_i = L_h^{(p, q)} y_i + F_i^h, \quad L_h^{(p, q)} y_i = \frac{1}{h^2} \Delta \left(\frac{1}{A_i} \nabla y_i \right) - l_i^h y_i, \quad (\beta)$$

$$A_i = \int_{-1}^0 p(x_i + sh) ds = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx,$$

$$l_i^h = \frac{1}{h} \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x) dx, \quad F_i^h = \frac{1}{h} \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x) dx \quad (x_{i+0,5} = x_i + 0,5h).$$

Иными словами, пусть $u(x)$ — любое решение дифференциального уравнения $\mathcal{L}^{(p, q, f)} u = 0$; y_i — решение разностного уравнения $\mathcal{L}_h^{(p, q, f)} y_i = 0$, где $\mathcal{L}_h^{(p, q, f)}$ — нормальная схема; $z_i = y_i - u(x_i)$; $z(x, h)$ — полигональная функция. Если в классе $Q_{m_p, m_q, m_f}(p, q, f)$ имеет место оценка $z(x, h) = O(h^2)$, то, согласно теореме 3, нормальная схема $\mathcal{L}_h^{(p, q, f)}$ определена однозначно. Это и есть схема (β) .

п. 5. Покажем, что результат теоремы 1 не зависит от специальной формы записи дифференциального и разностного операторов. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L^{(k)} u = \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right].$$

Соответствующую ему однородную симметричную разностную схему запишем в виде

$$L_h^{(k)} y_i = \frac{1}{h^2} [b_i(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})], \quad (\bar{\alpha})$$

где

$$a_i = \Phi(l_1[\varphi(k(x_i + sh))]); \quad b_i = \Psi(l_2[\psi(k(x_i + sh))]);$$

$l_1[f(s)]$ и $l_2[f(s)]$ — нормальные функционалы на $Q_m(f)$ для $-1 < s < 1$.
Функции φ, ψ, Φ и Ψ имеют производные второго порядка, удовлетворяющие условию Липшица.

Теорема 4. Среди разностных схем вида $(\bar{\alpha})$ существует единственная схема

$$a_i = \left[\int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x_i + sh)} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)} dx \right]^{-1}, \quad b_i = a_{i+1}, \quad (\alpha')$$

которая может давать для однородного уравнения $L_h^{(k)} y_i = 0$ второй порядок точности в классе $Q_m(k)$, где $m \geq 3$.

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, что схема (α') и есть наилучшая p -линейная ($p = 1/k$) схема (α) .

З а м е ч а н и е 2. Схема

$$a_i = 2 \frac{k_{i-1,p} k_{i,l}}{k_{i-1,p} + k_{i,l}},$$

$$k_{i,l} = k(x_i - 0), \quad k_{i-1,p} = k(x_{i-1} + 0)$$

может давать второй порядок точности в $Q_m(k)$ только тогда, когда точка разрыва $\xi = x_n + \theta h$ коэффициента $k(x)$ совпадает либо с узловой точкой сетки ($\theta = 0$ или $\theta = 1$), либо находится посередине между соседними узловыми точками ($\theta = 0,5$).

Поступило 13 X 1958

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 124, № 3. — С. 529–532.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 4. — С. 562–565.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О представлении линейных функционалов в классе разрывных функций // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 2. — С. 188–191.
4. Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 1. — М.—Л.: 1944. — С. 271.

О НАИЛУЧШИХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ

А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

1°. Различные конечно-разностные методы, пригодные для решения определенного типа дифференциальных уравнений, могут различаться как по порядку их точности, так и по области применимости в зависимости от класса коэффициентов этих уравнений. Автоматизация вычислений, связанная с использованием быстродействующих счетных машин, настоятельно требует развития алгоритмов решения не отдельных задач, а классов задач. Так, например, желательно, чтобы одна и та же разностная схема позволяла решать задачи для дифференциальных уравнений как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов, не прибегая к явному выделению точек или линий разрыва. Это приводит нас к так называемым *однородным разностным схемам*, вычислительный алгоритм которых один и тот же для всех точек разностной сетки и для любых коэффициентов из данного класса (см. [1-4]). При этом может оказаться, что разностные схемы, сходящиеся в некотором классе коэффициентов, будут давать расходящийся результат в более широком классе коэффициентов. Например, разностная схема

$$L_h^{(k)} u_i = k_i \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \cdot \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad (1)$$

соответствующая дифференциальному оператору $L^{(k)}u = \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right]$, имеет второй порядок точности в классе достаточно гладких коэффициентов, но расходится при $h \rightarrow 0$ в классе разрывных коэффициентов $k(x) \in Q_m$.

2°. Пусть $Lu(x) = 0$ ($0 < x < 1$) — дифференциальное уравнение, а $L_h y_i = 0$ — соответствующие разностные уравнения на сетке

$$S_N = \left(x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_N = Nh = 1; h = \frac{1}{N} \right).$$

Если L и L_h — линейные операторы, то

$$L_h y_i = \sum_j a_{ij} y_j = 0.$$

Рассмотрим класс дифференциальных уравнений $L^{(k)}u = 0$, определяемый коэффициентами $k(x) = \{k_1(x), \dots, k_n(x)\}$ из некоторого функционального пространства \mathcal{K} (это может быть, например, пространство Q_m функций, кусочно-непрерывных и имеющих m кусочно непрерывных производных и др.). Разностный оператор $L_h^{(k)}$, определенный для всех $k(x) \in \mathcal{K}$, мы будем называть разностной схемой в классе функций \mathcal{K} .

Для линейных уравнений разностная схема $L_h^{(k)}$ определяется заданием матрицы-функционала (a_{ij}^h) , элементы которой являются функционалами над пространством \mathcal{K} коэффициентов $k(x)$.

3°. Вводятся понятия однородности и симметрии схемы.

1) Схема $L_h^{(k)}$ однородна, если она представляет единый во всех точках i сетки S_N и для любых $k(x) \in \mathcal{K}$ вычислительный алгоритм:

$$a_{ij}^h[k] = a_{j-i}^h[\bar{k}(s)], \quad \bar{k}(s) = k(x_i + sh), \\ -n_1 \leq j - i \leq n_2, \quad n_1 \geq 0, \quad n_2 \geq 0.$$

2) Однородная схема $L_h^{(k)}$ симметрична, если

$$n_1 = n_2, \quad a_{j-i}^h[k(x_i + sh)] = a_{i-j}^h[k(x_i - sh)].$$

При этом разностный оператор L_h не меняется при изменении направления оси x . Кроме того, естественно требовать, чтобы разностная задача была определенной, т. е. разрешимой на любой сетке S_N и для любого $k(x) \in \mathcal{K}$ (см. [1]).

4°. Порядок аппроксимации оператора L_h относительно L характеризуется разностью $\varphi_i^h = L_h u_i - (Lu)_i$.

Мы будем говорить, что разностная схема $L_h^{(k)} y_i$ сходится в классе \mathcal{K} , если для $k(x) \in \mathcal{K}$ решение уравнения $L_h y_i = 0$ сходится на любой последовательности сеток S_N при $h \rightarrow 0$ к соответствующему решению $u(x)$ дифференциального уравнения $L^{(k)}u = 0$.

Если

$$\max_{(i)} |y_i - u(x_i)| < Ch^n,$$

то мы говорим, что разностная схема $L_h^{(k)}$ имеет n -й (интегральный) порядок точности.

Ставится задача отыскания наилучших однородных схем, сходящихся в наиболее широком классе коэффициентов и обладающих там наивысшей точностью.

5°. Рассматривается первая краевая задача для класса уравнений

$$\left. \begin{aligned} L^{(k,q,f)}u &= [k(x)u'(x)]' - q(x)u + f(x) = 0 \quad (0 < x < 1), \\ u(0) &= \bar{u}, \quad u(1) = \bar{\bar{u}}, \quad (k(x) \geq k_0 > 0, \quad q(x) \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

в классе коэффициентов

$$Q_{m_k, m_q, m_f}^{(k,q,f)} = \{Q_{m_k}(k), Q_{m_q}(q), Q_{m_f}(f)\}.$$

Соответствующие однородные разностные схемы берутся в виде

$$L_h^{(k,q,f)} = \frac{1}{h^2} [B_i^h(y_{i+1} - y_i) - A_i^h(y_i - y_{i-1})] - D_i^h y_i + F_i^h, \quad (3)$$

где

$$A_i^h = A^h[\bar{k}(s)], \quad B_i^h = B^h[\bar{k}(s)], \quad \bar{k}(s) = k(x_i + sh), \quad -1 < s < 1,$$

$$D_i^h = D^h[q(x_i + sh)], \quad F_i^h = F^h[f(x_i + sh)], \quad -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2},$$

$A^h[\bar{k}(s)], B^h[\bar{k}(s)], D^h[\bar{q}], F^h[\bar{f}]$ — функционалы, определенные над Q_{m_k, m_q, m_f} .

Устанавливается необходимое условие сходимости и второго порядка точности схемы $L_h^{(k,q,f)}$ в классе кусочно-непрерывных коэффициентов.

Пусть $\xi = x_n + \theta h$ ($0 \leq \theta \leq 1, x_n = nh$) — точка разрыва коэффициентов $k(x), q(x)$ и $f(x)$.

Необходимое условие сходимости имеет вид

$$\Delta_n = (A_{n+1}^h \varphi_n^h + B_n^h \varphi_{n+1}^h) h = \rho(h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0 \quad (4)$$

или

$$\frac{B_n^h B_{n+1}^h}{k_n} - \frac{A_n^h A_{n+1}^h}{k_n} = \rho(h), \quad k_n = (\xi + 0), \quad k_n = (\xi - 0). \quad (5)$$

Необходимые условия второго порядка точности для схемы $L_h^{(k,q,f)}$ имеют вид:

$$\varphi_n^h = O(1), \quad \Delta_n = O(h^2). \quad (6)$$

Заметим, что для схемы (1) $\Delta_n = O(1)$, т. е. эта схема не удовлетворяет необходимому условию сходимости в классе $Q_m(k)$.

Функционалы A, B, D и F могут быть, например, линейными. При этом оказалось необходимым обобщить теорему Рисса о представлении линейных функционалов в классе непрерывных функций на случай кусочно-непрерывных функций $f(x) \in Q_m$ (см. [5]).

Среди нормальных разностных схем (3) найден класс схем, удовлетворяющих необходимому условию сходимости (квазиконсервативные схемы). Всякая консервативная ($B_i = A_{i+1}$) схема также удовлетворяет условию (4).

6°. Рассматривается однородная симметричная разностная схема

$$L_h^{(k)} y_i = \frac{1}{h^2} [B_i^h (y_{i+1} - y_i) - A_i^h (y_i - y_{i-1})], \quad (7)$$

соответствующая уравнению

$$L^{(k)} u = [k(x)u'(x)]' = 0.$$

Здесь

$$A_i^h = \Phi(l_1[\varphi(k(x_i + sh))]), \quad B_i^h = \Psi(l_2[\psi(k(x_i + sh))]),$$

а $l_1[f(s)], l_2[f(s)]$ — нормальные (т. е. линейные, регулярные, положительные ($l[f] > 0$ при $f \geq \varepsilon > 0$) и независимые от h (см. [4])) функционалы для $-1 < s < 1$. Функции φ, ψ, Φ и Ψ имеют производные второго порядка, удовлетворяющие условию Липшица.

Теорема 1. Если разностная схема вида (7) имеет в классе $Q_m(k)$, $m \geq 3$ второй порядок точности, то она определена однозначно:

$$L_h^{(k)} y_i = \frac{1}{h^2} \Delta(A_i \nabla y_i) = \frac{1}{h^2} [A_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - A_i(y_i - y_{i-1})], \quad (8)$$

$$A_i = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1} \quad (B_i = A_{i+1} \text{ см. [4]}). \quad (9)$$

Эта схема не только может иметь, но и в самом деле имеет второй порядок точности в $Q_m(k)$, $m \geq 3$ (см. п. 7).

7°. Рассмотрим однородную схему

$$L_h^{(k,q,f)} y_i = L_h^{(k)} y_i - D_i^h y_i + F_i^h, \quad (10)$$

где $L_h^{(k)} y_i$ есть схема (8), а $D[\bar{q}]$ и $F[\bar{f}]$ — нормальные симметричные ($F[\bar{f}(-s)] = F[\bar{f}(s)]$) функционалы, определенные для $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$.

Теорема 2. Если разностная схема вида (10) имеет в классе $Q_{m_k, m_q, m_f}(k, q, f)$ второй порядок точности, то она определена однозначно

$$L_h^{(k, q, f)} y_i = \frac{1}{h^2} \Delta(A_i \nabla y_i) - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) dx \cdot y_i + \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx, \quad (11)$$

где

$$A_i = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1}, \quad x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{1}{2}h.$$

Теорема 3. Разностная схема (11) в классе $Q_{m_k, m_q, m_f}(k, q, f)$ для $m_k \geq 3$, $m_q \geq 2$, $m_f \geq 2$ имеет второй порядок точности, т. е. является наилучшей схемой (см. [4]).

8°. Применение наилучшей разностной схемы для решения задачи Штурма–Лиувилля позволяет определять собственные значения и собственные функции с точностью до второго порядка относительно h в классе разрывных коэффициентов.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 108, № 3. — С. 393–396.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 4. — С. 562–565.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об одной наилучшей однородной разностной схеме // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 124, № 4. — С. 779–782.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 124, № 3. — С. 529–532.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О представлении линейных функционалов в классе разрывных функций // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 2. — С. 188–191.

ОБ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Член-корреспондент АН СССР А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

п. 1. Настоящая работа посвящена построению точной разностной схемы и разностных схем любого порядка точности для краевых задач 1-го, 2-го и 3-го рода для дифференциального уравнения

$$L^{(p,q,f)}u = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right] - q(x)u + f(x) = 0 \quad (0 < x < 1), \quad (1)$$

где $0 < K_1 \leq p(x) \leq K_2$, $0 \leq q(x) \leq K_2$.

Все указанные схемы относятся к семейству однородных трехточечных консервативных разностных схем [1, 2] вида

$$L_h^{(p,q,f)}y_i = \frac{1}{h^2} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{A_i^h} \right) - D_i^h y_i + \Phi_i^h, \quad (2)$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \nabla y_i = y_i - y_{i-1} \quad (h = 1/N, x_i = ih);$$

$$A_i^h = A^h[p(x_i + sh), q(x_i + sh)] \quad (-1 < s < 0);$$

$$D_i^h = D^h[p(x_i + sh), q(x_i + sh)] \quad (-1 < s < 1);$$

$$\Phi_i^h = \Phi^h[p(x_i + sh), q(x_i + sh), f(x_i + sh)] \quad (-1 < s < 1),$$

$A^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s)]$, $D^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s)]$, $\Phi^h = \Phi^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s)]$ — некоторые нелинейные функционалы, вычисляемые при помощи квадратур для схем конечного порядка точности.

п. 2. Дадим конструкцию точной схемы. Введем местную систему координат, положив $s = 1/h(x - x_i)$, $x_i = ih$. Тогда интервал (x_{i-1}, x_{i+1}) преобразуется в интервал $-1 < s < 1$, а уравнение (1) примет вид

$$L^* \bar{u} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\bar{p}(s)} \frac{d\bar{u}}{ds} \right] - h^2 \bar{q}(s) \bar{u}(s) = -h^2 \bar{f}(s), \quad (3)$$

где $\bar{p}(s) = p(x_i + sh)$ и т. д.

Для построения точной схемы достаточно установить соотношение, связывающее значения $\bar{u}(s)$ при $s = -1, 0, 1$; это возможно, так как решение уравнения второго порядка на интервале определяется заданием значений искомой функции на концах этого интервала.

Общее решение уравнения (3) представимо в виде

$$\bar{u}(s) = \frac{\alpha(s; h)}{\alpha(1; h)} \bar{u}(1) + \frac{\beta(s; h)}{\beta(1; h)} \bar{u}(-1) + h^2 \gamma(s; h), \quad (4)$$

где $\alpha(s; h) = v_1$ и $\beta(s; h) = v_2$ — два линейно независимых решения однородного уравнения

$$\begin{aligned} L^* v = 0, \quad \alpha(-1; h) = 0, \quad \alpha'(-1; h) = \bar{p}(-1), \\ \beta(1; h) = 0, \quad \beta'(1; h) = -\bar{p}(1), \end{aligned} \quad (5)$$

а $\gamma(s; h) = v_3$ — решение неоднородного уравнения

$$L^* \gamma = -\bar{f}(s), \quad \gamma(-1; h) = \gamma(1; h) = 0. \quad (6)$$

Полагая в (4) $s = 0$, приходим к формуле

$$\bar{u}(0) = P^h \bar{u}(-1) + Q^h \bar{u}(1) + R^h, \quad (7)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} P^h = \frac{\beta(0; h)}{\beta(-1; h)} = P^h[\bar{p}(s); \bar{q}(s)], \quad Q^h = \frac{\alpha(0; h)}{\alpha(1; h)} = Q^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s)], \\ R^h = h^2 \gamma(0; h) = R^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s); \bar{f}(s)] \end{aligned} \quad (8)$$

являются функционалами коэффициентов уравнения (3).

Возвращаясь к старым переменным, получим разностные уравнения

$$u_i = P_i^h u_{i-1} + Q_i^h u_{i+1} + R_i^h, \quad 0 < i < N, \quad u_0 = \mu_1, \quad u_N = u(1) = \mu_2, \quad (9)$$

которым удовлетворяет решение $u = u(x)$ дифференциального уравнения (1). Здесь

$$\begin{aligned} u_i = u(x_i), \quad P_i^h = P^h[\bar{p}_i(s), \bar{q}_i(s)], \quad Q_i^h = Q^h[\bar{p}_i(s), \bar{q}_i(s)], \\ R_i^h = R^h[\bar{p}_i(s), \bar{q}_i(s), \bar{f}_i(s)], \quad \bar{p}_i(s) = p(x_i + sh), \quad \bar{q}_i(s) = q(x_i + sh), \\ \bar{f}_i(s) = f(x_i + sh). \end{aligned}$$

Функции $\alpha(s; h)$, $\beta(s; h)$ и $\gamma(s; h)$, при помощи которых конструируются функционалы P^h , Q^h , R^h для точной схемы, мы в дальнейшем будем называть *шаблонными функциями*.

п. 3. Рассмотрим теперь краевое условие 3-го рода при $x = 0$:

$$u'(0)/p(0) - \sigma u(0) = \mu_1 \quad (10)$$

и найдем его разностный эквивалент.

Рассматривая интервал $(0; h)$, представляя затем общее решение уравнения (3) в интервале $(0 < s < 1)$ через шаблонные функции $\alpha^*(s; h)$, $\beta(s; h)$, $\gamma^*(s; h)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} L^* \alpha^* = L^* \beta = 0, \quad L^* \gamma^* = -\bar{f}(s), \quad \alpha^*(0; h) = \gamma^*(0; h) = 0, \\ \beta(1; h) = \gamma^*(1; h) = 0; \quad \alpha^{*'}(0; h) = \bar{p}(0); \quad \beta'(1; h) = -\bar{p}(1), \end{aligned} \quad (11)$$

и требуя, чтобы выполнялось условие (10), в результате приходим к точному двухточечному разностному краевому условию 3-го рода

$$u_0 = a_1 u_1 + b_1, \quad (12)$$

$$a_1 = \left\{ 1 + h \left[\sigma + h \int_0^1 q(sh) \beta^0(s; h) ds \right] \right\}^{-1},$$

$$b_1 = h \left[\mu_1 - \frac{h \gamma^{*'}(0; h)}{p(0)} \right] \alpha_1 \beta(0; h).$$

Индекс нуль сверху (например β^0) означает, что шаблонные функции берутся для коэффициентов $\bar{p}_0(s) = p(sh)$, $\bar{q}_0(s) = q(sh)$, $\bar{f}_0(s) = f(sh)$.

п. 4. Преобразуем разностное уравнение (7) или (9). Для этого используем ряд свойств шаблонных функций $\alpha(s; h)$ и $\beta(s; h)$:

$$1) \alpha(s; h) > 0, \quad \beta(s; h) > 0 \text{ при } -1 < s < 1, \text{ если } \bar{q}(s) \geq 0; \quad (13)$$

$$2) \alpha(1; h) = \beta(-1; h); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 3) \alpha(1; h) - \alpha(0; h) - \beta(0; h) = h^2 \left\{ \beta(0; h) \int_{-1}^0 \bar{q}(s) \alpha(s; h) ds + \right. \\ \left. + \alpha(0; h) \int_0^1 \bar{q}(s) \beta(s; h) ds \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) устанавливаются при помощи второй формулы Грина с учетом условий (5).

В силу условий (14) и (15) равенство (7) можно записать так:

$$\frac{1}{h^2} \left[\frac{\bar{u}(1) - \bar{u}(0)}{\beta(0; h)} - \frac{\bar{u}(0) - \bar{u}(-1)}{\alpha(0; h)} \right] - \bar{u}(0) \left\{ \frac{1}{\alpha(0; h)} \int_{-1}^0 \bar{q}(s) \alpha(s; h) ds + \frac{1}{\beta(0; h)} \int_0^1 \bar{q}(s) \beta(s; h) ds \right\} + \frac{\alpha(1; h)}{\alpha(0; h) \beta(0; h)} \gamma(0; h) = 0. \quad (16)$$

Положим $\bar{p}_i(s) = p(x_i + sh)$ и т. д. и обозначим $\alpha_i(s; h)$, $\beta_i(s; h)$, $\gamma_i(s; h)$, полученные в результате такой замены функции α , β и γ . Нетрудно показать, что

$$\beta_i(0; h) = \alpha_{i+1}(0; h). \quad (17)$$

В результате мы получаем консервативную схему (2), где

$$A_i^h = \alpha_i(0; h) = A^h[\bar{p}_i(s), \bar{q}_i(s)]; \quad (18)$$

$$\bar{p}_i(s) = p(x_i + sh); \quad \bar{q}_i(s) = q(x_i + sh);$$

$$D_i^h = \frac{1}{A_i^h} \int_{-1}^0 \bar{q}_i(s) \alpha_i(s; h) ds + \frac{1}{A_{i+1}^h} \int_0^1 \bar{q}_i(s) \beta_i(s; h) ds; \quad (19)$$

$$\Phi_i^h = \left(h^2 D_i^h + \frac{1}{A_i^h} + \frac{1}{A_{i+1}^h} \right) \gamma_i(0; h). \quad (20)$$

Условие (17), очевидно, есть условие консервативности $B_i^h = A_{i+1}^h$ (см. [2]). Уравнение

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = 0,$$

определяемое формулами (2), (18), (19) и (20), по построению эквивалентно уравнению (9).

Таким образом, установлено, что точная схема $L_h^{(p,q,f)}$ является однородной, трехточечной, консервативной разностной схемой.

п. 5. Шаблонные функции $\alpha(s; h)$, $\beta(s; h)$, $\gamma(s; h)$ являются целыми аналитическими функциями от h^2 :

$$\begin{aligned}\alpha(s; h) &= \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \alpha^{(2k)}(s) = \alpha^{(0)}(s) + h^2 \alpha^{(2)}(s) + \dots + h^{2k} \alpha^{(2k)}(s) + \dots, \\ \beta(s; h) &= \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \beta^{(2k)}(s), \quad \gamma(s; h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \gamma^{(2k)}(s).\end{aligned}\tag{21}$$

Учитывая условия (5) и (6), находим

$$\begin{aligned}\alpha^{(0)}(s) &= \int_{-1}^s \bar{p}(s) ds, \quad \beta^{(0)}(s) = \int_s^1 \bar{p}(s) ds, \\ \alpha^{(2k+2)}(s) &= \int_{-1}^s \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^t \bar{q}(\lambda) \alpha^{(2k)}(\lambda) d\lambda \right] dt, \\ \beta^{(2k+2)}(s) &= \int_s^1 \bar{p}(t) \left[\int_t^1 \bar{q}(\lambda) \beta^{(2k)}(\lambda) d\lambda \right] dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \\ \gamma^{(2k)}(s) &= \left[\int_{-1}^1 \bar{p}(t) dt \right]^{-1} \cdot \left\{ \int_{-1}^1 \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^t \eta^{(2k)}(\lambda) d\lambda \right] dt \cdot \int_{-1}^s \bar{p}(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-1}^s \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^t \eta^{(2k)}(\lambda) d\lambda \right] dt \cdot \int_{-1}^1 \bar{p}(t) dt \right\},\end{aligned}\tag{23}$$

где $\eta^{(0)}(\lambda) = \bar{f}(\lambda)$, $\eta^{(2k)}(\lambda) = \bar{q}(\lambda) \gamma^{(2k-2)}(\lambda)$ при $k = 1, 2, \dots$

Таким образом, каждый из коэффициентов $\alpha^{(2k)}$, $\beta^{(2k)}$, $\gamma^{(2k)}$ выражается при помощи $(k+1)$ -кратного интегрирования через $\bar{p}(s)$, $\bar{q}(s)$ и $\bar{f}(s)$.

п. 6. Возникает вопрос: если в (21) ограничиться конечным числом слагаемых, т. е. вместо рядов взять полиномы

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)}(s, 2m; h) &= \alpha^{(0)}(s) + h^2 \alpha^{(2)}(s) + \dots + h^{2m} \alpha^{(2m)}(s), \\ \Pi^{(2)}(s, 2m; h) &= \beta^{(0)}(s) + h^2 \beta^{(2)}(s) + \dots + h^{2m} \beta^{(2m)}(s), \\ \Pi^{(3)}(s, 2m; h) &= \gamma^{(0)}(s) + h^2 \gamma^{(2)}(s) + \dots + h^{2m} \gamma^{(2m)}(s),\end{aligned}\tag{24}$$

то какой интегральный порядок точности по h будет иметь построенная при помощи шаблонов $\Pi^{(j)}(s, 2m; h)$ ($j = 1, 2, 3$) разностная схема $L_h^{2m(p,q,f)}$? Такую схему мы будем называть *усеченной разностной схемой ранга $2m$* .

Мы будем рассматривать пока первую краевую задачу

$$L_h^{2m(p,q,f)} y_i = \frac{1}{h^2} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{2m_i h} \right) - D_i^{2m} y_i + \Phi_i^{2m} = 0, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2. \quad (25)$$

Коэффициенты усеченной схемы (25) определяются по (18)–(20), следует заменить α, β, γ шаблонными функциями $\Pi^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$).

Теорема. *Усеченная схема $2m$ -го ранга имеет для 1-й краевой задачи (25) $(2m + 2)$ -й интегральный порядок точности, если коэффициенты $p(x), q(x), f(x)$ дифференциального уравнения (1) принадлежат классу кусочно-непрерывных функций Q_0 , причем*

$$0 < K_1 \leq p(x) \leq K_2, \quad 0 \leq q(x) \leq K_2, \quad |f(x)| \leq K_2.$$

Эта теорема легко обобщается на случай краевых условий 2-го и 3-го рода, если ввести понятие усеченного разностного краевого условия $2m$ -го ранга. Из теоремы, в частности, следует, что усеченная схема нулевого ранга имеет 2-й интегральный порядок точности в Q_0 (ср. [3]). Усеченные схемы являются полезным аппаратом для построения дискретных схем повышенного порядка точности.

п. 7. Если разностная сетка $S_N = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_N = 1\}$ неравномерна и $h = \max h_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, то и в этом случае может быть построена точная трехточечная схема и усеченные схемы любого ранга, для которых имеет место теорема п. 6.

Поступило 4 XII 1959

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О представлении линейных функционалов в классе разрывных функций // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 2. — С. 188–191.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 124, № 3. — С. 529–532.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об одной наилучшей однородной разностной схеме // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 124, № 4. — С. 779–782.

О КАНОНИЧЕСКИХ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ

Член-корреспондент АН СССР А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

п. 1. В статьях [1-3] рассматривались однородные трехточечные разностные схемы для решения класса краевых задач

$$L^{(k,q,f)}u = \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2, \quad (1)$$

$$0 < K_1 \leq k(x) \leq K_2, \quad 0 \leq q(x) \leq K_2, \quad |f(x)| \leq K_2,$$

зависящего от выбора коэффициентов $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ из некоторого функционального семейства.

Пусть $S_N = \{x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_i = ih, \dots, x_N = Nh = 1\}$ — равномерная разностная сетка. Мы будем рассматривать однородные трехточечные разностные схемы вида

$$L_h^{(k,q,f)}y_i = L_h^{(k)}y_i - D_i^{(h,q)}y_i + F_i^{(h,f)},$$

$$L_h^{(k)}y_i = \frac{1}{h^2} \left[B_i^{(h,k)}(y_{i+1} - y_i) - A_i^{(h,k)}(y_i - y_{i-1}) \right]. \quad (2)$$

Однородность схемы означает, что ее коэффициенты имеют вид

$$A_i^{(h,k)} = A^h[\bar{k}_i(s)], \quad B_i^{(h,k)} = B^h[\bar{k}_i(s)], \quad \bar{k}_i(s) = k(x_i + sh), \quad -1 < s < 1,$$

$$D_i^{(h,q)} = D^h[q(x_i + sh)], \quad F_i^{(h,f)} = F^h[f(x_i + sh)], \quad -0,5 < s < 0,5,$$

где A^h , B^h , D^h и F^h — некоторые, вообще говоря, нелинейные, функционалы, определенные на множестве кусочно-непрерывных функций Q_0 и параметрически зависящие от шага сетки h .

Исходное семейство разностных схем определяется заданием класса функционалов, при помощи которых вычисляются коэффициенты схемы.

и. 2. Класс функционалов $A^h[\psi(s)]$ мы зададим при помощи условий:

(**A₁**). Функционал $A^h[\psi]$ имеет дифференциал 3-го порядка по h , так что

$$A^h[\psi] = A^{(0)}[\psi] + hA^{(1)}[\psi] + h^2A^{(2)}[\psi] + h^3A^{(3)}[\psi] + h^3\rho(h),$$

где $\rho(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, а функционал $A^{(m)}[\psi]$ имеет дифференциал порядка $3 - m$ ($m = 0, 1, 2, 3$), так что можно, например, для $m = 1$ написать

$$A^{(1)}[f + \delta\varphi] = A^{(1)}[f] + \delta A_1^{(1)}[f, \varphi] + \delta^2 A_2^{(1)}[f, \varphi] + \delta^2 \rho(\delta),$$

где $\rho(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

(**A₂**). $A^h[\varphi]$ и все функционалы $A^{(m)}[\psi]$ ($m = 0, 1, 2, 3$) являются однородными функционалами 1-й степени:

$$A^h[c\psi] = cA^h[\psi], \quad \text{где } c > 0 \text{ — постоянная;}$$

$$A^{(m)}[c\psi] = cA^{(m)}[\psi], \quad \text{причем } A^h[1] = 1.$$

(**A₃**). $A^h[\psi]$ и все функционалы $A^{(m)}[\psi]$ ($m = 0, 1, 2, 3$) являются монотонно неубывающими, т. е.

$$A^h[\psi_2] \geq A^h[\psi_1], \quad \text{если } \psi_2 \geq \psi_1.$$

Мы будем предполагать, что функционалы A^h , B^h , D^h и F^h удовлетворяют условиям (**A₁**), (**A₂**), (**A₃**), причем D^h и F^h линейны.

Из условий (**A₁**) и (**A₂**) следует, что

$$\begin{aligned} A^h[k(x + sh)] &= k(x) + hk'(x)A_1^{(0)}[s] + \\ &+ h^2 \left\{ k'(x)A_1^{(1)}[s] + \frac{(k'(x))^2}{k(x)}A_2^{(0)}[s] + \frac{k''(x)}{2}A_1^{(0)}[s^2] \right\} + O(h^3), \end{aligned} \quad (3)$$

где $A^{(m)}[\psi(s)] = A^{(m)}[1, \psi(s)]$.

Отметим, что в работах [2, 3] изучался более узкий класс функционалов и, следовательно, более узкое исходное семейство разностных схем.

п. 3. Если функционал $A^h[\psi]$ не зависит от параметра h , то он называется каноническим и обозначается $A[\psi]$. Разностная схема $L_h^{(k,q,f)}$, коэффициенты которой определяются через канонические функционалы, называется канонической схемой.

Если выполнено условие

$$B_i^{(h,k)} = A_{i+1}^{(h,k)}, \quad \text{т. е.} \quad B^h[\psi(s)] = A^h[\psi(s+1)] \quad (4)$$

для любой функции из Q_0 , то разностная схема $L_h^{(k)}$ (и $L_h^{(k,q,f)}$) называется консервативной; ее можно записать так:

$$L_h^{(k)} y_i = \frac{1}{h^2} \Delta(A_i^{(h,k)} \nabla y_i), \quad \text{где} \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \nabla y_i = y_i - y_{i-1}. \quad (5)$$

Из условия (4) следует, что функционал $A^h[\psi(s)]$ не зависит от значений $\psi(s)$ при $0 < s < 1$, а $B^h[\psi(s)]$ не зависит от значений $\psi(s)$ при $-1 < s < 0$.

п. 4. Одной из характеристик разностной схемы является ее интегральный порядок точности по h , т. е. порядок точности разности $z_i = y_i - u(x_i)$ при $h \rightarrow 0$, где $u(x)$ — решение задачи (1), а y_i — решение разностной краевой задачи

$$L_h^{(k,q,f)} y_i = 0, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2. \quad (6)$$

Функция z_i определяется условиями

$$L_h^{(k,q)} z_i = -\varphi_i, \quad z_0 = 0, \quad z_N = 0, \quad (7)$$

где $\varphi_i = \varphi(x_i, h; u(x_i))$.

Напомним, что разность $\varphi(x, h; v) = L_h^{(k,q,f)} v - L^{(k,q,f)} v$, где $v = v(x)$ — любая достаточно гладкая функция, называется погрешностью аппроксимации схемы.

Если $v = u(x)$ есть решение дифференциального уравнения (1), то мы будем говорить о погрешности аппроксимации $\varphi(x, h; u)$ на решении дифференциального уравнения. Может оказаться, вообще говоря, что порядок погрешности аппроксимации схемы на решении выше порядка аппроксимации на классе гладких функций $v(x)$.

В настоящей работе мы изучаем порядок точности разностных схем исходного семейства в классе C_m функций, имеющих непрерывную производную m -го порядка [1].

Порядок аппроксимации схемы $L_h^{(k,q,f)}$ определяется значениями моментов функционалов A^h, B^h, D^h и F^h .

Необходимое и достаточное условие 1-го порядка аппроксимации схемы $L_h^{(k,q,f)}$ имеет вид

$$B_1^{(0)}[s] - A_1^{(0)}[s] = 1. \quad (8)$$

Чтобы схема имела 2-й порядок аппроксимации ($\varphi(x, h; v) = O(h^2)$), необходимо и достаточно выполнение условий

$$B_1^{(0)}[s] = -A_1^{(0)}[s] = 0,5, \quad B_1^{(1)}[s] = A_1^{(1)}[s]; \quad (9)$$

$$B_2^{(0)}[s] = A_2^{(0)}[s], \quad B_1^{(0)}[s^2] = A_1^{(0)}[s^2], \quad D^{(0)}[s] = F^{(0)}[s] = 0. \quad (10)$$

Условия (10) для симметричной схемы выполняются автоматически. При этом существенную роль играют условия нормировки, например $A^h[1] = 1$, из которого следует, что $A^{(0)}[1] = 1$, $A^{(m)}[1] = 0$ при $m > 0$.

п. 5. Можно сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1. Для того чтобы исходная схема $L_h^{(k,q,f)}$ имела n -й ($n = 1, 2$) интегральный порядок точности в $C_{m_k, m_q, m_f} = \{C_{m_k}, C_{m_q}, C_{m_f}\}$, $m_k \geq n + 1$, $m_q \geq n$, $m_f \geq n$, необходимо и достаточно, чтобы она имела n -й порядок аппроксимации¹⁾.

Теорема 2. Любая консервативная схема из исходного класса имеет 1-й интегральный порядок точности в C_{m_k, m_q, m_f} для $m_k \geq 2$, $m_q \geq 1$, $m_f \geq 1$.

Теорема 3. Любая каноническая симметричная консервативная схема имеет 2-й порядок точности в C_{m_k, m_q, m_f} для $m_k \geq 3$, $m_q \geq 2$, $m_f \geq 2$.

п. 6. Наряду с изучением точности разностных схем для решения некоторого класса задач, надо уметь оценивать погрешность, допускаемую при решении по данной схеме каждой индивидуальной задачи из рассматриваемого класса. Такая оценка точности может быть достигнута путем изучения

¹⁾Условия дифференцируемости коэффициентов $k(x), q(x)$ и $f(x)$ могут быть существенно ослаблены. Этот вопрос будет рассмотрен в других статьях.

асимптотики решения разностной краевой задачи при $h \rightarrow 0$. Прежде всего надо найти разложения по h (асимптотику) погрешности аппроксимации $\varphi(x, h; v) = L_h v - Lv$.

Ограничимся здесь вычислением коэффициента при наименьшей степени h для канонической консервативной схемы. Вводя $p(x) = 1/k(x)$, будем вместо $L_h^{(k)}$ писать

$$L_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{A_i} \right), \quad A_i = A[p(x_i + sh)],$$

где $A[\psi]$ — канонический функционал. Если $L_h^{(p,q,f)}$, кроме того, симметричная схема, то

$$\varphi(x, h; v) = h^2 \Phi(x, v) + O(h^4),$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, v) = \frac{1}{12} \left\{ \left[\frac{(pL^{(p)}v)'}{p} \right]' - 12A_2[s] \left[\frac{(p')^2 v'}{p^3} \right]' - \right. \\ \left. - 6 \left[\frac{p'' v'}{p^2} \right]' \left(A_1[s^2] - \frac{1}{3} \right) + 6(F[s^2]f'' - D[s^2]q''v) \right\}, \end{aligned}$$

$$L^{(p)}v = \left(\frac{v'}{p} \right)'.$$

В случае наилучшей канонической схемы (см. [3])

$$A[\psi] = \int_{-1}^0 \psi(s) ds, \quad D[\psi] = F[\psi] = \int_{-0,5}^{0,5} \psi(s) ds$$

имеем

$$A_1[s^2] = \frac{1}{3}, \quad A_2[s] = 0, \quad D[s^2] = F[s^2] = \frac{1}{12},$$

и выражение для Φ сильно упрощается.

Будем говорить, что разностные схемы $L_h^{(p,q,f)}$ и $\bar{L}_h^{(p,q,f)}$ асимптотически эквивалентны в смысле аппроксимации, если $\Phi(x, v) = \bar{\Phi}(x, v)$ и, следовательно, $\varphi(x, h; v) - \bar{\varphi}(x, h; v) = O(h^4)$.

В нашем случае это значит, что

$$A_2[s] = \bar{A}_2[s], \quad A_1[s^2] = \bar{A}_1[s^2], \quad D[s^2] = \bar{D}[s^2], \quad F[s^2] = \bar{F}[s^2].$$

В частности, схема $\bar{L}_h^{(p)}$, у которой

$$\bar{A}_i = \frac{1}{3}(p_{i-1} + p_{i-0,5} + p_i),$$

асимптотически эквивалентна наилучшей канонической схеме $L_h^{(p)}$, для которой

$$A_i = \int_{-1}^0 p(x_i + sh) ds.$$

п. 7. Пользуясь асимптотикой для $\varphi(x, h; v)$, нетрудно получить асимптотическое разложение по h решения разностной краевой задачи (6) в виде

$$y_i = u(x_i) + h^2 \tilde{z}(x_i) + O(h^4),$$

где $\tilde{z}(x)$ — функция, определяемая из условий

$$L^{(p,q)} \tilde{z} = -\Phi(x, u), \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}(1) = 0.$$

п. 8. Изучение асимптотики погрешности аппроксимации позволяет указать метод построения разностных схем повышенной точности. Рассматривая для схемы L_h , соответствующей линейному дифференциальному оператору L , асимптотику

$$\varphi(x, h; u) = h^n \Phi u + \dots$$

и заменяя дифференциальный оператор Φu разностным оператором $\Phi_h u$, мы получим разностную схему

$$\tilde{L}_h u = L_h u - h^n \Phi_h u,$$

которая имеет более высокий порядок аппроксимации (выше n) на решении $u = u(x)$ уравнения $Lu = 0$ по сравнению со схемой L_h . Оператор $\Phi_h u$ целесообразно предварительно преобразовать к оператору более низкого порядка, используя для этого уравнения $Lu = 0$. При этом можно добиться того, что оператор \tilde{L}_h будет иметь ту же область определения, что и оператор L_h .

В нашем случае применение этого метода позволяет строить различные трехточечные разностные схемы $\tilde{L}_h^{(p,q,f)}$ повышенного порядка точности.

Так, например, если $L_h^{(p,q,f)}$ — наилучшая каноническая схема или схема, ей асимптотически эквивалентная, то трехточечная однородная схема

$$\begin{aligned} \tilde{L}_h^{(p,q,f)} y_i &= L_h^{(p)} \left(1 - \frac{h^2}{12} p_i q_i \right) y_i - \tilde{D}_i y_i + \tilde{F}_i = \\ &= L_h^{(p,q,f)} y_i - \frac{h^2}{12} \left[L_h^{(p)} (p_i q_i y_i - p_i f_i) + \frac{1}{2} (L_h^{(1)} f_i - y_i L_h^{(1)} q_i) \right] \end{aligned}$$

имеет 4-й интегральный порядок точности в классе гладких коэффициентов.

п. 9. Пусть при $x = 0$ задано краевое условие 3-го рода

$$lu = \frac{u'(0)}{p(0)} - \sigma u(0) = \mu_1.$$

Для соответствующего разностного краевого оператора l можно рассматривать погрешность аппроксимации как на любой достаточно гладкой функции $v = v(x)$, так и на решении дифференциального уравнения $L^{(p,q,f)} u = 0$. По аналогии с п. 8 можно построить двухточечный разностный краевой оператор \tilde{l}_h любого порядка аппроксимации на решении $u = u(x)$. Например, оператор

$$l_h y = \frac{1}{h A_1} (y_1 - y_0) - y_0 (\sigma + 0,5 h q_0) + 0,5 h f_0, \quad A_1 = A[p(x_1 + sh)]$$

имеет 2-й порядок аппроксимации на решении (ср. с [4])

$$\tilde{l}_h u - lu = O(h^2).$$

Можно показать, что решение разностной краевой задачи

$$\tilde{L}_h^{(p,q,f)} y_i = 0, \quad \tilde{l}_h y_i = \mu_1, \quad y_N = \mu_2$$

имеет n -й порядок точности, т. е.

$$y_i - u(x_i) = O(h^n),$$

если операторы \tilde{L}_h и $\tilde{L}_h^{(p,q,f)}$ имеют n -й порядок аппроксимации на решении $u = u(x)$ уравнения

$$L^{(p,q,f)}u = 0.$$

Поступило 31 XII 1959

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 4. — С. 562–565.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 124, № 3. — С. 529–532.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об одной наилучшей однородной разностной схеме // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 124, № 4. — С. 779–782.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 131, № 3. — С. 514–517.

О КОЭФФИЦИЕНТО-УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Член-корреспондент АН СССР А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

Рассматривается вопрос об устойчивости решения разностных краевых задач относительно коэффициентов разностных схем (о ко-устойчивости). Показано, что необходимым и достаточным условием ко-устойчивости канонической схемы является ее консервативность.

п. 1. Рассмотрим на отрезке $0 \leq x \leq 1$ класс краевых задач

$$L^{(p,q,f)}u = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right] - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2.$$

Коэффициенты уравнения принадлежат классу Q_0 кусочно-непрерывных функций и удовлетворяют условиям:

$$0 < K_1 \leq p(x) \leq K_2, \quad 0 \leq q(x) \leq K_2, \quad |f(x)| \leq K_2, \quad (2)$$

где K_1 и K_2 — положительные постоянные.

Пусть $s_N = \{x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_i = ih, \dots, x_N = Nh = 1\}$ — равномерная разностная сетка с шагом $h = \frac{1}{N}$, а $L_h^{(p,q,f)}y_i$ — однородная трехточечная разностная схема, соответствующая оператору

$$L_h^{(p,q,f)}y_i = \frac{1}{h^2} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{B_i^h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i^h} \right) - D_i^h y_i + F_i^h, \quad (3)$$

$$A_i^h = A^h[\bar{p}_i(s)], \quad B_i^h = B^h[\bar{p}_i(s)], \quad -1 < s < 1, \quad \bar{p}_i(s) = p(x_i + sh);$$

$$D_i^h = D^h[q(x_i + sh)], \quad F_i^h = F^h[f(x_i + sh)], \quad -0,5 < s < 0,5.$$

Функционалы A^h , B^h , D^h и F^h удовлетворяют условиям (A_1) , (A_2) , (A_3) работы [1], т. е. мы рассматриваем тот же исходный класс разностных

схем, что и в работе [1]. При этом предполагается, что D^h и F^h — линейные функционалы.

п. 2. Если $B_i^h = A_{i+1}^h$, то разностный оператор L_h называется консервативным. Консервативный оператор можно записать в самосопряженной форме

$$L_h y_i = \frac{1}{h^2} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{A_i^h} \right) - D_i^h y_i + F_i^h, \quad (3')$$

где $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$.

Заметим, что разностная схема (3) может быть консерватизирована путем умножения на множитель

$$\mu_i = \prod_{s=1}^{i-1} \left(\frac{A_{s+1}^h}{B_s^h} \right). \quad (4)$$

В результате получим консервативную, вообще говоря, неоднородную схему.

п. 3. Разностная функция Грина $G_{i,k}$ определяется условиями

$$L_h^{(p,q)} G_{i,k} = -\frac{\delta_{i,k}}{h}, \quad G_{0k} = G_{Nk} = 0, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \quad (5)$$

Решение краевой задачи

$$L_h^{(p,q)} z_i = -\varphi_i, \quad 0 < i < N, \quad z_0 = 0, \quad z_N = 0, \quad (6)$$

дается формулой

$$z_i = \sum_{k=1}^{N-1} G_{ik} \varphi_k h. \quad (7)$$

Функция Грина G_{ik} удовлетворяет следующему условию «симметрии»:

$$\mu_i G_{ik} = \mu_k G_{ki},$$

где μ_i дается формулой (4). Для консервативного оператора $L_h^{(p,q)}$ имеем

$$B_s^h = A_{s+1}^h, \quad \mu_i = 1,$$

и мы получаем условие симметрии

$$G_{ik} = G_{ki}.$$

Лемма 1. Если коэффициенты $p(x), q(x)$ из класса Q_0 удовлетворяют условию (2), а $L_h^{(p,q)}$ — исходная разностная схема вида (3), то разностная функция Грина G_{ik} , определяемая условиями (5), и ее первые разностные отношения

$$\frac{G_{i,k+1} - G_{i,k}}{h} \quad (0 \leq i \leq N, 0 \leq k \leq N-1);$$

$$\frac{G_{i+1,k} - G_{i,k}}{h} \quad (0 \leq i \leq N-1, 0 \leq k \leq N)$$

ограничены по абсолютной величине постоянной, зависящей только от K_1, K_2 .

п. 4. При решении разностных краевых задач может оказаться, что коэффициенты разностных уравнений по тем или иным причинам определяются неточно. Однако желательно, чтобы при малом искажении коэффициентов решение задачи менялось мало.

Пусть y_i и \tilde{y}_i — решения разностных краевых задач

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = 0, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad (8)$$

$$\tilde{L}_h^{(p,q,f)} \tilde{y}_i = 0, \quad \tilde{y}_0 = \mu_1, \quad \tilde{y}_N = \mu_2, \quad (9)$$

$$\tilde{L}_h^{(p,q,f)} \tilde{y}_i = h^{-2} (\Delta y_i | \tilde{B}_i^h - \nabla y_i | \tilde{A}_i^h) - \tilde{D}_i^h y_i + \tilde{F}_i^h.$$

При этом коэффициенты уравнения искажаются либо за счет искажения коэффициентов дифференциального уравнения, либо за счет неточности вычисления функционалов A^h, B^h, D^h и F^h , либо, наконец, в результате обеих указанных причин.

Будем говорить, что разностная схема (3) удовлетворяет принципу устойчивости, если из условий

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} |\tilde{A}_i^h - A_i^h| h = \rho(h), & \quad \sum_{i=1}^{N-1} |\tilde{B}_i^h - B_i^h| h = \rho(h), \\ \sum_{i=1}^{N-1} |\tilde{D}_i^h - D_i^h| h = \rho(h), & \quad \sum_{i=1}^{N-1} |\tilde{F}_i^h - F_i^h| h = \rho(h), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\rho(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, следует сходимость решения \tilde{y}_i разностной краевой задачи (9) к решению $u(x)$ задачи (1), т. е.

$$|\tilde{y}_i - u(x_i)| \leq \rho_0(h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0. \quad (11)$$

Отсюда, в частности, следует, что для ко-устойчивой схемы

$$|y_i - u(x_i)| \leq \rho_1(h), \quad |y_i - \tilde{y}_i| \leq \rho_2(h),$$

где $\rho_1(h), \rho_2(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Если в условиях (10) и (11) заменить

$$\rho(h) = O(h^n), \quad \rho_0(h) = O(h^n), \quad (12)$$

то мы получим принцип ко-устойчивости n -го ранга.

п. 5. Формулируем необходимое условие ко-устойчивости.

Пусть $p(x)$ имеет разрыв в точке $\xi = x_n + \theta h$, $0 \leq \theta \leq 1$, $x_n = nh$, так что $p_\pi = p(\xi - 0) \neq p_\pi = p(\xi + 0)$. Введем функцию $\tilde{p}(x, h)$, совпадающую с $p(x)$ всюду, кроме интервалов (x_n, x_{n+1}) и (x_{n+1}, x_{n+2}) . Тогда для ко-устойчивости схемы $L_h^{(p,q,f)}$ вида (3) необходимо выполнение условия

$$\frac{\tilde{B}_n^h \tilde{B}_{n+1}^h \tilde{B}_{n+2}^h}{p_\pi} - \frac{\tilde{A}_n^h \tilde{A}_{n+1}^h \tilde{A}_{n+2}^h}{p_\pi} = \rho(h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0. \quad (13)$$

Нетрудно заметить, что необходимое условие сходимости в классе разрывных коэффициентов, полученное ранее в работах [3, 4], является следствием необходимого условия ко-устойчивости (13) (при $\tilde{p} \equiv p$).

п. 6. Справедливы следующие леммы.

Лемма 2. Любая консервативная схема $L_h^{(p,q,f)}$ из исходного семейства схем удовлетворяют необходимому условию ко-устойчивости (13).

Лемма 3. Пусть y_i, \tilde{y}_i — решения краевых задач

$$L_h y_i = 0, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2; \quad \tilde{L}_h \tilde{y}_i = 0, \quad \tilde{y}_0 = \mu_1, \quad \tilde{y}_N = \mu_2,$$

где L_h, \tilde{L}_h — консервативные разностные операторы вида (3'), коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$0 < K_1 \leq A_i^h \leq K_2, \quad 0 \leq D_i^h \leq K_2, \quad |F_i^h| \leq K_2. \quad (2')$$

Тогда имеет место неравенство

$$\max_{0 \leq i \leq N} |y_i - \tilde{y}_i| \leq C \left\{ \sum_{k=1}^N |\tilde{A}_k^h - A_k^h| h + \sum_{k=1}^{N-1} |\tilde{D}_k^h - D_k^h| h + \sum_{k=1}^{N-1} |\tilde{F}_k^h - F_k^h| h \right\}, \quad (14)$$

где C — постоянная, зависящая только от K_1 и K_2 .

Аналогичная лемма имеет место для задачи (1).

Выбирая в качестве \tilde{L}_h точную схему $\tilde{L}_h^{(p,q,f)}$ (см. [2]), а в качестве L_h — консервативную схему $L_h^{(p,q,f)}$ из исходного семейства схем и опираясь на лемму 3, нетрудно доказать теорему (ср. с [1]).

Теорема 1. Если консервативная схема $L_h^{(p,q,f)}$ из исходного семейства имеет в некотором классе C_{m_k, m_q, m_f} n -й интегральный порядок точности, то она имеет этот же n -й порядок точности для коэффициентов из класса $C_{n-1}^{(1)}$, т. е. для $p \in C_{n-1}^{(1)}$, $q \in C_{n-1}^{(1)}$, $f \in C_{n-1}^{(1)}$.

п. 7. Рассмотрим теперь каноническую схему (см. [1])

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = h^{-2} [\Delta y_i / B_i - \nabla y_i / A_i] - D_i y_i + F_i, \quad (15)$$

функционалы которой не зависят от h , и потребуем, чтобы она удовлетворяла необходимому условию (13).

Теорема 2. Если каноническая разностная схема (15) из исходного семейства схем удовлетворяет необходимому условию ко-устойчивости (13), то она консервативна, т. е.

$$B_i = A_{i+1} \quad \text{или} \quad B[\psi(s)] = A[\psi(1+s)].$$

Опираясь на теорему 2 и леммы 2 и 3, можно убедиться в том, что:

Теорема 3. Любая однородная консервативная схема из исходного семейства схем удовлетворяет принципу ко-устойчивости.

В результате приходим к следующей основной теореме.

Теорема 4. Необходимым и достаточным условием ко-устойчивости канонической схемы $L_h^{(p,q,f)}$ является ее консервативность.

¹⁾ C_m^γ ($0 \leq \gamma \leq 1$) — класс функций, имеющих на отрезке $[0, 1]$ непрерывную производную m -го порядка, удовлетворяющую условию Гельдера порядка γ .

Теорема 5. Любая консервативная схема $L_h^{(p,q,f)}$ имеет 1-й интегральный порядок точности в классе $Q_0^{1,2}$.

п. 8. Потребуем теперь, чтобы разностная схема $L_h^{(p,q,f)}$ удовлетворяла необходимым условиям ко-устойчивости 2-го ранга.

Теорема 6. Существует единственная каноническая схема («наилучшая консервативная схема»), имеющая 2-й интегральный порядок точности в $Q_1^{(1)}$ и удовлетворяющая принципу ко-устойчивости 2-го ранга; эта схема $L_h^{(p,q,f)}$ консервативна и определяется при помощи функционалов

$$A[\psi] = \int_{-1}^0 \psi(s) ds, \quad D[\psi] = F[\psi] = \int_{-0,5}^{0,5} \psi(s) ds. \quad (16)$$

Заметим, что при доказательстве этой теоремы используется, в частности, лемма 1.

п. 9. Заменяя интеграл, определяющий $A[\psi]$ в формуле (16), схемой по какой-нибудь квадратурной формуле, мы получим вместо наилучшей канонической схемы $L_h^{(p)}$ неканоническую схему

$$\tilde{L}_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{\tilde{A}_i^h} \right), \quad \text{где} \quad \tilde{A}_i^h = \tilde{A}^{h_1}[p(x_i + sh)],$$

$$\tilde{A}^{h_1}[p(s)] = \sum_{j=1}^J a_j \psi(s_j), \quad s_j = -1 + jh_1, \quad h_1 = \frac{1}{J}.$$

Теорема 7. Для того чтобы определенная выше неканоническая схема $\tilde{L}_h^{(p)}$ имела второй интегральный порядок точности в классе $Q_1^{(1)}$, необходимо и достаточно, чтобы $h_1/h = O(1)$ при $h \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$).

Аналогичная теорема имеет место и для схемы

$$\tilde{L}_h^{(p,q,f)} y_i = \tilde{L}_h^{(p)} y_i - \tilde{D}_i^h y_i + \tilde{F}_i^h,$$

функционалы \tilde{D}^{h_1} и \tilde{F}^{h_1} которой вычисляются по аналогии с функционалом \tilde{A}^{h_1} .

²⁾ Q_m^γ ($0 \leq \gamma \leq 1$) — класс функций, имеющих на $[0, 1]$ m кусочно-непрерывных производных, причем m -я производная удовлетворяет в интервалах ее непрерывности условию Гельдера порядка γ .

п. 10. В работе [1] мы рассматриваем асимптотическое разложение для решения разностной краевой задачи в случае непрерывных коэффициентов. Если $p(x), q(x)$ и $f(x)$ — функции из класса $Q_2^{(0)}$, а $L_h^{(p,q,f)}$ — наилучшая каноническая схема, то решение задачи (8) можно представить в виде

$$y_i = u(x_i) + h^2 Y(x_i, h) + O(h^4),$$

где $Y(x, h) = O(1)$ и представляет собой функцию, не имеющую предела при $h \rightarrow 0$. Отсюда следует, что в случае разрывных коэффициентов решение разностной краевой задачи (8) не имеет при $h \rightarrow 0$ асимптотики 2-го порядка.

Поступило 31 XII 1959

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О канонических однородных разностных схемах // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 131, № 4. — С. 761–764.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 131, № 3. — С. 514–517.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 108, № 3. — С. 393–396.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 4. — С. 562–565.

О НАИЛУЧШИХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский

§ 1.

В последние годы широкое использование быстродействующих электронных счетных машин стимулировало бурное развитие приближенных методов, в первую очередь методов решения дифференциальных уравнений. При решении многих задач для дифференциальных уравнений $Lu = 0$ с соответствующими дополнительными условиями часто обращаются к методу конечных разностей. При этом искомую функцию $u(x)$ заменяют сеточной функцией u^h , определенной на некоторой разностной сетке S_h , а производные — соответствующими разностными отношениями. В результате дифференциальный оператор Lu заменяется разностным оператором $L_h u$.

Практика использования машин настоятельно требует развития алгоритмов решения не отдельных задач, а классов задач.

Рассмотрим класс дифференциальных уравнений $L^{(k)}u = 0$, определяемый коэффициентами $k(x) = \{k_1(x), k_2(x), \dots, k_n(x)\}$ из некоторого функционального пространства \mathcal{K} . Разностный оператор $L_h^{(k)}u$, определенный для всех $k(x) \in \mathcal{K}$, мы будем называть разностной схемой в классе функций \mathcal{K} .

В случае линейного дифференциального уравнения $Lu = 0$ для его решения обычно используются линейные разностные уравнения $L_h u_i = 0$ и, следовательно, разностный оператор определяется заданием матрицы коэффициентов a_{ij}^h :

$$L_h u_i = \sum_j a_{ij}^h u_j = 0.$$

Если же речь идет о разностной схеме $L_h^{(k)}$ для решения класса урав-

нений $L^{(k)}u = 0$, то элементы матрицы (a_{ij}^h) представляют собой некоторые функционалы в пространстве \mathcal{K} коэффициентов $k(x)$, зависящие от шага сетки h . Таким образом, для линейных уравнений $L^{(k)}u = 0$ разностная схема $L_h^{(k)}$ определяется заданием матрицы-функционала, зависящей от параметра h .

§ 2.

Мы будем говорить, что разностная схема $L_h^{(k)}$ сходится в классе \mathcal{K} , если для коэффициентов $k(x) \in \mathcal{K}$ решение разностного уравнения $L_h^{(k)}y_i = 0$ сходится на любой последовательности сеток S_h при $h \rightarrow 0$ к соответствующему решению дифференциального уравнения $L^{(k)}u = 0$. Соответствие решений разностного и дифференциального уравнений определяется при этом через дополнительные условия.

Мы будем говорить, что разностная схема имеет интегральный порядок точности n (или n -й порядок точности), если для любых коэффициентов $k(x)$ из \mathcal{K} разностный оператор имеет порядок точности n , т. е. если

$$\max_{(i)} |y_i - u(x_i)| \leq Ch^n,$$

где $u(x)$ — решение дифференциального уравнения, y_i — соответствующее решение разностных уравнений, $C > 0$ — константа, не зависящая ни от h , ни от x .

Можно привести примеры различных разностных схем, соответствующих одному и тому же уравнению $L^{(k)}u = 0$, сходящихся в различных классах коэффициентов $\mathcal{K}(k(x))$ или обладающих в одном и том же классе \mathcal{K} различным порядком точности.

Таким образом, естественно возникает задача об определении наилучших схем, т. е. схем, сходящихся в наиболее широком классе коэффициентов и обладающих там наивысшей точностью.

Однако подобная постановка нуждается в уточнении. Разностная схема, для которой $y_i = u(x_i)$, где $u(x)$ точное решение задачи при заданных $k(x) \in \mathcal{K}$, представляет схему высшего порядка точности. Однако вычислительный алгоритм для определения $u(x)$ не всегда бывает ясен. Поэтому общая задача о построении наилучшей разностной схемы должна содержать характеристику допустимых разностных схем.

Существенной характеристикой разностной схемы $L_h^{(k)}$ является порядок аппроксимации.

Разностный оператор L_h имеет при $h \rightarrow 0$ n -й порядок аппроксимации относительно дифференциального оператора L , если можно указать такую (достаточно гладкую) функцию $u(x)$, что

$$|L_h u - Lu| < Ch^n \quad \left(h = \frac{1}{N}\right),$$

где $C > 0$ — постоянная, не зависящая ни от x , ни от h .

Разностная схема $L_h^{(k)}$ в некотором классе \mathcal{K} коэффициентов $k(x)$ имеет n -й порядок аппроксимации, если для любого фиксированного $k = \bar{k}(x)$ из этого класса \mathcal{K} оператор $L_h^{(\bar{k})}$ имеет n -й порядок аппроксимации.

Различные схемы $L_h^{(k)}$ и $\bar{L}_h^{(k)}$ могут иметь одинаковый порядок аппроксимации (или порядок точности). Такого рода схемы естественно считать эквивалентными.

Будем говорить, что схемы $L_h^{(k)}$ и $\bar{L}_h^{(k)}$ имеют n -й порядок эквивалентности в смысле точности (в смысле аппроксимации) в некотором классе \mathcal{K} , если для любых $k = \bar{k}(x) \in \mathcal{K}$ имеем

$$|y_i - \bar{y}_i| < Ch^n \quad (|L_h u_i - \bar{L}_h u_i| < Ch^n),$$

где y_i — решение уравнения $L_h^{(\bar{k})} y_i = 0$, \bar{y}_i — соответствующее решение уравнения $\bar{L}_h^{(\bar{k})} \bar{y}_i = 0$.

Может оказаться, что разностная схема $L_h^{(k)}$, аппроксимирующая (сходящаяся) дифференциальный оператор $L^{(k)}$ в некотором классе $\mathcal{K}(k(x))$ (например, гладких функций), не будет аппроксимировать (сходиться к) $L^{(k)}$ в более широком классе коэффициентов (например, кусочно-непрерывных функций $k(x)$).

§ 3.

Приведем пример однородной разностной схемы $L_h^{(k)}$, сходящейся в классе достаточно гладких коэффициентов $k(x)$ и дающей расходящийся результат в классе разрывных коэффициентов.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu = \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] = 0 \quad (0 < x < 1) \quad (1)$$

с условиями $u(0) = 1$, $u(1) = 0$ и соответствующую разностную схему:

$$L_h^{(k)} y_i = 0, \quad (1 \leq i \leq N-1), \quad y_0 = 1, \quad y_N = 0 \quad \left(h = \frac{1}{N}\right), \quad (2)$$

где

$$L_h^{(k)} y_i = k_i \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad (3)$$

$$k_i = k(x_i), \quad x_i = ih.$$

Если $k(x)$ достаточно гладкая функция, то эта схема $L_h^{(k)}$ имеет второй порядок точности, т. е. $y_i - u(x_i) = O(h^2)$.

Покажем, что она расходится даже в случае кусочно-постоянной функции

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{при } 0 < x < \xi = x_n + \theta h, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \\ k_2 & \text{при } \xi < x < 1. \end{cases}$$

В этом случае решение задачи (2) имеет вид

$$y_i = 1 - \frac{\alpha x_i}{\Delta} \quad \text{при } 0 \leq x_i < \xi \quad (0 \leq i \leq n),$$

$$y_i = \frac{\beta(1 - x_i)}{\Delta} \quad \text{при } \xi < x_i \leq 1 \quad (n+1 \leq i \leq N),$$

где

$$\Delta = \Delta_0 + h[1 + (\beta - \alpha)(1 - \theta)], \quad \Delta_0 = \alpha\xi + \beta(1 - \xi),$$

$$\alpha = \frac{3 + \varkappa}{5 - \varkappa}, \quad \beta = \frac{3\varkappa + 1}{5\varkappa - 1}, \quad \varkappa = \frac{k_2}{k_1}.$$

Отсюда видно, что предельная функция

$$\tilde{y}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} y(x, h) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha x}{\Delta_0} & \text{при } 0 < x < \xi, \\ \frac{\beta(1 - x)}{\Delta_0} & \text{при } \xi < x < 1, \end{cases}$$

где $y(x, h)$ — полигональная функция, отлична при $\varkappa \neq 1$ ($k_2 \neq k_1$) от решения задачи (1), даваемого формулой

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\varkappa x}{1 - (1 - \varkappa)\xi} & \text{при } 0 \leq x < \xi, \\ \frac{1 - \xi}{1 - (1 - \varkappa)\xi} & \text{при } \xi < x \leq 1. \end{cases}$$

При некоторых значениях параметров \varkappa и ξ выражение $\Delta_0 = 0$ и функция $\tilde{y}(x)$ вообще не существует.

Поэтому разностная схема (3) непригодна для решения задачи (1) в классе кусочно-непрерывных функций $k(x)$.

§ 4.

Удобства использования вычислительных машин выдвигают ряд общих требований относительно разностных схем:

- α) однородность схемы,
- β) симметрия схемы,
- γ) определенность схемы.

Будем называть разностную схему

$$L_h^{(k)} y_i = \sum_j a_{ij}^h y_j$$

однородной схемой, если элементы a_{ij}^h матрицы L_h во всех точках разностной сетки определяются единообразно для всех функций $k(x)$ из класса \mathcal{K} , т. е. являются в случае одной переменной x функционалами вида

$$a_{ij}^h[k(x)] = a_{j-i}^h[\bar{k}(s)], \quad (4)$$

$$\bar{k}(s) = k(x_i + sh), \quad -n_1 \leq j - i \leq n_2, \quad n_1 \geq 0, \quad n_2 \geq 0.$$

Разностную схему $L_h^{(k)}$ будем называть симметричной, если

$$a_{ij}^h[k(x)] = a_{i,2i-j}^h[k(2x_i - x)], \quad 0 \leq (2i - j)h \leq 1.$$

Если однородная схема симметрична, то

$$n_1 = n_2, \quad a_{j-i}^h[k(x_i + sh)] = a_{i-j}^h[k(x_i - sh)]. \quad (5)$$

Требование γ) означает, что разностные уравнения должны быть разрешимы при любых значениях $k(x)$ из \mathcal{K} на любой разностной сетке S_N (см. [1, 2]).

§ 5.

Рассмотрим первую краевую задачу для дифференциального уравнения

$$\left. \begin{aligned} L^{(k,q,f)} u &= \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= \bar{u}, \quad u(1) = \bar{\bar{u}}, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

где $k(x) \geq k_0 > 0$.

Введем следующие определения:

1. Если функция $\psi(x)$, определенная при $0 \leq x \leq 1$, имеет непрерывную производную порядка n , то мы говорим, что она принадлежит классу C_n ($\psi(x) \in C_n$); если, кроме того, n -я производная удовлетворяет на интервале $(0, 1)$ условию Гельдера порядка $\gamma > 0$, то $\psi(x)$ принадлежит классу C_n^γ .

2. Если $\psi(x)$ и все ее производные до n -го порядка включительно кусочно-непрерывны в интервале $(0, 1)$, то $\psi(x)$ принадлежит классу Q_n ; если, кроме того, $\psi^{(n)}(x)$ на интервалах ее непрерывности удовлетворяет условию Гельдера порядка γ , то $\psi(x)$ принадлежит классу Q_n^γ .

Мы ставим своей целью отыскание наилучших однородных разностных схем $L_h^{(k,q,f)}$, сходящихся и дающих максимальную точность в классе

$$Q_{m_k, m_q, m_f}(k, q, f) = \{Q_{m_k}(k), Q_{m_q}(q), Q_{m_f}(f)\}.$$

Допустимые разностные схемы будем брать для равномерных сеток S_n ($x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_i = ih, \dots, x_N = Nh = 1$) в виде

$$L_h^{(k,q,f)} y_i = \frac{1}{h^2} [A_i^{(k,h)} y_{i-1} + C_i^{(k,h)} y_i + B_i^{(k,h)} y_{i+1}] - D_i^{(q,h)} y_i + F_i^{(f,h)} = 0, \quad (6)$$

где каждый коэффициент схемы является функционалом соответствующего коэффициента дифференциального уравнения. Требование однородности схемы означает, что

$$A_i^{(k,h)} = A^h[\bar{k}(s)], \quad \bar{k}(s) = k(x_i + sh), \quad -1 < s < 1, \quad (7)$$

где $A^h[\bar{k}(s)]$ — некоторый функционал, определенный на интервале $-1 < s < 1$ для функций из Q_m , $m \geq 0$, и зависящий от h . Аналогичные выражения имеют место и для остальных коэффициентов $B_i^{(k,h)}$, $C_i^{(k,h)}$, $D_i^{(q,h)}$, $F_i^{(f,h)}$.

Требование β симметрии схемы дает

$$A^h[f(s)] = B^h[f(-s)] \quad (A^h \text{ и } B^h \text{ взаимно симметричны}),$$

$$C^h[f(-s)] = C^h[f(s)], \quad D^h[f(-s)] = D^h[f(s)], \quad F^h[f(-s)] = F^h[f(s)]$$

(функционалы C^h, D^h и F^h симметричны).

Если функционалы A^h, B^h, C^h, D^h и F^h не зависят от параметра h , то такую разностную схему мы будем называть канонической.

§ 6.

Разностную схему $L_h^{(k,q,f)}$ мы будем называть линейной, если все функционалы A^h, B^h, C^h, D^h и F^h линейны и допускают при $0 < h < h_0 < 1$ разложение вида

$$A^h[\bar{k}(s)] = A^{(0)}[\bar{k}(s)] + hA^{(1)}[\bar{k}(s)] + h^2A^{(2)}[\bar{k}(s)] + O(h^3), \quad (8)$$

где $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}$ — линейные функционалы, не зависящие от h .

Нетрудно убедиться в том, что если линейная схема $L_h^{(k,q,f)}$ вида (6) сходится в классе гладких коэффициентов

$$C_{m_k, m_q, m_f}^\gamma(k, q, f) = \{C_{m_k}^\gamma(k), C_{m_q}^\gamma(q), C_{m_f}^\gamma(f)\}, \quad m_k \geq 1, \quad m_q \geq 0, \quad m_f \geq 0,$$

то и линейная схема

$$L_h^{(k,q,f)} y_i = \frac{1}{h^2} [B_i^{(k,h)}(y_{i+1} - y_i) - A_i^{(k,h)}(y_i - y_{i-1})] - D_i^{(q,h)} y_i + F_i^{(f,h)} \quad (9)$$

сходится.

В связи с тем, что линейные функционалы A, B, D и F определены для функций кусочно-непрерывных, мы должны остановиться на вопросе о представлении линейного функционала в Q_m .

§ 7.

В классе непрерывных функций $C_0(f)$ для линейного функционала $A[f(x)]$, определенного на интервале $a < x < b$, имеет место интегральное представление

$$A[f(x)] = \int_a^b f(x) d\alpha(x), \quad (10)$$

где $\alpha(x)$ функция ограниченной вариации (теорема Рисса).

В работе [3] показано, что в классе $Q_m(f)$ ($m \geq 0$) линейный функционал $A[f(x)]$ имеет вид:

$$A[f(x)] = \int_a^b f(x) d\bar{\alpha}(x) + \sum_j \{f_n(x_j)[\bar{\alpha}_n(x_j) - \bar{\alpha}(x_j)] + f_n(x_j)[\bar{\alpha}(x_j) - \bar{\alpha}_n(x_j)]\} + \sum_j f(x_j)\sigma(x_j),$$

где

$$\alpha(x) = A[\eta_x(s)], \quad \eta_x(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } a < s < x, \\ 1 & \text{при } x \leq s < b \end{cases}$$

и

$$\sigma(x) = A[\pi_x(s)], \quad \pi_x(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s = x, \\ 0 & \text{при } s \neq x \end{cases}$$

— характеристические функции функционала A ,

$$\bar{\alpha}(x) = \alpha(x) - \sum_{x_j < x} \sigma(x_j),$$

$\bar{\alpha}(x)$ — непрерывная часть функции $\bar{\alpha}(x)$; $f_n(x_j)$ и $f_n(x_j)$ означают правое и левое предельные значения $f(x)$ в точке $x = x_j$.

Если $\sigma(x) \equiv 0$, то функционал A называется регулярным.

Если $A[f(x)] > 0$ для функций $f(x) \geq \varepsilon > 0$, то линейный функционал $A[f]$ называется положительным. В частности, если функционал $A[f]$ нормирован так: $A[1] = a_0$, где $a_0 > 0$, то он положителен.

§ 8.

Вернемся к разностной схеме (9).

Линейный, регулярный, положительный и не зависящий от параметра h функционал $A^h = A[\bar{k}(s)]$ будем называть нормальным функционалом.

Если все коэффициенты линейной разностной схемы $L_h^{(k,q,f)}$ вида (9) являются нормальными функционалами, то такая разностная схема называется нормальной схемой.

Для всякой сходящейся в C_{m_k, m_q, m_f} схемы (9) можно указать эквивалентную ей в смысле сходимости нормальную схему.

В дальнейшем мы будем рассматривать нормальные схемы

$$L_h^{(k,q,f)} y_i = \frac{1}{h^2} [B_i(y_{i+1} - y_i) - A_i(y_i - y_{i-1})] - D_i y_i + F_i, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= A[k(x_i + sh)], & B_i &= B[k(x_i + sh)], & -1 < s < 1, \\ D_i &= D[q(x_i + sh)], & F_i &= F[f(x_i + sh)], & -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Требование второго порядка аппроксимации, т. е. условие

$$\varphi_i = L_h^{(k,q,f)} u_i - (L^{(k,q,f)} u)_i = O(h^2)$$

означает, что

$$\begin{aligned} A[1] &= B[1] = D[1] = F[1] = 1, \\ A[s] &= -0,5, \quad B[s] = 0,5, \quad D[s] = F[s] = 0, \\ B[s^2] &= A[s^2]. \end{aligned}$$

Если нормальная схема симметрична и имеет первый порядок аппроксимации, то, как нетрудно убедиться, она имеет и второй порядок аппроксимации.

Теорема 1. Для того чтобы нормальная схема сходилась (имела n -й порядок точности, $n = 1, 2$) в классе гладких коэффициентов, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась в смысле аппроксимации (имела n -й порядок аппроксимации) (см. [4]).

§ 9.

Перейдем теперь к изучению вопроса о сходимости нормальных схем в классе разрывных коэффициентов. Это изучение облегчается тем, что удастся установить необходимое условие сходимости разностной схемы в классе $Q_m(k)$, $m \geq 0$. Пусть

$$\xi = x_n + \theta(h) \cdot h \quad (0 \leq \theta \leq 1, \quad x_n = nh, \quad n = n(h))$$

есть координата точки, в которой $k(x)$ имеет разрыв 1-го рода, так что

$$k_{\pi} = k(\xi - 0) \neq k_{\pi} = k(\xi + 0).$$

Необходимое условие сходимости схемы $L_h^{(k)} = L_h^{(k,0,0)}$ в классе $Q_m(k)$ имеет вид:

$$\Delta_n = (A_{n+1}\varphi_n + B_n\varphi_{n+1})h = \rho(h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0 \quad (12)$$

или

$$\delta_n = \frac{B_n B_{n+1}}{k_{\pi}} - \frac{A_n A_{n+1}}{k_{\pi}} = \rho(h). \quad (12')$$

Для φ_n и φ_{n+1} получаем выражения

$$\varphi_n = \frac{w}{h} \left[B_n \left(\frac{\theta}{k_{\text{л}}} + \frac{1-\theta}{k_{\text{п}}} \right) - \frac{A_n}{k_{\text{л}}} \right] + O(1),$$

$$\varphi_{n+1} = \frac{w}{h} \left[\frac{B_{n+1}}{k_{\text{п}}} - A_{n+1} \left(\frac{\theta}{k_{\text{л}}} + \frac{1-\theta}{k_{\text{п}}} \right) \right] + O(1), \quad w = k_{\text{л}} u'_{\text{л}} = k_{\text{п}} u'_{\text{п}}.$$

Требую, чтобы наша нормальная схема удовлетворяла условию (12) в классе $Q_m(k)$ на любой последовательности сеток S_N , находим

$$B[\bar{k}(s)] = A[\bar{k}(1+s)] + \Gamma[\bar{k}(s)],$$

где $\Gamma[\bar{k}(s)]$ — нуль-функционал, т. е. линейный функционал, тождественно равный нулю в классе непрерывных функций.

При этом имеют место соотношения

$$B_n = A_{n+1} + \rho(h), \quad \rho(h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0,$$

$$B_i = A_{i+1} \quad \text{для} \quad i \neq n.$$

Соответствующая разностная схема

$$L_h^{(k)} y_i = \frac{1}{h^2} [B_i(y_{i+1} - y_i) - A_i(y_i - y_{i-1})] \quad (13)$$

называется квазиконсервативной.

Если $B_i = A_{i+1}$ или $B[\bar{k}(s)] = A[\bar{k}(1+s)]$ для $k(x) \in Q_m$ $m \geq 0$, то схема $L_h^{(k)}$ называется консервативной.

Имеют место теоремы [4].

Теорема 2. Если нормальная разностная схема $L_h^{(k)}$ сходится в $Q_1^\gamma(k)$, то она квазиконсервативна.

Теорема 3. Для всякой сходящейся в $Q_1^\gamma(k)$ квазиконсервативной нормальной схемы $L_h^{(k)}$ существует эквивалентная ей, в смысле сходимости, консервативная схема.

Замечание 1. Требование сходимости нормальной схемы (11) в $Q_{m_k, m_q, m_f}(k, q, f)$ на функционалы $D[\bar{q}(s)]$ и $F[\bar{f}(s)]$ не накладывает никаких дополнительных ограничений, кроме условий

$$D[1] = F[1] = 1, \quad D[s] = F[s] = 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Для разностной схемы (3), рассмотренной в п. 2, имеем

$$\delta_n = 17(k_{\text{л}} - k_{\text{п}}) + O(h) = O(1) \quad \text{при} \quad k_{\text{л}} \neq k_{\text{п}},$$

т. е. эта схема не удовлетворяет необходимому условию сходимости в классе $Q_m(k)$.

§ 10.

Для отыскания наилучшей в смысле точности в Q_{m_k, m_q, m_f} разностной схемы используются необходимые условия второго порядка точности схемы $L_h^{(k, q, f)}$ в классе разрывных коэффициентов. Если $\xi = x_n + \theta h$ — точка разрыва функций $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$, то эти условия записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= O(1), \\ \Delta_n &= O(h^2). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Так как нормальная симметричная схема $L_h^{(k, q, f)}$ имеет второй порядок аппроксимации, то вне точки разрыва $x = \xi$ имеем:

$$\varphi_i = L_h^{(k, q, f)} u_i - (L_h^{(k, q, f)} u)_i = O(h^2) \quad \text{при} \quad i \neq n, \quad i \neq n + 1,$$

если

$$m_k \geq 3, \quad m_q \geq 2, \quad m_f \geq 2.$$

Нетрудно убедиться в том, что среди рассматриваемых нормальных симметричных схем $L_h^{(k, q, f)}$ вида (11) нет ни одной схемы, которая удовлетворяла бы необходимым условиям 2-го порядка точности (14).

Оказывается, что наилучшую схему надо искать среди нормальных схем вида [5]

$$L_h^{(p, q, f)} y_i = \frac{1}{h^2} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{B_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i} \right] - D_i y_i + F_i, \quad (15)$$

где

$$p(x) = \frac{1}{k(x)}, \quad A_i = A[\bar{p}(s)], \quad B_i = B[\bar{p}(s)], \quad \bar{p}(s) = p(x_i + sh),$$

$-1 < s < 1$, причем $A[\bar{p}(s)]$ и $B[\bar{p}(s)]$ — нормальные функционалы, а D_i и F_i имеют тот же смысл, что и раньше (см. § 8).

Теорема 4. Если нормальная симметричная разностная схема (15) имеет второй порядок точности в классе $Q_{m_p, m_q, m_f}(p, q, f)$, то она определена однозначно:

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = L_h^{(p)} y_i - D_i y_i + F_i, \quad (16)$$

где

$$L_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{A_i} \right) = \frac{1}{h^2} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{A_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i} \right], \quad (17)$$

$$A_i = \int_{-1}^0 p(x_i + sh) ds = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx, \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} D_i &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} q(x_i + sh) ds = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) dx, \\ F_i &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x_i + sh) ds = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx, \quad x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{h}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Разностная схема (16) является консервативной. Уравнение

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = 0,$$

т. е. уравнение

$$\begin{aligned} w_{i+\frac{1}{2}} - w_{i-\frac{1}{2}} - y_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx &= 0, \\ w_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{y_{i-1} - y_i}{A_i h}, \end{aligned} \quad (20)$$

выражает закон сохранения, соответствующий дифференциальному уравнению $Lu = 0$, для интервала $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$, а $w_{i-\frac{1}{2}}$ есть разностный аналог потока $\left(-\frac{1}{p} \frac{du}{dx} \right) = -k \frac{du}{dx}$ в точке $x = x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - 0,5h$.

Если воспользоваться термической интерпретацией, то (20) есть уравнение баланса тепла, а $w_{i-\frac{1}{2}}$ — тепловой поток, $\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx$ — количество

выделяющегося на $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$ тепла.

Результат теоремы 4 не зависит от специальной формы записи дифференциального и разностного операторов.

Рассмотрим разностную схему вида

$$L_h^{(k)} y_i = \frac{1}{h^2} [b_i(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})], \quad (21)$$

где

$$a_i = \Phi(l_1[\varphi(k(x_i + sh))]), \quad b_i = \Psi(l_2[\psi(k(x_i + sh))]), \quad (22)$$

$l_1[f(s)]$ и $l_2[f(s)]$ — нормальные функционалы, определенные в $Q_m(f)$ на интервале $-1 < s < 1$. Функции φ, ψ, Φ и Ψ имеют производные второго порядка, удовлетворяющие условию Липшица.

Теорема 5. Если симметричная разностная схема вида (21)–(22) имеет второй порядок точности в классе $Q_m(k)$, то она определена однозначно:

$$L_h^{(k)} y_i = \frac{1}{h^2} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{A_i} \right) = \frac{1}{h^2} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{A_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i} \right], \quad (23)$$

$$\left(a_i = \frac{1}{A_i}, \quad b_i = a_{i+1} \right), \quad (24)$$

где A_i определяется формулой (18) при $p(x) = \frac{1}{k(x)}$.

З а м е ч а н и е 1. Разностная схема (23), где

$$\frac{1}{A_i} = \frac{2k_{i-1,\pi}k_{i,\lambda}}{k_{i-1,\pi} + k_{i,\lambda}} = \left[0,5 \left(\frac{1}{k_{i-1,\pi}} + \frac{1}{k_{i,\lambda}} \right) \right]^{-1}$$

может давать второй порядок точности в $Q_m(k)$ только тогда, когда точка разрыва $\xi = x_n + \theta h$ коэффициента $k(x)$ совпадает либо с узловой точкой сетки ($\theta = 0$ или $\theta = 1$), либо находится посередине между соседними узловыми точками ($\theta = 0,5$).

З а м е ч а н и е 2. Если интеграл в формуле (18) для A_i вычисляется по квадратурной формуле, например, вида

$$\int_{-1}^0 p(s) ds = 0,5 \sum_{j=1}^L [p(s_{j-1} + 0) + p(s_j - 0)] h_1, \quad h_1 = \frac{1}{L},$$

то получаемая при этом разностная схема (не являющаяся канонической схемой) будет удовлетворять необходимым условиям второго порядка точности в $Q_m(p)$ только в том случае, когда $h_1 = O(h)$ при $h \rightarrow 0$, т. е. предел $\lim \frac{N}{L}$ остается конечным при $N \rightarrow \infty$.

§ 11.

Найденная нами разностная схема (16), в самом деле является наилучшей, т. е. имеет второй порядок точности в случае разрывных коэффициентов уравнения $L^{(k,q,f)}u = 0$.

Пусть $u(x)$ — решение уравнения

$$L^{(k,q,f)}u = 0, \quad 0 < x < 1,$$

с условиями

$$u(0) = \bar{u}, \quad u(1) = \bar{\bar{u}}, \quad (\text{задача I})$$

а y_i — решение разностной задачи:

$$L_h^{(k,q,f)}y_i = 0 \quad (1 \leq i \leq N-1), \quad y_0 = \bar{u}, \quad y_N = \bar{\bar{u}}, \quad (\text{задача II})$$

где $L_h^{(k,q,f)}$ — разностная схема (16).

Разность $z_i = y_i - u(x_i)$ удовлетворяет уравнению

$$L_h^{(k,q)}z_i = -\varphi_i, \quad \varphi_i = L_h^{(k,q,f)}u_i - (L^{(k,q,f)}u)_i, \quad L_h^{(k,q)} = L_h^{(k,q,0)},$$

и нулевым граничным условиям

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0. \quad (\text{задача III})$$

Теорема 6. *Разностная схема $L_h^{(k,q,f)}$, определяемая формулами (16)–(19), имеет в классе Q_{m_k, m_q, m_f} второй порядок точности, если $m_k \geq 3$, $m_q \geq 2$ и $m_f \geq 2$. Иными словами,*

$$z_i = y_i - u(x_i) = O(h^2) \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

где y_i — решение задачи II, $u(x)$ — решение задачи I.

§ 12.

Применение наилучшей разностной схемы для решения задачи Штурма–Лиувилля

$$L^{(k,q)}u + \lambda\rho(x)u = 0 \quad (0 < x < 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

позволяет определять собственные значения и собственные функции с точностью до второго порядка относительно шага h разностной сетки в классе разрывных коэффициентов $k(x)$, $q(x)$ и $\rho(x)$.

Разностная задача Штурма–Лиувилля ставится так:

$$L_h^{(k,q)}y_i + \Lambda\rho_i^h y_i = 0 \quad (1 \leq i \leq N-1), \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0,$$

где

$$L_h^{(k,q)}y_i = L_h^{(k)}y_i - Dy_i, \quad L_h^{(k)}y_i = \frac{1}{h^2} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{A_i} \right), \quad A_i = \int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x_i + sh)},$$

$$D_i = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} q(x_i + sh) ds, \quad \rho_i^h = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rho(x_i + sh) ds,$$

т. е. $L_h^{(k,\tilde{q})}$ ($\tilde{q} = q - \Lambda\rho$) — наилучшая схема.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 108, № 3. — С. 393–396.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 4. — С. 562–565.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О представлении линейных функционалов в классе разрывных функций // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 2. — С. 188–191.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 124, № 3. — С. 529–532.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об одной наилучшей однородной разностной схеме // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 124, № 4. — С. 779–782.

Предисловие к Трудам Всесоюзного совещания по дифференциальным уравнениям

В ноябре 1958 г. в городе Ереване проходило совещание по дифференциальным уравнениям, созданное по инициативе Ереванского государственного университета и Вычислительного центра Академии наук АрмССР.

В работе совещания приняло участие более семидесяти иногородних математиков. На совещании было зачитано около сорока докладов, посвященных самым различным вопросам современной теории дифференциальных уравнений и ее приложений.

На заключительном заседании было признано необходимым издать труды совещания.

Предлагаемый сборник содержит полные тексты или краткое изложение большинства прочитанных докладов.

На совещании имело место также широкое обсуждение отдельных докладов или проблем, были намечены пути дальнейшего развития многих важных направлений современной теории дифференциальных уравнений. Эта часть работы совещания в сборнике не отражена.

Сборник подготовлен к печати Р. А. Александряном и В. И. Карабеговым.

ОБ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский
(Москва)

Оглавление

Введение	
1. Однородные разностные схемы	
2. Некоторые примеры	
3. Об аппроксимации и точности разностных схем	
4. Основные результаты работы	
§ 1. Исходное семейство разностных схем	
1. Краевая задача для дифференциального уравнения	
2. Исходное семейство однородных разностных схем	
3. Функционалы r -го ранга	
4. Классы разностных схем $\mathcal{L}(n_1, n_2, n_3)$	
5. Погрешности аппроксимации	
6. Порядок аппроксимации	
7. Канонические схемы	
8. Консервативные разностные схемы	
9. Линейные схемы	
10. Дискретные схемы	
11. Линейные функционалы в классе разрывных функций	
§ 2. Однородные разностные схемы в классе гладких коэффициентов ...	
1. О точности разностных схем в классе гладких коэффициентов	
2. Разностная функция Грина	
3. Оценки разностной функции Грина	
4. О порядке аппроксимации сходящихся схем	
§ 3. Необходимые условия сходимости в классе разрывных коэффициентов	
1. О погрешности аппроксимации в окрестности точки разрыва коэффициентов	
2. Случай консервативной схемы	

3. Основная лемма	144
4. Необходимое условие сходимости для исходной схемы в классе разрывных коэффициентов	149
5. Необходимые условия второго порядка точности в классе разрывных коэффициентов	151
6. О достаточных условиях сходимости	152
§ 4. Коэффициенто-устойчивые разностные схемы	154
1. Зависимость решения дифференциального уравнения от коэффициентов	154
2. Принцип ко-устойчивости разностных схем	155
3. Ко-устойчивость консервативной схемы	157
4. Необходимое условие ко-устойчивости	158
5. Консервативность ко-устойчивой канонической схемы	161
§ 5. О сходимости и точности	165
1. О сходимости консервативных схем в классе разрывных коэффициентов	165
2. О точности консервативной схемы	168

Введение

В связи с широким применением быстродействующих электронных счетных машин возникает необходимость развития однородных вычислительных методов, пригодных для решения определенных классов математических задач.

Для нахождения приближенных решений дифференциальных уравнений $Lu = 0$ с некоторыми дополнительными условиями $lu = 0$ часто обращаются к методу конечных разностей; при этом искомую функцию u заменяют сетчатой функцией u^h , определенной на разностной сетке S_h , а дифференциальный оператор Lu — разностным оператором $L_h u^h$ (см. [1–10]).

Приближенное решение исходной задачи определяется как решение системы разностных уравнений $L_h u^h = 0$ с соответствующими разностными дополнительными условиями $l_h u^h = 0$.

Практическое использование быстродействующих электронных счетных машин показывает, что нецелесообразно развивать численные методы применительно к индивидуальным задачам. Необходимо развитие численных алгоритмов, пригодных для решения определенных классов задач. Рассмотрим, например, класс дифференциальных уравнений $L^{(k)}u = 0$ с дополнительными условиями $l^{(k)}u = 0$, характеризуемый типом операторов $L^{(k)}$ и $l^{(k)}$ и функциональным пространством \mathcal{K} , из которого берутся вектор-коэффициенты уравнения. Закон для написания разностных уравнений

для всех коэффициентов $k(x)$ из функционального пространства \mathcal{K} мы будем называть разностной схемой. Разностная схема $L_h^{(k)}u^h$ в соединении с разностной схемой $l_h^{(k)}u^h$ рассматривается как вычислительный алгоритм для решения любой задачи из заданного класса задач.

Развитие теории разностных схем естественно приводит к постановке следующих вопросов:

1) обеспечивает ли выбранная разностная схема сходимость решения разностной задачи к решению исходной задачи для дифференциального уравнения в заданном классе коэффициентов и каков асимптотический порядок сходимости при $h \rightarrow 0$;

2) если разностная схема не фиксирована, а рассматривается некоторое семейство «допустимых» схем, то как выбрать из этого семейства схем лучшие схемы, которые дают высокую точность в наиболее широком классе коэффициентов и устойчивы относительно возмущений, связанных с ошибками вычислений.

Пункт 1 введения посвящен выяснению понятия однородных разностных схем. Изучение структуры исходных классов схем необходимо, поскольку основная задача теории разностных схем состоит в установлении связи между структурой схемы и той точностью, которую она реализует. Изучению конкретных разностных схем посвящена обширная литература.

В п. 2 приведен пример разностной схемы для дифференциальных операторов типа Штурма–Лиувилля, дающей высокую точность в классе достаточно гладких коэффициентов и не дающей даже сходимости в классе разрывных коэффициентов. Между тем класс уравнений этого типа с разрывными коэффициентами представляет большой научный и практический интерес.

Большое значение имеет проблема выделения семейств разностных схем «сквозного счета», которые позволяли бы решать задачи единым способом как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов, не прибегая к явному выделению их точек разрыва. (Выяснение положения точек разрыва коэффициентов особенно сложно в том случае, когда эти коэффициенты получаются в результате приближенного решения других уравнений.)

В п. 3 приводится второй пример, существенный для обсуждения постановки вопросов.

В п. 4 дается обзор результатов всей статьи.

Настоящая работа представляет собой сводку результатов, опубликованных авторами в 1956–1960 гг. (см. [11–19]). В процессе написания обзорной статьи опубликованные материалы были подвергнуты существенной переработке.

1. Однородные разностные схемы. Требование единообразия или однородности вычислений, особенно важное для образования циклов, выделяемых в процессе программирования, накладывает свои требования на семейства разностных операторов и схем. Перейдем к определению однородности разностных операторов и схем, ограничиваясь случаем одного переменного, что связано с последующим изложением; однако эти определения без труда переносятся на случай многих переменных.

Рассмотрим примеры. Для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами

$$Lu = \frac{d^2u}{dx^2} - qu, \quad q = \text{const}, \quad 0 < x < 1,$$

простейший разностный (трехточечный) оператор определяется заданием шаблона \mathfrak{M}_0 , состоящего из трех точек $m = -1, 0, 1$, и производящей функции

$$\Phi^h[\bar{u}] = \frac{\bar{u}_{-1} - 2\bar{u}_0 + \bar{u}_1}{h^2} - q\bar{u}_0 = \Phi^h(\bar{u}_{-1}, \bar{u}_0, \bar{u}_1).$$

Эту функцию можно рассматривать как функционал, заданный на сетчатой функции \bar{u} , определенной на шаблоне:

$$\bar{u} = \{\bar{u}_m\}, \quad m \in \mathfrak{M}_0\{-1, 0, 1\}.$$

Значение разностного оператора $L_h u^h$ в точке x_i сетки $S_h \{x_i = ih, h = 1/N, i = 0, 1, \dots, N\}$ для $1 \leq i \leq N - 1$ определяется как значение производящей функции оператора Φ^h от аргументов, являющихся значениями сетчатой функции $u^h = \{u_i^h\}$ в точках шаблона $\mathfrak{M}_{x_i}^h$, отнесенного к точке x_i :

$$\mathfrak{M}_{x_i}^h = \{x_i + mh\}, \quad m \in \mathfrak{M}_0, \quad \text{т. е.}$$

$$(L_h u^h)_i = \frac{u_{i-1}^h - 2u_i^h + u_{i+1}^h}{h^2} - qu_i^h = \Phi^h[u^h(x_i + mh)].$$

Аналогично определяются разностные операторы и для случая многих переменных (например, для уравнения Лапласа) (см. [1]).

Остановимся на понятии однородного разностного оператора

$$L_h u^h = U^h.$$

Введем предварительно несколько определений.

Конечное множество $\mathfrak{M}_0 = \{-m_1, -m_1 + 1, \dots, 0, 1, \dots, m_2\}$ точек целочисленной сетки будем называть шаблоном оператора, а функцию

$$\Phi^h(\bar{u}_{-m_1}, \bar{u}_{-m_1+1}, \dots, \bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{m_2}) = \Phi^h[\bar{u}]$$

от $m_1 + m_2 + 1$ переменных, зависящую от h как от параметра, будем называть производящей функцией (функционалом) разностного оператора. Функция Φ^h является h -параметрическим функционалом от сетчатой функции $\bar{u} = \{\bar{u}_m, m \in \mathfrak{M}_0\}$, заданной на \mathfrak{M}_0 .

Преобразование переменных

$$x = \bar{x} + s\bar{h},$$

которое мы будем называть преобразованием сдвига, отображает (при $s = m, m \in \mathfrak{M}_0$) шаблон \mathfrak{M}_0 на множество точек $\mathfrak{M}_{\bar{x}}^{\bar{h}}$, которое мы назовем преобразованным \bar{h} -шаблоном в точке \bar{x} . Если $\bar{x} = x_i, m_1 < i < N - m_2$, является узловой точкой сетки S_h и $\bar{h} = h$, то преобразованный \bar{h} -шаблон в точке x_i является частью сетки S_h .

Сетчатая функция u^h , заданная на основной сетке S_h , индуцирует с помощью преобразованного h -шаблона в точке x_i функцию $\bar{u}_{x_i}^h$, определенную на \mathfrak{M}_0 :

$$\bar{u}_{x_i}^h = \{u^h(x_i + mh), m \in \mathfrak{M}_0\},$$

если только $\mathfrak{M}_{x_i}^h \subset S_h$, т. е. $m_1 < i < N - m_2$.

Разностный оператор $L_h u^h = U^h$ будем называть однородным, если существует производящая функция (функционал)

$$\Phi^h[\bar{u}], \quad \bar{u} = \{\bar{u}_m, m \in \mathfrak{M}_0\},$$

определенная для сетчатых функций, заданных на шаблоне \mathfrak{M}_0 , так что значения оператора в точке x_i равны

$$U_i^h = \Phi^h \bar{u}_{x_i}^h = \Phi^h[u^h(x_i + mh)],$$

где $\bar{u}_{x_i}^h$ — функция, индуцированная на шаблоне \mathfrak{M}_0 сетчатой функцией u^h при помощи преобразованного h -шаблона в точке x_i .

Такой оператор L_h преобразует сетчатую функцию u^h , заданную на S_h , в сетчатую функцию U^h , определенную на сетке $S'_h \{x_i, m_1 \leq i \leq N - m_2\}$, которая является частью сетки S_h .

Рассмотрим теперь примеры разностных схем для класса дифференциальных операторов

$$L^{(k)}u = \frac{d}{dx} \left[k_1(x) \frac{du}{dx} \right] - k_2(x)u + k_3(x),$$

где коэффициенты $k(x) = (k_1(x), k_2(x), k_3(x))$ принадлежат к некоторому функциональному пространству \mathcal{K} .

Рассмотрим в качестве примера схему

$$(L^{(k)}u^h)_i = U_i^{(h,k)} = \frac{1}{h^2} [B_i(u_{i+1}^h - u_i^h) - A_i(u_i^h - u_{i-1}^h)] - D_i u_i + F_i, \\ 0 < i < N,$$

где

$$A_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k_1(x)} \right)^{-1} = \left[\int_{-1}^0 \frac{ds}{k_1(x_i + sh)} \right]^{-1},$$

$$B_i = \left[\int_0^1 \frac{ds}{k_1(x_i + sh)} \right]^{-1} = A_{i+1},$$

$$D_i = \frac{1}{h} \int_{x_i - 0,5h}^{x_i + 0,5h} k_2(x) dx = \int_{-0,5}^{0,5} k_2(x_i + sh) ds,$$

$$F_i = \int_{-0,5}^{0,5} k_3(x_i + sh) ds, \quad x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad h = 1/N.$$

Эта схема обладает рядом достоинств.

Значение $(L_h^{(k)}u^h)_i$ может быть определено при помощи производящего функционала

$$\Phi^h[\bar{u}, \bar{k}(s)] = \frac{1}{h^2} [B^{(\bar{k}_1)}(\bar{u}_1 - \bar{u}_0) - A^{(\bar{k}_1)}(\bar{u}_0 - \bar{u}_1)] - D^{(\bar{k}_2)}\bar{u}_0 + F^{(\bar{k}_3)},$$

где

$$A^{(\bar{k}_1)} = A[\bar{k}_1(s)] = \left[\int_{-1}^0 \frac{ds}{\bar{k}_1(s)} \right]^{-1},$$

$$B^{(\bar{k}_1)} = B[\bar{k}_1(s)] = \left[\int_0^1 \frac{ds}{\bar{k}_1(s)} \right]^{-1} = A[\bar{k}_1(1+s)],$$

$$D^{(\bar{k}_2)} = D[\bar{k}_2(s)] = \int_{-0,5}^{0,5} \bar{k}_2(s) ds, \quad F^{(\bar{k}_3)} = F[\bar{k}_3(s)] = \int_{-0,5}^{0,5} \bar{k}_3(s) ds,$$

определенного для сетчатой функции $\bar{u} = \{\bar{u}_m\}$, заданной на трехточечном шаблоне \mathfrak{M}_0 ($m = -1, 0, 1$), и функций $\bar{k}(s) = \{\bar{k}_1(s), \bar{k}_2(s), \bar{k}_3(s)\}$, заданных на отрезке Σ_0 ($-1 \leq s \leq 1$), который мы будем называть коэффициентным шаблоном, если положить

$$\bar{u}_m = u_{i+m}^h, \quad m \in \mathfrak{M}_0, \quad \bar{k}_j(s) = k_j(x_i + sh), \quad j = 1, 2, 3, \quad s \in \Sigma_0.$$

Дадим определение понятия однородной разностной схемы $L_h^{(k)} u^h$. Введем предварительно несколько определений.

Конечное множество $\mathfrak{M}_0 \{m = -m_1, -m_1 + 1, \dots, 0, 1, \dots, m_2\}$ точек целочисленной сетки будем называть сетчатым, а отрезок $\Sigma_0 \{-m_1 \leq s \leq m_2\}$ — коэффициентным шаблоном. Функционал $\Phi^h[\bar{u}, \bar{k}(s)]$, определенный для сетчатой функции $\bar{u} \{\bar{u}_m, m \in \mathfrak{M}_0\}$ и коэффициентов $\bar{k}(s)$ ($s \in \Sigma_0$) на соответствующих шаблонах и зависящий от h как от параметра, будем называть производящим функционалом.

При определении сетчатого шаблона \mathfrak{M}_0 и шаблона коэффициентов Σ_0 можно без ограничения общности m_1 и m_2 считать одинаковыми. Для случая многих переменных шаблон Σ_0 может задаваться независимо от \mathfrak{M}_0 — множества векторов, соединяющих начало координат с точками целочисленной сетки.

Преобразование сдвига $x = \bar{x} + sh$ отображает шаблоны \mathfrak{M}_0 и Σ_0 на множества точек $\mathfrak{M}_{\bar{x}}^h$ и $\Sigma_{\bar{x}}^h$, которые мы будем называть преобразованными h -шаблонами в точке \bar{x} .

Рассмотрим функции u^h и $k(x)$, заданные, соответственно, на основной сетке S_h и на Σ , основной области изменения x . Эти функции индуцируют

с помощью преобразованных шаблонов $\mathfrak{M}_{x_i}^h$ и $\Sigma_{x_i}^h$ в точке x_i функции $\bar{u}_{x_i}^h$ и $\bar{k}_{x_i}^h(s)$, определенные на \mathfrak{M}_0 и Σ_0 :

$$\bar{u}_{x_i}^h = u^h(x_i + mh), \quad m \in \mathfrak{M}_0, \quad \bar{k}_{x_i}^h(s) = k(x_i + sh), \quad s \in \Sigma_0,$$

если только $\mathfrak{M}_{x_i}^h$ и $\Sigma_{x_i}^h$ принадлежат, соответственно, S_h и Σ .

Разностную схему $L_h^{(k)}u^h$, соответствующую дифференциальному оператору $L^{(k)}u$, мы будем называть однородной разностной схемой в классе коэффициентов $k(x) \in \mathcal{K}$, если существует производящий функционал $\Phi^h[\bar{u}, \bar{k}(s)]$, с помощью которого значения $(L_h^{(k)}u^h)_i$ определяются по формуле:

$$(L_h^{(k)}u^h)_i = \Phi^h[\bar{u}_{x_i}^h, \bar{k}_{x_i}^h(s)] = \Phi^h[u^h(x_i + mh), k(x_i + sh)].$$

Разностная схема $L_h^{(k)}$ при любом выборе $k(x) \in \mathcal{K}$ определяет оператор, который функцию u^h , заданную на сетке S_h , преобразует в функцию $L_h^{(k)}u^h$, заданную на сетке $S'_h(x_i, m_1 \leq i \leq N - m_2)$, являющуюся частью сетки S_h .

Если разностная схема $L_h^{(k)}u^h$ л и н е й н а относительно сетчатой функции $u^h = \{u_i^h\}$, то

$$(L_h^{(k)}u^h)_i = \sum_l a_{il}^h[k(x)]u_l^h + b_i^h[k(x)],$$

где суммирование проводится, вообще говоря, по всей сетке S_h . Коэффициенты $a_{il}^h[k(x)]$ и $b_i^h[k(x)]$ являются функционалами коэффициентов дифференциального оператора $L^{(k)}u$, зависящими от параметра h . Задание $L_h^{(k)}u^h$ эквивалентно заданию матрицы-функционала $(a_{ij}^h[k(x)])$ и вектор-функционала $b_i^h[k(x)]$. Однородность линейной схемы $L_h^{(k)}u^h$ означает, что

$$(L_h^{(k)}u^h)_i = \sum_{j=-m_1}^{m_2} A_j^h[\bar{k}(s)]u_{i+j}^h + B^h[\bar{k}(s)], \quad (\bar{k}_i^h(s) = k(x_i + sh)),$$

где $A_j^h[\bar{k}(s)]$ и $B^h[\bar{k}(s)]$ — параметрические функционалы, определенные для вектор-функций $\bar{k}(s)$, заданных на коэффициентном шаблоне $\Sigma_0(-m_1 \leq s \leq m_2)$, причем

$$a_{il}^h[k(x)] = A_j^h[k(x_i + sh)], \quad j = l - i, \quad \text{для } -m_1 \leq j \leq m_2,$$

$$a_{il}^h[k(x)] = 0 \quad \text{для } j < -m_1 \text{ и } j > m_2,$$

$$b_i^h[k(x)] = B^h[k(x_i + sh)].$$

Производящий функционал этой линейной однородной схемы равен

$$\Phi^h[\bar{u}, \bar{k}(s)] = \sum_{j=-m_1}^{m_2} A_j^h[\bar{k}(s)] \bar{u}_j + B^h[\bar{k}(s)],$$

где $\bar{k}(s)$ — функция, определенная на шаблоне Σ_0 ($-m_1 \leq s \leq m_2$).

Разностную схему мы будем называть с и м м е т р и ч н о й схемой, если выражение $L_h^{(k)} u^h$ остается неизменным при изменении направления оси x . Условие симметрии однородной схемы имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi^h[u_{i+j}, k(x_i + sh)] &= \Phi^h[u_{i-j}, k(x_i - sh)], \\ j &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m \quad (m_1 = m_2 = m), \quad -m \leq s \leq m. \end{aligned}$$

Симметрия линейной однородной схемы определяется равенствами

$$\begin{aligned} A_j^h[\bar{k}(s)] &= A_{-j}^h[\bar{k}(-s)], \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm m \quad (m_1 = m_2 = m), \\ B^h[\bar{k}(s)] &= B^h[\bar{k}(-s)]. \end{aligned}$$

При решении систем дифференциальных уравнений $dY/dx = k(x, Y(x))$ класс уравнений определяется не просто коэффициентами $k(x)$, зависящими от переменной x , а «коэффициентами» $k(x, Y)$, зависящими также от искомой вектор-функции $Y(x)$. Понятие однородных разностных схем переносится и на этот случай и охватывает схемы, применяемые в методах Эйлера и Адамса-Штёрмера¹⁾.

2. Некоторые примеры. Для частичного пояснения поставленных в п. 1 вопросов рассмотрим примеры.

Пр и м е р 1. Рассмотрим первую краевую задачу

$$L^{(k)} u = \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$$

Рассмотрим однородную разностную схему, определяемую производящим функционалом

$$\Phi^h[\bar{u}, \bar{k}(s)] = \bar{k}(0) \frac{\bar{u}_1 - 2\bar{u}_0 + \bar{u}_{-1}}{h^2} - \frac{\bar{k}(1) - \bar{k}(-1)}{2h} \cdot \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_{-1}}{2h},$$

¹⁾Схема Рунге-Кутта выходит за рамки данного определения однородных схем. Однако нетрудно расширить понятие однородности разностных схем так, чтобы оно охватывало и схему Рунге-Кутта.

которая приводит к системе, разностных уравнений

$$\begin{aligned} (L_h^{(k)} u^h)_i &= \Phi^h[u^h(x_i + mh), k(x_i + sh)] = \\ &= k_i \frac{u_{i+1}^h - 2u_i^h + u_{i-1}^h}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \cdot \frac{u_{i+1}^h - u_{i-1}^h}{2h} = 0, \end{aligned}$$

$$m = -1, 0, 1, \quad 0 < i < N, \quad h = 1/N,$$

или

$$\frac{1}{h^2} [B_i^{(k)} \Delta u_i^h - A_i^{(k)} \nabla u_i^h] = 0, \quad 0 < i < N, \quad u_0^h = 1, \quad u_N^h = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= u_{i+1} - u_i, \quad \nabla u_i = u_i - u_{i-1}, \quad B_i^{(k)} = k_i + \frac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1}), \\ A_i^{(k)} &= k_i - \frac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1}). \end{aligned}$$

Как будет показано ниже (см. § 2, п. 4), эта схема обеспечивает второй порядок точности в классе гладких коэффициентов $k(x)$ ($k \in C^{(3)}$)

$$u_i^h - u(x_i) = O(h^2).$$

Покажем, что эта схема не обеспечивает даже сходимости в классе разрывных коэффициентов. Рассмотрим кусочно-постоянную функцию

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 \leq x < \xi, \\ k_2, & \xi < x \leq 1, \end{cases}$$

где ξ иррациональное число. Пусть ξ принадлежит интервалу (x_n, x_{n+1}) сетки S_h , $\xi = x_n + \theta h$, $0 < \theta < 1$. Разностные уравнения для $i \neq n$, $i \neq n+1$ дают

$$\Delta u_i^h = \nabla u_{i+1}^h,$$

т. е. u_i^h линейна относительно номера i для $i < n$ и $i > n+1$:

$$u_i^h = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{\Delta} x_i, & x_i < \xi, \\ \frac{\beta}{\Delta} (1 - x_i), & x_i > \xi. \end{cases}$$

Коэффициенты $\frac{\alpha}{\Delta}$ и $\frac{\beta}{\Delta}$ определяются из уравнений для $i = n, n + 1$:

$$\alpha = \frac{3 + \varkappa}{5 - \varkappa}, \quad \beta = \frac{3\varkappa + 1}{5\varkappa - 1}, \quad \varkappa = \frac{k_2}{k_1},$$

$$\Delta = \alpha\xi + \beta(1 - \xi) + h[1 - (\beta - \alpha)(1 - \theta)].$$

Вводя полигональную функцию $\tilde{u}^h(x, h)$, натянутую на сетчатую функцию u_i^h , и совершая предельный переход при $h \rightarrow 0$, видим, что предельная функция

$$\tilde{u}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{u}^h(x, h) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{\Delta_0}x, & x < \xi, \\ \frac{\beta}{\Delta_0}(1 - x), & x > \xi, \end{cases}$$

$$(\Delta_0 = \alpha\xi + \beta(1 - \xi))$$

отлична от решения исходной задачи, равного

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\varkappa x}{\varkappa\xi + 1 - \xi}, & x < \xi, \\ \frac{1 - x}{\varkappa\xi + 1 - \xi}, & x > \xi, \end{cases}$$

для $\varkappa \neq 1$. В самом деле, сравнивая выражения для $\tilde{u}(x)$ и $u(x)$, можно показать, что равенство $\tilde{u}(x) = u(x)$ имеет место только для $\varkappa = 1$. При некоторых \varkappa и ξ имеем $\Delta_0 = 0$ и предельной функции $\tilde{u}(x)$ вообще не существует.

Таким образом, при использовании разностных схем необходимо изучать, в каком классе коэффициентов они дают сходимость.

Пример 2. Рассмотрим первую краевую задачу

$$L^{(k,q,f)}u = \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = \bar{u}_1, \quad u(1) = \bar{u}_2,$$

для класса дифференциальных уравнений, характеризуемого коэффициентами $k, q, f \in Q^{(0)}$ (т. е. кусочно-непрерывными на отрезке $0 \leq x \leq 1$). Будем предполагать, что $k(x) \geq M_1 > 0$, $q(x) \geq 0$.

Очевидно, что в промежутке (x_{i-1}, x_{i+1})

$$u(x) = P_i^h(x)u_{i-1} + Q_i^h(x)u_{i+1} + R_i^h(x),$$

где $P_i^h(x)$ и $Q_i^h(x)$ определяются через решение $u^{(1)}(x)$ и $u^{(2)}(x)$ однородного уравнения

$$L^{(k,q)}u = \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u = 0,$$

удовлетворяющее условиям²⁾

$$u^{(1)}(x_{i-1}) = 0, \quad k_{i-1}u^{(1)}(x_{i-1}) = \frac{1}{h},$$

$$u^{(2)}(x_{i+1}) = 0, \quad k_{i+1}u^{(2)}(x_{i+1}) = -\frac{1}{h},$$

причем

$$P_i^h(x) = \frac{u^{(2)}(x)}{u^{(2)}(x_{i-1})}, \quad Q_i^h(x) = \frac{u^{(1)}(x)}{u^{(1)}(x_{i+1})},$$

$$u^{(1)}(x_{i+1}) \neq 0, \quad u^{(2)}(x_{i-1}) \neq 0, \quad (q \geq 0)$$

и $R_i^h(x)$ определяется через решение $u^{(3)}(x)$ исходного неоднородного уравнения $L^{(k,q,f)}u = 0$, удовлетворяющее условиям

$$u^{(3)}(x_{i-1}) = u^{(3)}(x_{i+1}) = 0, \quad R_i^h(x) = u^{(3)}(x).$$

Таким образом, точное решение в узлах сетки совпадает с решением разностных уравнений

$$y_i = P_i^h y_{i-1} + Q_i^h y_{i+1} + R_i^h, \quad y_0 = \bar{u}_1, \quad u_N = \bar{u}_2,$$

коэффициенты которых

$$P_i^h = P_i^h(x_i), \quad Q_i^h = Q_i^h(x_i), \quad R_i^h = R_i^h(x_i)$$

являются функционалами от $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$.

²⁾Нормировка производной произвольна. Начальные значения производных выбираются для удобства последующих вычислений.

Преобразуем условия, определяющие P_i^h , Q_i^h и R_i^h . Преобразование

$$s = \frac{x - x_i}{h}$$

переводит $u^{(1)}(x)$ и $u^{(2)}(x)$ в решения $\bar{u}^{(1)}(s)$ и $\bar{u}^{(2)}(s)$ уравнения

$$\frac{d}{ds} \left(\bar{k}(s) \frac{d\bar{u}}{ds} \right) - h^2 \bar{q}(s) \bar{u}(s) = 0, \quad -1 \leq s \leq 1,$$

$$\bar{k}(s) = k(x_i + sh), \quad \bar{q}(s) = q(x_i + sh),$$

удовлетворяющие условиям

$$\bar{u}^{(1)}(-1) = 0, \quad \bar{k}(-1) \bar{u}^{(1)'}(-1) = 1, \quad \bar{u}^{(2)}(1) = 0, \quad \bar{k}(1) \bar{u}^{(2)'}(1) = -1,$$

а $u^3(x)$ — в решение $\bar{u}^{(3)}(s)$ неоднородного уравнения

$$\frac{d}{ds} \left(\bar{k}(s) \frac{d\bar{u}^{(3)}}{ds} \right) - h^2 \bar{q}(s) \bar{u}^{(3)}(s) + h^2 \bar{f}(s) = 0, \quad \bar{f}(s) = f(x_i + sh),$$

определяемое условиями

$$\bar{u}^{(3)}(-1) = \bar{u}^{(3)}(1) = 0.$$

Рассмотрим функционалы

$$P^h[\bar{k}(s), \bar{q}(s)] = \frac{\bar{u}^{(2)}(0)}{\bar{u}^{(2)}(-1)}, \quad Q^h[\bar{k}(s), \bar{q}(s)] = \frac{\bar{u}^{(1)}(0)}{\bar{u}^{(1)}(1)},$$

$$R^h[\bar{k}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s)] = \bar{u}^{(3)}(0),$$

зависящие от $\bar{k}(s)$, $\bar{q}(s)$, $\bar{f}(s)$.

Точная разностная схема является однородной схемой и определяется характеристическим функционалом

$$\Phi^h = \bar{u}_0 - P^h \bar{u}_{-1} - Q^h \bar{u}_1 - R^h.$$

Однако практически точной схемой не пользуются ввиду сложности определения ее коэффициентов. Для решения рассматриваемой краевой задачи пользуются различными семействами «допустимых» схем, коэффициенты которых вычисляются достаточно просто.

В частности, широко распространены дискретные схемы, определяемые при помощи значений коэффициентов уравнения лишь в узловых точках сетки (например, схема примера 1).

Для построения теории однородных разностных схем надо задать исходное семейство схем, найти функциональный класс коэффициентов дифференциального уравнения, в котором схемы из исходного семейства сходятся, а также выяснить вопросы о точности отдельных схем.

3. Об аппроксимации и точности разностных схем [6]. Рассмотрим класс дифференциальных уравнений $L^{(k)}u = 0$, определенный для $k(x) \in \mathcal{K}$, и однородную разностную схему $L_h^{(k)}u^h$, определенную для того же класса коэффициентов.

Пусть $\Phi^h[\bar{u}, \bar{k}(s)]$ есть производящий функционал схемы $L^{(k)}u^h$, определенный на шаблонах \mathfrak{M}_0 ($-m_1 \leq m \leq m_2$) и Σ_0 ($-m_1 \leq s \leq m_2$). Пусть \bar{x} — фиксированная точка в области определения оператора $L^{(k)}v$ и $v(x)$ — некоторая функция, заданная в окрестности этой точки. Функция $v(x)$ индуцирует с помощью шаблона

$$\mathfrak{M}_{\bar{x}}^h = \{\bar{x} + mh, m \in \mathfrak{M}_0\} \text{ сеточную функцию}$$

$$\bar{v}_{\bar{x}}^h = \{v(\bar{x} + mh), m \in \mathfrak{M}_0\} \text{ на шаблоне } \mathfrak{M}_0.$$

Рассмотрим величину

$$L_h^{(k)}\bar{v}_{\bar{x}}^h = \Phi^h[v(\bar{x} + mh), k(\bar{x} + sh)]$$

и разность

$$\varphi(\bar{x}, v, h) = L_h^{(k_0)}\bar{v}_{\bar{x}}^h - (L^{(k_0)}v)_{x=\bar{x}},$$

где $k_0(x)$ — некоторый фиксированный коэффициент из класса \mathcal{K} ; функцию φ назовем погрешностью аппроксимации в точке \bar{x} оператором $L_h^{(k_0)}$ оператора $L^{(k_0)}$ или погрешностью аппроксимации для оператора $L_h^{(k_0)}$.

Будем говорить, что разностный оператор $L_h^{(k_0)}$ в точке \bar{x} при $h \rightarrow 0$ имеет n -й порядок аппроксимации относительно дифференциального оператора $L^{(k_0)}$, если можно указать такое m , что для любой m -кратно дифференцируемой функции $v(x) \in C^{(m)}$ имеет место оценка

$$\varphi(\bar{x}, v, h) = O(h^n) \quad \text{или} \quad |\varphi(\bar{x}, v, h)| \leq Mh^n,$$

где M — константа, зависящая от \bar{x} , $v(x)$ и $k_0(x)$.

Будем говорить, что разностная схема $L_h^{(k)}$ в точке \bar{x} имеет n -й порядок аппроксимации относительно $L^{(k)}$ в классе коэффициентов \mathcal{K} , если для любого фиксированного коэффициента $k_0(x) \in \mathcal{K}$ разностный оператор $L_h^{(k_0)}$ в точке \bar{x} имеет n -й порядок аппроксимации.

Пусть $u(x)$ — решение уравнения

$$L^{(k)}u = 0,$$

удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям $lu = 0$ (задача I), а $u^h = \{u_i^h\}$ — решение разностного уравнения

$$L_h^{(k)}u_i^h = 0$$

с соответствующими дополнительными условиями $l_h u^h = 0$ (задача II).

Разность $z_i^h = u_i^h - u(x_i)$ представляет погрешность, допускаемую при решении исходной задачи; в дальнейшем будем эту разность оценивать по норме $\|z_i^h\|_1 = \max_i |z_i^h|$, где \max берется по всем точкам сетки, на которой задана функция z_i^h .

Будем говорить, что решение разностной задачи (II) сходится к решению задачи (I) в классе \mathcal{K} , если

$$\|z_i^h\|_1 \leq \rho(h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0$$

для любого коэффициента $k(x) \in \mathcal{K}$.

Если же $\|z_i^h\|_1 = O(h^n)$ или $\|z_i^h\|_1 \leq Mh^n$, где M — постоянная, зависящая только от выбора коэффициента $k(x)$, то будем говорить, что задача (II) имеет n -й порядок точности.

Точность разностной задачи зависит как от выбора разностной схемы, так и от выбора разностных краевых условий. Если краевые условия для задач (I) и (II) совпадают (это имеет место, например, для первой краевой задачи; см. п. 4 введения), то точность разностной краевой задачи полностью определяется выбором разностной схемы. В этом случае можно говорить, что «разностная схема сходится», или «разностная схема имеет n -й порядок точности».

Если схема $L_h^{(k)}$ линейна, то для функции z_i^h получается следующее уравнение:

$$L_h^{(k)}z_i^h = -\varphi_i^h, \quad \text{где} \quad \varphi_i^h = L_h^{(k)}u_i - (L^{(k)}u)_i$$

— погрешность аппроксимации в точке x_i для разностного оператора $L_h^{(k)}$, взятая на решении $u(x)$ дифференциального уравнения $L^{(k)}u = 0$.

Порядки аппроксимации, рассматриваемые на семействе достаточно гладких функций $v(x) \in C^{(m)}$ и на семействе решений уравнений $L^{(k)}u = 0$, могут быть существенно различными.

Будем говорить, что однородные разностные схемы $\bar{L}_h^{(k)}$ и $\bar{\bar{L}}_h^{(k)}$, определенные в одном и том же классе \mathcal{K} , имеют n -й порядок эквивалентности в смысле аппроксимации в точке $x = \bar{x}$, если для любого $k(x) \in \mathcal{K}$

$$\varphi(\bar{x}, v; h) = (\bar{L}_h^{(k)} v)_{x=\bar{x}} - (\bar{\bar{L}}_h^{(k)} v)_{x=\bar{x}} = O(h^n),$$

где $v(x)$ — любая достаточно гладкая функция, т. е. $|\varphi(\bar{x}, v; h)| \leq Mh^n$, M — константа, зависящая от выбора $k(x)$, $v(x)$ и \bar{x} .

Пусть \bar{y}_i^h и $\bar{\bar{y}}_i^h$ — решения уравнений $\bar{L}_h^{(k)}\bar{y}_i^h = 0$ и $\bar{\bar{L}}_h^{(k)}\bar{\bar{y}}_i^h = 0$ с дополнительными условиями $\bar{l}_h^{(k)}\bar{y}^h = 0$ и $\bar{\bar{l}}_h^{(k)}\bar{\bar{y}}^h = 0$ (задачи Π' и Π'').

Будем говорить, что разностные краевые задачи (Π') и (Π'') имеют n -й порядок эквивалентности в классе \mathcal{K} , если для любого $k(x) \in \mathcal{K}$

$$\|\bar{y}_i^h - \bar{\bar{y}}_i^h\|_1 \leq Mh^n,$$

где M — константа, зависящая от выбора $k(x)$ и не зависящая от h .

Очевидно, что при изучении разностных задач их можно заменять эквивалентными задачами и в классе эквивалентных задач выбирать разностные схемы наиболее простой структуры.

4. Основные результаты работы. В данной статье мы проводим изучение однородных схем для решения первой краевой задачи

$$L^{(k,q,f)}u = \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u + f(x) = 0 \quad (0 < x < 1), \quad (I)$$

$$u(0) = \bar{u}_1, \quad u(1) = \bar{u}_2,$$

коэффициенты которой k, q, f являются кусочно-непрерывными функциями ($k, q, f \in Q^{(0)}$), причем $k(x) \geq M > 0$, $q(x) \geq 0$.

В § 1 в качестве исходного семейства разностных схем мы рассматриваем трехточечные однородные разностные схемы $\bar{L}_h^{(k,q,f)}$, характеризуемые линейным производящим функционалом

$$\Phi^h[\bar{u}(m), \bar{k}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s)] =$$

$$= \frac{1}{h^2} [B^{(h,\bar{k})}(\bar{u}_1 - \bar{u}_0) - A^{(h,\bar{k})}(\bar{u}_0 - \bar{u}_{-1})] - D^{(h,\bar{q})}\bar{u}_0 + F^{(h,\bar{f})},$$

каждый из коэффициентов которого является функционалом только одного коэффициента дифференциального уравнения (I):

$$\left. \begin{aligned} A^{(h, \bar{k})} &= A^h[\bar{k}(s)], & B^{(h, \bar{k})} &= B^h[\bar{k}(s)], \\ D^{(h, \bar{q})} &= D^h[\bar{q}(s)], & F^{(h, \bar{f})} &= F^h[\bar{f}(s)] \end{aligned} \right\}, \quad -1 \leq s \leq 1.$$

При этом D^h и F^h — линейные функционалы. Такие схемы обычно применяются на практике, и мы их назовем **стандартными схемами**.

Одной из характеристик качества схемы является ее погрешность аппроксимации

$$\varphi(\bar{x}, u; h) = (L_h^{(k, q, f)} u)_{x=\bar{x}} - (L^{(k, q, f)} u)_{x=\bar{x}},$$

где $u(x)$ — решение уравнения (I).

Для выяснения порядка аппроксимации при $h \rightarrow 0$ необходимо функцию $\varphi(\bar{x}, u; h)$ разложить по параметру h и вычислить коэффициенты при степенях h до r -го порядка. Такое разложение возможно, если шаблонные функционалы A^h , B^h , D^h и F^h имеют производные соответствующего порядка как по параметру h , так и по своему функциональному аргументу.

Вводится определение ранга функционала, включающее кроме требований дифференцируемости, требования однородности, монотонности и нормировки.

Опираясь на понятие ранга шаблонных функционалов, мы рассматриваем различные классы $\mathcal{L}(n_1, n_2, n_3)$ схем, у которых функционалы A^h и B^h имеют ранг n_1 , функционалы D^h и F^h имеют ранги n_2 , n_3 и определены на отрезке $-0,5 \leq s \leq 0,5$.

Если $n_1 = n_2 = n_3 = n$, то мы говорим, что $L_h^{(k, q, f)}$ является схемой n -го ранга.

Рассматриваются специальные семейства схем: консервативные, или самосопряженные ($B^h[\bar{k}(s)] = A^h[\bar{k}(1+s)]$), дискретные и канонические схемы, шаблонные функционалы которых не зависят от параметра h .

Выяснив необходимые и достаточные условия n -го порядка аппроксимации схемы $L_h^{(k, q, f)}$ ($n = 1, 2$), которые формулируются в виде ряда соотношений (У. А. n) для моментов функционалов схемы, мы переходим в § 2 к изучению вопросов сходимости и точности исходных схем в некотором классе гладких коэффициентов $C^{(m)}$ ³⁾. Доказано, что для того, чтобы

³⁾Обозначения $C^{(m)}$ и $Q^{(m)}$ см. в п. 1, § 1.

исходная схема $L_h^{(k,q,f)}$ из класса $\mathcal{L}(n+1, n, n)$ для коэффициентов

$$k(x) \in C^{(m_k)}, m_k \geq n+1; q(x) \in C^{(m_q)}, m_q \geq n; f(x) \in C^{(m_f)}, m_f \geq n,$$

имела n -й порядок точности, не только достаточно, но и необходимо, чтобы она имела такой же порядок аппроксимации (теорема 1).

Для доказательства этой теоремы используется аппарат разностной функции Грина оператора $L_h^{(k,q)}$. В п. 2 дано построение функции Грина, а в п. 3 даются равномерные оценки снизу и сверху для функции Грина, а также для ее первых разностных отношений.

Отметим, что при изучении сходимости и точности схем в классе гладких коэффициентов мы пользуемся нормой

$$\|\psi\|_1 = \max_{0 < i < N} |\psi_i|,$$

а в классе разрывных коэффициентов — нормами

$$\|\psi\|_3 = \sum_{i=1}^{N-1} |\psi_i| h \quad \text{и} \quad \|\psi\|_2 = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=1}^i \psi_s h \right|.$$

Если в классе $C^{(m)}$ порядок точности схемы $L_h^{(k,q,f)}$ совпадает с порядком аппроксимации, то в классе разрывных коэффициентов такой связи нет. Достаточно вспомнить разобранный выше пример 1. Указанная там схема имеет второй порядок аппроксимации (как это нетрудно проверить) и, следовательно, имеет второй порядок точности в классе $C^{(m)}$ ($m \geq 3$) и тем не менее расходится в классе разрывных коэффициентов $k(x) \in Q^m$ (при любом $m \geq 0$).

Исследование функции $\varphi(\bar{x}, u; h)$ в точках сетки, смежных с точкой разрыва ξ ($x_n \leq \xi \leq x_{n+1}$) коэффициента $k(x)$, показывает, что погрешность аппроксимации φ_n^h и φ_{n+1}^h при $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$, вообще говоря, стремится к бесконечности при $h \rightarrow 0$. Однако это не исключает возможности решения разностного уравнения к решению уравнения (I). Возникает вопрос: какими свойствами должна обладать схема $L_h^{(k,q,f)}$ для сходимости в классе $Q^{(m)}$?

В § 3 доказывается основная лемма, дающая необходимое условие, которому должна удовлетворять схема $L_h^{(k,q,f)}$ для сходимости в классе $Q^{(m)}$. Это условие имеет вид

$$\Delta(\xi, h) = h(B_n^h \varphi_{n+1}^h + A_{n+1}^h \varphi_n^h) = \rho(h) \rightarrow 0 \quad (6)$$

или

$$\frac{B_n^h B_{n+1}^h}{k_n} - \frac{A_n^h A_{n+1}^h}{k_n} = \rho(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0, \quad (6')$$

где $k_n = k(\xi - 0)$, $k_{n+1} = k(\xi + 0)$.

Если мы хотим, чтобы схема $L_h^{(k,q,f)}$ в $Q^{(m)}$ имела 2-й порядок точности, то необходимо удовлетворить двум условиям:

$$h^2 \varphi_n^h = O(h^2), \quad h^2 \varphi_{n+1}^h = O(h^2), \quad (a_2)$$

$$\Delta(\xi, h) = O(h^2). \quad (6_2)$$

Следует отметить, что любая консервативная схема нулевого ранга удовлетворяет необходимому условию сходимости.

Доказано, что условие (6) является для схемы типа $\mathcal{L}(1, 0, 0)$ не только необходимым, но и достаточным для сходимости схемы $L_h^{(k,q,f)}$ в классе коэффициентов $k(x) \in Q^{(1)}$, $q, f \in Q^{(0)}$ (теорема 3, § 3).

При вычислении коэффициентов разностной схемы, вообще говоря, всегда допускается некоторая погрешность. Это может происходить из-за недостаточной информации о коэффициентах k, q, f уравнения (I): например, функции $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ могут определяться приближенно (с помощью некоторого вычислительного алгоритма) на дискретном множестве точек. Кроме того, может оказаться, что шаблонные функционалы схемы вычисляются приближенно.

Отсюда ясно, насколько важной является задача изучения схем с возмущенными коэффициентами.

В § 4 вводится норма возмущения коэффициентов схемы и с ее помощью дается определение коэффициенто-устойчивой (ко-устойчивой) разностной схемы. При малом искажении коэффициентов схемы «возмущенная» схема должна сходиться при $h \rightarrow 0$ в $Q^{(m)}$, т. е. $\|\tilde{y} - u\|_1 = \rho(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, если

$$\|\tilde{A}^h - A^h\|_3 = \sum_{i=1}^{N-1} |\tilde{A}_i^h - A_i^h| h = \rho(h), \quad \|\tilde{B}^h - B^h\|_3 = \rho(h);$$

$$\|\tilde{D}^h - D^h\|_3 = \rho(h), \quad \|\tilde{F}^h - F^h\|_3 = \rho(h),$$

(все $\rho(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$), где \tilde{y}_i — решение разностной краевой задачи с возмущенными коэффициентами \tilde{A}_i^h , \tilde{B}_i^h , \tilde{D}_i^h , \tilde{F}_i^h , а $u(x)$ — решение задачи (I).

Доказано, что необходимым и достаточным условием коэффициентоустойчивости канонической схемы является ее консервативность. В последующих параграфах мы занимаемся изучением только консервативных схем.

В § 5 проводится изучение вопросов сходимости и точности консервативных разностных схем. Доказано, что консервативная схема нулевого ранга сходится в классе кусочно-непрерывных коэффициентов $(k, q, f \in Q^{(0)})$; любая консервативная схема первого ранга имеет в классе коэффициентов $Q^{(m)}$ ($m \geq 1$) первый порядок точности; любая консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ второго ранга, удовлетворяющая условиям второго порядка аппроксимации (У. А. 2), имеет в классе $C^{(2)}$ второй порядок точности, а в классе Q^m (при любом $m \geq 1$), вообще говоря, первый порядок точности.

Следует отметить, что для доказательства указанных теорем о сходимости и точности разностных схем использовалась установленная в § 2 априорная оценка

$$\|z\|_1 \leq M \|\varphi\|_2,$$

где z — погрешность решения разностной краевой задачи, а φ — погрешность аппроксимации схемы $L_h^{(k,q,f)}$ на решении задачи (I).

Оценка погрешности аппроксимации φ по норме $\|\cdot\|_2$ позволяет, кроме того, снизить ранг шаблонных функционалов и порядок m классов $C^{(m)}$ или $Q^{(m)}$ коэффициентов уравнения (I).

Таким образом, перечисленные результаты дают ответ на поставленный выше вопрос о выделении схем сквозного счета, пригодных для решения краевых задач для уравнения (I) в классе $Q^{(m)}$ ($m \geq 0$) разрывных коэффициентов без явного выделения при этом точек разрыва.

Как показано, схемы сквозного счета принадлежат к семейству консервативных разностных схем.

Полученные в данной работе результаты используются для построения разностных схем сквозного счета при решении уравнений параболического типа с разрывными коэффициентами (см. [20]).

В заключение укажем несколько вопросов, выходящих за рамки настоящей статьи. Результаты данной работы без существенных изменений переносятся на класс краевых задач, соответствующих граничным условиям третьего рода. Мы не рассматриваем здесь весьма важных вопросов о схемах второго порядка точности в классе разрывных коэффициентов, о наилучшей канонической схеме второго порядка точности, о точности разностных методов решения задачи Штурма–Лиувилля в классе разрывных

коэффициентов, а также об однородных разностных схемах на неравномерных сетках.

Проведенные здесь исследования ставят также ряд аналогичных вопросов для случая многих независимых переменных. Эти вопросы будут рассмотрены в последующих статьях.

§ 1. Исходное семейство разностных схем

В § 1 дается характеристика семейств разностных схем для дифференциального уравнения (I) в классе $Q^{(0)}$ кусочно-непрерывных коэффициентов. Рассматриваются различные схемы из этого семейства: канонические, дискретные и консервативные, имеющие большое значение для последующей теории.

1. Краевая задача для дифференциального уравнения. Выяснение поставленных во введении вопросов для однородных разностных схем мы будем проводить на примере обыкновенного дифференциального уравнения

$$L^{(k,q,f)}u = L^{(k)}u - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

где

$$L^{(k)}u = \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right].$$

Все изложение проведем для первой краевой задачи

$$L^{(k,q,f)}u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \bar{u}_1, \quad u(1) = \bar{u}_2. \quad (\text{задача (I)})$$

Класс краевых задач (I) определен, если указаны семейства функций, которым принадлежат коэффициенты уравнения $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$.

Обозначим $C^{(n)}[a, b]$ — класс функций, имеющих на отрезке $a \leq x \leq b$ непрерывную n -ю производную, а $Q^{(n)}[a, b]$ — класс функций, кусочно-непрерывных на отрезке $[a, b]$ вместе с производными до n -го порядка включительно. Для класса функций $C^{(n)}[0, 1]$ ($Q^{(n)}[0, 1]$) мы будем пользоваться обозначением $C^{(n)}$ ($Q^{(n)}$).

В дальнейшем всюду предполагается, что коэффициенты уравнения (I) удовлетворяют условиям

$$0 < M_1 \leq k(x) \leq M_2, \quad 0 \leq q(x) \leq M_3, \quad |f(x)| \leq M_4, \quad (\alpha)$$

где M_j ($j = 1, 2, 3, 4$) — положительные постоянные. Условия (α) мы включаем в постановку задачи (I).

Нам понадобятся следующие свойства решения задачи (I):

1) если $k(x) \in C^{(r+1)}$, $q(x) \in C^{(r)}$, $f(x) \in C^{(r)}$, то и $u(x) \in C^{(r+2)}$ ($r \geq 0$);

2) если $k(x) \in Q^{(m)}$ ($m \geq 0$) и в точке $x = \xi$ имеет разрыв ($k_{л} \neq k_{п}$, где $k_{л} = k(\xi - 0)$, $k_{п} = k(\xi + 0)$), то решение уравнения (I) удовлетворяет условиям сопряжения

$$u(\xi - 0) = u(\xi + 0) = u(\xi), \quad k_{л}u'_{л} = k_{п}u'_{п},$$

или

$$[u] = 0, \quad [ku'] = 0 \quad \text{при} \quad x = \xi.$$

2. Исходное семейство однородных разностных схем. Рассмотрим на $0 \leq x \leq 1$ сетку $S_h = \{x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_i = ih, \dots, x_N = Nh = 1\}$ и обозначим через y_i сетчатую функцию.

Краевой задаче (I) поставим в соответствие разностную краевую задачу

$$L_h^{(k,q,f)} y_i = 0, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = \bar{u}_1, \quad y_N = \bar{u}_2, \quad (\text{задача (II)})$$

где $L_h^{(k,q,f)}$ — однородная стандартная трехточечная разностная схема, определяемая формулами

$$L_h^{(k,q,f)} y_i = L_h^{(k)} y_i - D_i^{(h,q)} y_i + F_i^{(h,f)}, \quad (2)$$

$$L_h^{(k)} y_i = \frac{1}{h^2} [B_i^{(h,k)} \Delta y_i - A_i^{(h,k)} \nabla y_i], \quad (3)$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \nabla y_i = y_i - y_{i-1}.$$

Особенность рассматриваемых нами схем состоит в том, что каждый из коэффициентов разностной схемы $L_h^{(k,q,f)}$ является функционалом только одного коэффициента дифференциального уравнения (I). Мы предполагаем, что стандартная трехточечная разностная схема однородна. Это значит, что она имеет производящий функционал вида

$$\begin{aligned} \Phi^h[\bar{v}(m), \bar{k}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s)] &= \\ &= \frac{1}{h^2} [B^{(h,\bar{k})} \Delta \bar{v}_0 - A^{(h,\bar{k})} \nabla \bar{v}_0] - D^{(h,\bar{q})} \bar{v}_0 + F^{(h,\bar{f})}, \quad (4) \end{aligned}$$

где $m = -1, 0, 1$,

$$\begin{aligned} A^{(h,\bar{k})} &= A^h[\bar{k}(s)], & B^{(h,\bar{k})} &= B^h[\bar{k}(s)], \\ D^{(h,\bar{q})} &= D^h[\bar{q}(s)], & F^{(h,\bar{f})} &= F^h[\bar{f}(s)], \end{aligned} \quad (5)$$

причем шаблонные функционалы $A^h[\psi(s)]$, $B^h[\psi(s)]$, $D^h[\psi(s)]$, $F^h[\psi(s)]$ определены для кусочно-непрерывных функций $\psi(s) \in Q^{(0)}[-1, 1]$, заданных для $-1 \leq s \leq 1$, и зависят, вообще говоря, от параметра h .

Коэффициенты разностной схемы в каждой точке вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A_i^{(h,k)} &= A^h[\bar{k}_i(s)], & B_i^{(h,k)} &= B^h[\bar{k}_i(s)], & \bar{k}_i(s) &= k(x_i + sh), \\ D_i^{(h,q)} &= D^h[\bar{q}_i(s)], & \bar{q}_i(s) &= q(x_i + sh), \\ F_i^{(h,f)} &= F^h[\bar{f}_i(s)], & \bar{f}_i(s) &= f(x_i + sh), \end{aligned} \quad (6)$$

где $f_i(s) = f(x_i + sh)$.

В соответствии с определением однородной схемы имеем

$$L_h^{(k,q,f)} v_i = \Phi^h[v(x_i + mh), k(x_i + sh), q(x_i + sh), f(x_i + sh)], \quad (7)$$

где $m = -1, 0, 1$, $-1 \leq s \leq 1$.

Следует отметить, что трехточечность рассматриваемой разностной схемы является следствием ее однородности.

Разностная краевая задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных y_1, y_2, \dots, y_{N-1} . Нетрудно убедиться (см. § 2) в том, что эта задача всегда разрешима, если во всех точках $i = 1, 2, \dots, N - 1$ выполнены условия

$$A_i^{(h,k)} > 0, \quad B_i^{(h,k)} > 0, \quad D_i^{(h,q)} \geq 0.$$

В дальнейшем, говоря «исходное семейство разностных схем», мы имеем в виду однородные трехточечные стандартные схемы, определяемые формулами (2), (3), (6).

3. Функционалы r -го ранга. Для более детальной характеристики исходного семейства разностных схем надо задать класс ее «шаблонных» функционалов A^h , B^h , D^h и F^h . В дальнейшем нам потребуется разложение коэффициентов схемы (например, $A_i^{(h,k)} = A^h[k(x_i + sh)]$) по степеням h ,

что оказывается возможным, если сами шаблонные функционалы обладают некоторыми свойствами дифференцируемости как по своему функциональному аргументу, так и по параметру h .

Будем называть $A^h[\psi]$ функционалом r -го ранга ($r \geq 0$), если выполнены условия:

$I^{(r)}$. Имеет место разложение

$$A^h[\psi] = \sum_{\sigma=0}^r h^\sigma A^{(\sigma)}[\psi] + h^r \rho(h, \psi), \quad (8)$$

где $|\rho(h, \psi)| \leq \rho(h)^4$, если $|\psi| \leq M$ (M — положительная постоянная).

Каждый из функционалов $A^{(\sigma)}[\psi]$ ($\sigma = 0, 1, 2, \dots, r$) имеет дифференциал⁵⁾ порядка $r - \sigma$ для любой функции $\psi \in Q^{(0)}$; это означает, например, что для $A^{(0)}[\psi]$ можно написать

$$\begin{aligned} A^{(0)}[\psi + \delta \cdot \varphi] &= \\ &= A^{(0)}[\psi] + \delta \cdot A_1^{(0)}[\psi, \varphi] + \dots + \delta^r A_r^{(0)}[\psi, \varphi] + \delta^r \rho(\delta, \psi, \varphi), \end{aligned} \quad (9)$$

где $|\rho| \leq \rho(\delta)$, если $|\varphi| \leq M$ ($\rho(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$).

$\Pi^{(r)}$. Функционал $A^h[\psi]$ и, следовательно, все функционалы $A^{(\sigma)}[\psi]$ ($\sigma = 0, 1, \dots, r$) являются однородными функционалами первой степени:

$$A^h[c\psi] = cA^h[\psi], \quad A^{(\sigma)}[c\psi] = cA^{(\sigma)}[\psi], \quad (10)$$

где c — положительная постоянная.

$\text{III}^{(r)}$. Функционалы $A^h[\psi]$ и $A^{(\sigma)}[\psi]$ ($\sigma = 0, 1, \dots, r$) являются неубывающими, т. е.

$$A^h[\psi_2] \geq A^h[\psi_1], \quad \text{если } \psi_2 \geq \psi_1, \quad (11)$$

причем $A^h[\psi]$ — нормированный функционал, т. е.

$$A^h[1] = 1. \quad (12)$$

⁴⁾В дальнейшем будем обозначать $\rho(h)$ величины, стремящиеся к нулю при $h \rightarrow 0$. Этим же символом мы будем пользоваться и в случае нескольких аргументов для обозначения выражения, равномерно стремящегося к нулю при $h \rightarrow 0$.

⁵⁾См. *Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А. Основы вариационного исчисления. Т. I, ч. II. — М.-Л., 1935. — гл. VI.*

Если $A^h[\psi]$ — линейный функционал, то все функционалы $A^{(\sigma)}[\psi]$ также линейны. Поэтому требование дифференцируемости в условии $I^{(r)}$ выполняется автоматически. Кроме того, условие $II^{(r)}$ является непосредственным следствием линейности.

Если $A^h[\psi]$ — функционал r -го ранга, то

$$A^{(0)}[1] = 1, \quad A^{(\sigma)}[1] = 0 \quad \text{для } \sigma = 1, 2, \dots, r. \quad (13)$$

В дальнейшем мы пользуемся обозначением

$$A_m^{(\sigma)}[\varphi] = A_m^{(\sigma)}[1, \varphi] \quad (\psi \equiv 1). \quad (14)$$

Пусть $A^h[\psi]$ — функционал r -го ранга. На основании $I^{(r)}$ и $II^{(r)}$, для любой $k(x) \in C^{(r)}$, удовлетворяющей условию $k(x) \geq M_1 > 0$, имеет место разложение

$$\begin{aligned} A_i^{(h,k)} &= A^h[k(x_i + sh)] = k_i + hk'_i A_1^{(0)}[s] + \\ &+ h^2 \left\{ k'_i A_1^{(1)}[s] + \frac{(k'_i)^2}{k_i} A_2^{(0)}[s] + \frac{k''_i}{2} A_1^{(0)}[s^2] \right\} + \dots + h^r \rho(h). \end{aligned} \quad (15)$$

В самом деле, в силу $II^{(r)}$

$$\begin{aligned} A_i^{(h,k)} &= A^h \left[k_i \left(1 + \frac{k(x_i + sh) - k_i}{k_i} \right) \right] = \\ &= k_i A^h \left[1 + \frac{h}{k_i} \left(k'_i s + \frac{k''_i s^2}{2} h + \dots + h^{r-1} \rho(h) \right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Пользуясь теперь разложениями $I^{(r)}$ и, учитывая также свойства линейного $A_1^{(0)}[\psi]$, квадратичного $A_2^{(0)}[\psi]$ и т. д. функционалов, приходим к формуле (15).

Отметим некоторые свойства однородных функционалов первой степени опуская доказательство.

Л е м м а 1. *Любой однородный функционал $A[\psi]$ первой степени, имеющий дифференциал первого порядка $A_1[f, \varphi]$, можно представить в виде*

$$A[f] = A_1[f, f].$$

Эта лемма является аналогом известной теоремы Эйлера об однородных функциях.

Лемма 2. Если $A[f]$ — однородный функционал первой степени, а $A_k[f, \varphi]$ — его дифференциал k -го порядка, то

$$A_k[cf, \varphi] = \frac{1}{c^{k-1}} A_k[f, \varphi], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где c — любая положительная постоянная. В частности, $A_1[cf, \varphi]$ не зависит от c :

$$A_1[cf, \varphi] = A_1[f, \varphi].$$

Лемма 3. Дифференциал $A_1[f, \varphi]$ неубывающего нормированного однородного функционала первой степени $A[f]$ является линейным положительным функционалом по аргументу φ .

Лемма 4. Если $A[f]$ — неубывающий нормированный однородный функционал первой степени, имеющий дифференциал первого порядка, то

$$0 \leq \frac{A_1[f, \varphi]}{A[f]} \leq 1, \quad \text{если } 0 \leq \varphi \leq f, \quad f \geq \varepsilon > 0. \quad (18)$$

Эти леммы будут использованы в дальнейшем (например, в § 4, § 6 и др.).

4. Классы разностных схем $\mathcal{L}(n_1, n_2, n_3)$. Рассмотрим разностную краевую задачу (II) и сравним ее решение y_i^h с решением $u(x)$ задачи (I). Характеристикой точности решения задачи (II) является разность

$$z_i^h = y_i^h - u(x_i), \quad (19)$$

которая, как нетрудно заметить, определяется условиями

$$L_h^{(k,q)} z_i^h = -\varphi_i^h, \quad 0 < i < N, \quad z_0^h = 0, \quad z_N^h = 0, \quad (\text{задача (III)})$$

где

$$L_h^{(k,q)} z_i^h = L_h^{(k)} z_i^h - D_i^{(h,q)} z_i^h, \quad (20)$$

$$\varphi_i^h = L_h^{(k,q,f)} u_i - (L^{(k,q,f)} u)_i \quad (21)$$

обозначает погрешность аппроксимации схемы $L_h^{(k,q,f)}$ в узловой точке $x = x_i$ сетки S_h , взятую на решении $u(x)$ задачи (I).

В силу однородности схемы погрешность аппроксимации можно рассматривать в любой фиксированной точке $x = \bar{x}$ интервала $0 < x < 1$:

$$\varphi(x, v; h) = (L_h^{(k,q,f)} v)_{x=\bar{x}} - (L^{(k,q,f)} v)_{x=\bar{x}},$$

где $v(x)$ — любая достаточно гладкая функция, $h \leq h_0 < 1$, h_0 — расстояние от точки $x = \bar{x}$ до границы отрезка $[0, 1]$.

Для выяснения вопроса о порядке аппроксимации схемы необходимо иметь разложение функции $\varphi(x, v; h)$ в ряд по степеням h . Для этого мы должны формулировать свойства дифференцируемости шаблонных функционалов, пользуясь определением ранга функционала.

Будем говорить, что разностная схема $L_h^{(k,q,f)}$ из исходного семейства принадлежит классу схем $\mathcal{L}(n_1, n_2, n_3)$, если функционалы $B^h[\psi]$ и $A^h[\psi]$ имеют ранг n_1 , а функционалы $D^h[\psi(s)]$ и $F^h[\psi(s)]$ соответственно имеют ранг n_2 , ранг n_3 , линейны и определены для функций из $Q^{(0)}$, заданных на отрезке $-0,5 \leq s \leq 0,5$ ($\psi \in Q^{(0)}[-0,5, 0,5]$).

Аналогично определяются классы $\mathcal{L}(n_1)$ и $\mathcal{L}(n_1, n_2)$ для схем $L_h^{(k)}$ и $L_h^{(k,q)}$ соответственно.

Схемы $L_h^{(k,q,f)}$ из класса $\mathcal{L}(n_1, n_2, n_3)$ будем называть схемами n -го ранга (все шаблонные функционалы имеют ранг n). Схемой n -го ранга является любая схема $L_h^{(k)}$ из $\mathcal{L}(n)$.

5. Погрешность аппроксимации. Перейдем к вычислению погрешности аппроксимации для схем из класса $\mathcal{L}(n_1, n_2, n_3)$ (обычно $n_2 = n_3$).

Рассмотрим схему $L_h^{(k,q,f)}$ из класса $\mathcal{L}(n+1, n, n)$ и предположим, что $k(x) \in C^{(n+1)}$, $q(x) \in C^{(n)}$, $f(x) \in C^{(n)}$, а функция $v(x) \in C^{(n+2)}$, где $n \geq 0$; решение $u(x)$ уравнения (1), в частности, принадлежит $C^{(n+2)}$, если k, q, f удовлетворяют указанным выше требованиям (см. п. 1); поэтому можно брать $v = u(x)$.

Воспользуемся разложениями $A_i^{(h,k)}$ и $B_i^{(h,k)}$ по формуле (15) для $r = n+1$, а для $D_i^{(h,q)}$ (и $F_i^{(h,f)}$) — разложением по h :

$$D_i^{(h,q)} = D^h[q(x_i + sh)] = \sum_{\sigma=0}^n D^{(\sigma)}[q(x_i + sh)]h^\sigma + h^n \rho(h) = \\ = q_i + hq_i' D^{(0)}[s] + \dots + h^n \rho(h). \quad (22)$$

Учитывая затем разложение функции $v(x)$ в окрестности точки $x = \bar{x}$

$$v(\bar{x} + sh) = v(\bar{x}) + shv'(\bar{x}) + \dots + \frac{(sh)^{n+2}}{(n+2)!} v^{(n+2)}(\bar{x}) + h^{n+2} \rho(h),$$

получим

$$\varphi(x, v; h)|_{x=\bar{x}} = \varphi^{(0)} + h\varphi^{(1)} + \dots + h^n \varphi^{(n)} + h^n \rho(h). \quad (23)$$

Коэффициенты $\varphi^{(j)} = \varphi^{(j)}(x, v)|_{x=\bar{x}}$ ($j = 0, 1, \dots, n$) при степенях h^j зависят от функций v, k, q, f и их производных. В дальнейшем нам понадобятся выражения для $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$:

$$\varphi^{(0)} = a_0 k'(\bar{x}) v'(\bar{x}), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} = a_1 k'(\bar{x}) v'(\bar{x}) + a_2 \frac{(k'(\bar{x}))^2}{k(\bar{x})} v'(\bar{x}) + a_3 k''(\bar{x}) v(\bar{x}) + \\ + a_4 k(\bar{x}) v''(\bar{x}) + b_1 q'(\bar{x}) v(\bar{x}) + c_1 f'(\bar{x}), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= B_1^{(0)}[s] - A_1^{(0)}[s] - 1, & a_1 &= B_1^{(1)}[s] - A_1^{(1)}[s], \\ a_2 &= B_2^{(0)}[s] - A_2^{(0)}[s], & a_3 &= 0,5(B_1^{(0)}[s^2] - A_1^{(0)}[s^2]), \\ a_4 &= 0,5(B_1^{(0)}[s] + A_1^{(0)}[s]), & b_1 &= -D^{(0)}[s], & c_1 &= F^{(0)}[s]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

6. Порядок аппроксимации. Будем говорить, что однородная разностная схема $L_h^{(k,q,f)}$ имеет n -й порядок аппроксимации, если погрешность аппроксимации

$$\varphi(\bar{x}, v; h) = (L_h^{(k,q,f)} v)_{x=\bar{x}} - (L^{(k,q,f)} v)_{x=\bar{x}}$$

для этой схемы имеет n -й порядок малости по h :

$$\varphi(\bar{x}, v; h) = O(h^n)$$

для достаточно гладких функций $v(x), k(x), q(x)$ и $f(x)$, а именно: $k(x) \in C^{(n+1)}$, $q(x) \in C^{(n)}$, $f(x) \in C^{(n)}$, $v(x) \in C^{(m)}$, $m \geq n + 2$.

Из разложения (23) следует, что для того чтобы схема $L_h^{(k,q,f)}$ из класса $\mathcal{L}(n+1, n, n)$ имела n -й ($n = 1, 2$) порядок аппроксимации, необходимо и достаточно выполнение следующих условий аппроксимации (У. А.) для моментов шаблонных функционалов:

1) для схемы первого порядка ($n = 1$)

$$B_1^{(0)}[s] - A_1^{(0)}[s] = 1, \quad B^{(0)}[1] = A^{(0)}[1] = D^{(0)}[1] = F^{(0)}[1] = 1 \quad (\text{У. А. 1})$$

(условия нормировки шаблонных функционалов выполнены автоматически для схем рассматриваемого класса);

2) для схемы 2-го порядка ($n = 2$)

$$\left. \begin{aligned} B_1^{(0)}[s] &= 0,5, & A_1^{(0)}[s] &= -0,5, & B_1^{(0)}[s^2] &= A_1^{(0)}[s^2], \\ B_2^{(0)}[s] &= A_2^{(0)}[s], \\ B_1^{(1)}[s] &= A_1^{(1)}[s], & D^{(0)}[s] &= F^{(0)}[s] = 0, \\ A_1^{(1)}[1] &= B_1^{(1)}[1] = D^{(1)}[1] = F^{(1)}[1] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{У. А. 2})$$

(последние 4 условия являются следствием нормировки шаблонных функционалов).

7. Канонические схемы. Если шаблонные функционалы схемы $L_h^{(k,q,f)}$ не зависят от параметра h , то такие функционалы мы назовем каноническими, а схему $L_h^{(k,q,f)}$ — канонической схемой.

Каждой схеме $L_h^{(k,q,f)}$ исходного типа соответствует каноническая схема $\bar{L}_h^{(k,q,f)}$ того же ранга

$$\bar{L}_h^{(k,q,f)} y_i = \bar{L}_h^{(k)} y_i - D_i^{(0,q)} \cdot y_i + F_0^{(0,f)},$$

где

$$\bar{L}_h^{(k)} y_i = \frac{1}{h^2} [B_i^{(0,k)} \Delta y_i - A_i^{(0,k)} \nabla y_i],$$

$$B_i^{(0,k)} = B^{(0)}[k(x_i + sh)], \quad A_i^{(0,k)} = A^{(0)}[k(x_i + sh)],$$

$$D_i^{(0,q)} = D^{(0)}[q(x_i + sh)], \quad F_i^{(0,f)} = F^{(0)}[f(x_i + sh)].$$

Если $L_h^{(k,q,f)}$ имеет n -й ($n = 1, 2$) порядок аппроксимации, то и $\bar{L}_h^{(k,q,f)}$ (в силу (У. А. 1) и (У. А. 2)) имеет тот же порядок аппроксимации и эти схемы эквивалентны в смысле аппроксимации.

В дальнейшем при изучении канонических схем мы будем опускать индекс нуль у ее шаблонных функционалов $A[\psi]$, $B[\psi]$, $D[\psi]$ и $F[\psi]$. Тогда условия, например, второго порядка аппроксимации примут вид:

$$B_1[s] = -A_1[s] = 0,5, \quad B_1[s^2] = A_1[s^2], \quad D[s] = F[s] = 0. \quad (\text{У. А. 2}^{(0)})$$

8. Консервативные разностные схемы. Рассмотрим разностную схему $L_h^{(k)} = L_h^{(k,0,0)}$. Фиксируя $k(x)$, получим разностный оператор

$$L_h y_i = \frac{1}{h^2} [B_i \Delta y_i - A_i \nabla y_i], \quad 0 < i < N.$$

По аналогии с дифференциальным оператором второго порядка, назовем разностный оператор L_h самосопряженным, если выражение $u_i L_h v_i - v_i L_h u_i$ можно представить для любых u_i, v_i в каждой точке i в виде некоторой разности $\Delta Q_i = Q_{i+1} - Q_i$. Нетрудно показать, что необходимым и достаточным условием самосопряженности разностного оператора L_h является соотношение $B_i = A_{i+1}$ для всех $1 \leq i \leq N-1$, так что можно написать

$$L_h y_i = \frac{1}{h^2} \Delta (A_i \nabla y_i) \quad \text{или} \quad L_h y_i = \frac{1}{h^2} \Delta (A_i \Delta y_{i-1}). \quad (27)$$

При этом имеет место тождество

$$u_i L_h v_i - v_i L_h u_i = \frac{1}{h^2} \Delta [A_i (u_{i-1} v_i - u_i v_{i-1})],$$

где u_i и v_i — произвольные сеточные функции.

Отсюда сразу следует вторая разностная формула Грина

$$\sum_{i=1}^{N-1} (u_i L_h v_i - v_i L_h u_i) h = \frac{1}{h} (A_i (u_{i-1} v_i - v_{i-1} u_i)) \Big|_1^N.$$

Разностный оператор (27) мы называем консервативным оператором. Этот термин отражает физическое содержание разностного уравнения $L_h y_i = -F_i$, которое можно трактовать как уравнение для стационар-

ного распределения температуры y_i при наличии источников тепла.

Вводя разностный аналог теплового потока

$$w_i = -\frac{A_i \nabla y_i}{h}$$

в точке $x = x_{i-1/2}$ и переписывая уравнение $L_h y_i = -F_i$ в виде

$$w_{i+1} - w_i = -F_i h,$$

видим, что оно выражает закон сохранения тепла на интервале $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ длиной h . Слева — разность потоков тепла на концах интервала, а справа — количество тепла, выделяющегося на интервале за счет источников.

Обратимся теперь к разностной схеме

$$L_h^{(k)} y_i = \frac{1}{h^2} (B_i^{(h,k)} \Delta y_i - A_i^{(h,k)} \nabla y_i).$$

Разностную схему $L_h^{(k)}$ будем называть консервативной, если для любой функции $k(x) \in Q^{(0)}$ соответствующий разностный оператор консервативен, т. е.

$$B_i^{(h,k)} = A_{i+1}^{(h,k)}$$

и, следовательно,

$$B^h[\psi(s)] = A^h[\psi(1+s)] \quad (\psi(s) \in Q^{(0)}).$$

Отсюда следует, что функционал $A^h[\psi(s)]$ не зависит от значений функции $\psi(s)$ при $0 < s \leq 1$, а функционал $B^h[\psi(s)]$ не зависит от значений $\psi(s)$ при $-1 \leq s < 0$.

Если схема $L_h^{(k)}$ консервативна, то, очевидно, и соответствующая ей каноническая схема консервативна.

Разностную схему $L_h^{(k,q,f)}$ будем называть консервативной, если консервативна схема $L_h^{(k)}$.

Для получения разностных схем при решении различных физических задач может быть применен следующий метод, который мы называем интегро-интерполяционным методом (ИИМ). Вместо дифференциального уравнения пишется интегральное соотношение, выражающее закон сохранения (баланс) для элементарной ячейки сетки. Для замены входящих в уравнение баланса производных и интегралов искомая функция и коэффициенты интерполируются в окрестности счетного узла. В результате получается разностное уравнение, коэффициенты которого существенно зависят от характера применяемой интерполяции как искомой функции, так и коэффициентов исходного уравнения.

Проиллюстрируем этот метод на примере уравнения $L_h^{(k,q,f)} u = 0$ и покажем, что он приводит к консервативным схемам. Напишем уравнение

баланса тепла для интервала $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$:

$$w_{i-1/2} - w_{i+1/2} - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x) dx = - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx, \quad (28)$$

где $w(x) = -k(x)u'(x)$ — тепловой поток в точке x . Отсюда

$$u'(x) = -\frac{w(x)}{k(x)}.$$

Интегрируя по x от x_{i-1} до x_i , будем иметь

$$u_i - u_{i-1} = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)} dx. \quad (29)$$

Уравнения (28) и (29) являются точными.

Предполагая, например, что $w(x) = \text{const} = w_{i-1/2}$ при $x_{i-1} < x < x_i$, получаем

$$w_{i-1/2} \approx -A_i \frac{\nabla u_i}{h}, \quad A_i = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1}.$$

Если $q(x) \equiv 0$, то таким образом мы получаем наилучшую каноническую схему $L_h^{(k,f)}$. Чтобы получить наилучшую каноническую схему $L_h^{(k,q,f)}$, предположим $u = \text{const} = u_i$ при $x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}$, так что

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x) dx \approx u_i \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx.$$

Следует отметить, что интерполяции $w = \text{const}$ при $x \in (x_{i-1}, x_i)$ и $u = \text{const}$ при $x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ не согласованы между собой. Однако, последовательное использование одной и той же интерполяции $w = w_{i-1/2}$ при $x \in (x_{i-1}, x_i)$ приводит к заметному усложнению разностной схемы, не повышая ее точности.

Возможны и другие интерполяции, например,

$$\frac{w}{k} = \left(\frac{w}{k} \right)_{i-1/2} = \text{const}$$

при $x \in (x_{i-1}, x_i)$, что дает $A_i = k_{i-1/2}$.

Таким способом мы получаем консервативные схемы вида

$$L_h^{(k,q,f)} y_i = \frac{1}{h} \Delta w_{i-1/2} - D_i^{(h,q)} w_{i-1/2} + F_i^{(h,f)},$$

где

$$w_{i-1/2} = -A_i^{(h,k)} \frac{\nabla y_i}{h}, \quad A_i^{(h,k)} = A^h[k(x_i + sh)], \quad -1 \leq s \leq 0,$$

$$D_i^{(h,q)} = D^h[q(x_i + sh)], \quad F_i^{(h,f)} = F^h[f(x_i + sh)], \quad -0,5 \leq s \leq 0,5,$$

причем D^h и F^h — линейные функционалы.

Интегро-интерполяционный метод использовал в [10] также Г. И. Марчук для построения дискретных схем (см. п. 10) сквозного счета в связи с расчетом критических размеров ядерных реакторов.

Рассмотрим теперь консервативную схему $L_h^{(k,q,f)}$ из $\mathcal{L}(n+1, n, n)$ и будем считать, что $k(x) \in C^{(n+1)}$, $q(x), f(x) \in C^{(n)}$ ($n = 0, 1$). Если $n = 0$, то погрешность аппроксимации

$$\varphi(x, u, h) = \varphi^{(0)}(x, u) + \rho(h).$$

Если же $n = 1$, то

$$\varphi(x, u, h) = \varphi^{(0)}(x, u) + O(h),$$

где $\varphi^{(0)}$ определяется формулой (24).

Покажем, что условие первого порядка аппроксимации

$$B_1^{(0)}[s] - A_1^{(0)}[s] = 1 \quad (a_0 = 0)$$

выполняется для любой консервативной схемы из $\mathcal{L}(1, 0, 0)$. В самом деле,

$$B^h[\psi(s)] = A^h[\psi(1+s)]$$

и, следовательно,

$$B_1^{(0)}[s] = A_1^{(0)}[(1+s)] = 1 + A_1^{(0)}[s].$$

Поэтому для консервативной схемы $\varphi^{(0)}(x, u) \equiv 0$.

Тем самым доказана

Л е м м а 5. Любая консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ из семейства $\mathcal{L}(1, 0, 0)$ удовлетворяет условиям первого порядка аппроксимации, а консервативная схема типа $\mathcal{L}(2, 1, 1)$ имеет первый порядок аппроксимации.

Если консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ симметрична, то

$$A^h[\psi(-s)] = A^h[\psi(1+s)], \quad D^h[\psi(-s)] = D^h[\psi(s)],$$

$$F^h[\psi(-s)] = F^h[\psi(s)].$$

Отсюда следует, что верна

Лемма 6. Любая консервативная симметричная схема $L_h^{(k,q,f)}$ из $\mathcal{L}(2,1,1)$ удовлетворяет (У. А. 2); если же эта схема принадлежит семейству $\mathcal{L}(3,2,2)$, то она имеет второй порядок аппроксимации.

Остановимся теперь на процедуре консерватизации оператора

$$L_h y_i = \frac{1}{h^2} (B_i \Delta y_i - A_i \nabla y_i).$$

Умножим его на некоторую функцию Λ_i и потребуем, чтобы оператор $L_h^* = \Lambda_i L_h$ был консервативным, т. е. $B_i \Lambda_i = A_{i+1}^*$, $A_i \Lambda_i = A_i^*$. Отсюда находим

$$\Lambda_{i+1} = \Lambda_i \frac{B_i}{A_{i+1}} = \prod_{s=1}^i \frac{B_s}{A_{s+1}},$$

если положить $\Lambda_1 = 1$. Таким образом, получаем консервативный оператор

$$L_h^* y_i = \Lambda_i L_h y_i = \frac{1}{h^2} \Delta (A_i^* \nabla y_i), \quad A_i^* = A_i \Lambda_i.$$

Если исходная схема $L_h^{(k)}$ однородна, то консервативная схема

$$L_h^{*(k)} = \Lambda_i L_h^{(k)}$$

не является однородной.

9. Линейные схемы. Если $A^h[\psi]$ и $B^h[\psi]$ являются линейными функционалами относительно ψ , то схему $L_h^{(k,q,f)}$ мы будем называть *k-линейной схемой*.

Наряду с *k-линейными* схемами можно рассматривать так называемые *p-линейные* схемы

$$L_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{b_i^{(h,p)}} \Delta y_i - \frac{1}{a_i^{(h,p)}} \nabla y_i \right],$$

где

$$b_i^{(h,p)} = b^h[p(x_i + sh)], \quad a_i^{(h,p)} = a^h[p(x_i + sh)],$$

причем $a^h[\bar{p}(s)]$ и $b^h[\bar{p}(s)]$ являются линейными функционалами $\bar{p}(s) \in Q^{(0)}[-1, 1]$. Эта форма записи соответствует дифференциальному оператору

$$L^{(p)}u = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right] \quad \left(p = \frac{1}{k} \right).$$

Исследование линейных схем в классе разрывных коэффициентов облегчается тем, что для линейных функционалов существует в $Q^{(0)}$ интегральное представление с помощью характеристических функций (см. п. 11).

Отметим, что полученная в § 4 наилучшая каноническая схема $L_h^{(k)}$, для которой

$$B_i = A_{i+1}, \quad A_i = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx \right]^{-1},$$

является канонической консервативной p -линейной схемой, у которой

$$b[\bar{p}(s)] = a[\bar{p}(1+s)], \quad a[\bar{p}(s)] = \int_{-1}^0 \bar{p}(s) ds.$$

10. Дискретные схемы. Если шаблонные функционалы $A^h[\psi(s)]$ и $B^h[\psi(s)]$ зависят от значений функции $\psi(s)$ на дискретном множестве точек, то такие функционалы мы назовем дискретными, а соответствующую схему $L_h^{(k)}$ — дискретной схемой. В случае $\psi \in Q^{(0)}$ дискретный функционал может зависеть не только от значений ψ в отдельных точках, но и от левого и правого предельных значений функций ψ в этих точках.

В качестве примера рассмотрим каноническую дискретную схему $L_h^{(k)}$, коэффициенты которой являются трехточечными дискретными функционалами:

$$A_i = f_1(k_{i-1}, k_i, k_{i+1}), \quad B_i = f_2(k_{i-1}, k_i, k_{i+1}), \quad (k_i = k(x_i)),$$

где $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ — некоторые функции трех переменных.

Из условия (II^(r)) для шаблонов $A[\bar{k}(s)]$ и $B[\bar{k}(s)]$ следует, что

$$f_1(x, y, z) = y\varphi(\bar{x}, \bar{z}), \quad f_2(x, y, z) = y\psi(\bar{x}, \bar{z}) \quad (\bar{x} = x/y, \bar{z} = z/y),$$

причем $\varphi(1, 1) = 1$, $\psi(1, 1) = 1$.

Рассмотренная в п. 2 введения (пример 1) схема дискретна:

$$A_i = k_i - \frac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1}), \quad B_i = k_i + \frac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1}).$$

Если схема консервативна, то

$$B_i = k_i \Psi\left(\frac{k_{i+1}}{k_i}\right) = A_{i+1}, \quad A_i = k_i \Phi\left(\frac{k_{i-1}}{k_i}\right),$$

так как для консервативных схем $\varphi(\bar{x}, \bar{z}) = \Phi(\bar{x})$ не зависит от \bar{z} , а $\psi(\bar{x}, \bar{z}) = \Psi(\bar{z})$ не зависит от \bar{x} .

Отсюда следует, что

$$\Psi(\xi) = \xi \Phi\left(\frac{1}{\xi}\right), \quad \Phi(1) = 1.$$

Если схема $L_h^{(k)}$, кроме того, симметрична, то $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$ и мы получаем для $\Phi(\xi)$ функциональное уравнение

$$\Phi(\xi) = \xi \Phi\left(\frac{1}{\xi}\right), \quad \Phi(1) = 1. \quad (29')$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi(\xi) = \sqrt{\xi} \omega(\ln \xi),$$

где $\omega(t)$ — произвольная четная функция, удовлетворяющая условию⁶⁾ $\omega(0) = 1$.

Приведем два примера функции $\Phi(\xi)$:

$$1. \Phi(\xi) = 0,5(1 + \xi), \quad A_i = 0,5(k_{i-1} + k_i), \quad B_i = A_{i+1}.$$

$$2. \Phi(\xi) = \frac{2\xi}{1 + \xi}, \quad A_i = \frac{2k_{i-1}k_i}{k_{i-1} + k_i}, \quad B_i = A_{i+1}.$$

11. Линейные функционалы в классе разрывных функций. Как известно, линейный функционал $A[f]$ определяется с помощью условий

$$1^\circ. A[f_1 + f_2] = A[f_1] + A[f_2]; \quad 2^\circ. |A[f]| \leq M \sup |f|. \quad (30)$$

Рассмотрим линейный функционал $A[f]$, определенный для кусочно-непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.

⁶⁾На существование общего решения уравнения (29') обратил наше внимание М. В. Масленников.

В связи с тем, что известное представление линейного функционала в классе $C^{(0)}[a, b]$ с помощью интеграла Стильтьеса

$$A[f] = \int_a^b f(s) d\alpha(s) \quad (\text{теорема Рисса})$$

продолжается на класс $Q^{(0)}$ неоднозначно, требуется найти представление $A[f]$ в $Q^{(0)}[a, b]$. Такое представление получено в [12]. Доказано (теорема 1), что линейный функционал $A[f(s)]$, где $f(s) \in Q^{(0)}[a, b]$, однозначно определяется двумя характеристическими функциями:

$$\alpha(\lambda) = A[\eta_\lambda(s)], \quad \sigma(\lambda) = A[\pi_\lambda(s)], \quad (31)$$

где

$$\eta_\lambda(s) = \begin{cases} 1, & s < \lambda, \\ 0, & s \geq \lambda, \end{cases} \quad \pi_\lambda(s) = \begin{cases} 1, & s = \lambda, \\ 0, & s \neq \lambda. \end{cases} \quad (32)$$

Если $\sigma(\lambda) \equiv 0$ для $\lambda \in [a, b]$, то функционал называется регулярным; если же $\alpha(\lambda) \equiv 0$ для $\lambda \in [a, b]$, то такой функционал мы называем точечным.

Приведем необходимые для дальнейшего свойства линейных функционалов и их характеристических функций, отсылая за доказательствами к [12].

1. Существует не более счетного числа точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots$, в которых $\sigma(\xi_j) \neq 0$, причем:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\sigma(\xi_j)| \leq M.$$

2. Всякий линейный функционал A может быть представлен в виде суммы регулярного \bar{A} и точечного A^* линейных функционалов:

$$A[f] = \bar{A}[f] + A^*[f],$$

где

$$A^*[f] = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(\xi_j) f(\xi_j).$$

Регулярный функционал $\bar{A}[f]$ целиком определяется характеристической функцией

$$\bar{\alpha}(\lambda) = \bar{A}[\eta_\lambda(s)] = \alpha(\lambda) - \sum_{\zeta_j < \lambda} \sigma(\zeta_j).$$

3. а) Функция $\bar{\alpha}(\lambda)$ имеет ограниченную вариацию;

б) существует не более счетного числа точек $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots$, в которых $\bar{\alpha}_\pi(\lambda_i) \neq \bar{\alpha}(\lambda_i)$ или $\bar{\alpha}(\lambda_i) \neq \bar{\alpha}_\pi(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots$;

в) функция

$$\bar{\bar{\alpha}}(\lambda) = \bar{\alpha}_\pi(\lambda) - \sum_{\lambda_i < \lambda} [\bar{\alpha}_\pi(\lambda_i) - \bar{\alpha}(\lambda_i)]$$

является непрерывной функцией на $[a, b]$.

4. Имеет место основная теорема.

Теорема 1. *Всякий линейный функционал $A[f]$, определенный в классе $Q^{(0)}[a, b]$, может быть представлен в виде*

$$A[f] = \int_a^b f(s) d\bar{\bar{\alpha}}(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \{ f_\pi(\lambda_i) [\bar{\alpha}_\pi(\lambda_i) - \bar{\alpha}(\lambda_i)] + f_\pi(\lambda_i) [\bar{\alpha}(\lambda_i) - \bar{\alpha}_\pi(\lambda_i)] \} + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(\zeta_j) f(\zeta_j). \quad (33)$$

Если из $f \geq 0$ следует $A[f] \geq 0$, то линейный функционал $A[f]$ называют неотрицательным.

Теорема 2. *Для того чтобы линейный функционал $A[f]$ был неотрицательным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) характеристическая функция $\bar{\alpha}(\lambda)$ регулярной части \bar{A} функционала A есть неубывающая функция;

2) $\sigma(\zeta_j) \geq 0$ для всех $j = 1, 2, \dots$

Достаточность условий 1) и 2) следует из представления (33). Докажем их необходимость. Итак, пусть $A[f]$ — неубывающий функционал. Выбирая

$$f_j(s) = \pi_{\zeta_j}(s) \geq 0,$$

для любого $j = 1, 2, \dots$ будем иметь

$$\sigma(\zeta_j) = A[f_j(s)] \geq 0.$$

Вводя функцию

$$\bar{f}_\lambda(s) = \eta_\lambda(s) - \sum_{\zeta_j < \lambda} \pi_{\zeta_j}(s) \geq 0,$$

замечаем, что

$$A[\bar{f}_\lambda(s)] = \alpha(\lambda) - \sum_{\zeta_j < \lambda} \sigma(\zeta_j) = \bar{\alpha}(\lambda). \quad (34)$$

Пусть λ_1 и $\lambda_2 \geq \lambda_1$ — любые точки отрезка $[a, b]$.

Из неравенства

$$\bar{f}_{\lambda_2}(s) - \bar{f}_{\lambda_1}(s) \geq 0,$$

в силу формулы (34), следует

$$A[\bar{f}_{\lambda_2}(s) - \bar{f}_{\lambda_1}(s)] = \bar{\alpha}(\lambda_2) - \bar{\alpha}(\lambda_1) \geq 0 \quad \text{при} \quad \lambda_2 \geq \lambda_1,$$

т. е. $\bar{\alpha}(\lambda)$ является неубывающей функцией.

Иными словами, необходимыми и достаточными условиями неотрицательности линейного функционала $A[f]$ являются условия неотрицательности его регулярной $\bar{A}[f]$ и точечной $A^*[f]$ компонент.

Однородный функционал первой степени $A[f]$ полностью определяется своим первым дифференциалом $A_1[f, \varphi]$, который является линейным функционалом относительно второго аргумента φ ; имеет место равенство

$$A[f] = A_1[f, f] \quad (\text{лемма 1}). \quad (35)$$

§ 2. Однородные разностные схемы в классе гладких коэффициентов

В этом параграфе доказано, что в классе достаточно гладких коэффициентов порядок аппроксимации однородной схемы из исходного семейства $\mathcal{L}(n_1, n_2, n_3)$ совпадает с порядком точности этой схемы.

1. О точности разностных схем в классе гладких коэффициентов. Изучая вопрос о точности решения y_i^h разностной краевой задачи (II) по отношению к решению $u = u(x)$ исходной задачи (I), мы в § 1 получили для сетчатой функции $z_i^h = y_i^h - u(x)$ следующие условия:

$$L_h^{(k,q)} z_i^h = -\varphi_i^h, \quad 0 < i < N, \quad z_0^h = 0, \quad z_N^h = 0, \quad (\text{задача (III)})$$

где

$$L_h^{(k,q)} z_i^h = \frac{1}{h^2} [B_i^{(h,k)} \Delta z_i^h - A_i^{(h,k)} \nabla z_i^h] - D_i^{(h,q)} z_i^h \quad (1)$$

исходная схема и

$$\varphi_i^h = L_h^{(k,q,f)} u_i - (L^{(k,q,f)} u)_i \quad (2)$$

есть погрешность аппроксимации схемы $L_h^{(k,q,f)}$ на решении $u(x)$ краевой задачи (I).

Пусть R_h — оператор, дающий решение задачи (III):

$$z_i^h = R_h \varphi_i^h. \quad (3)$$

Введем норму для сетчатой функции z_i^h :

$$\|z_i^h\|_1 = \max_{0 < i < N} |z_i^h| \quad (4)$$

и некоторую норму $\|\varphi^h\|_2$ для функции φ_i^h . Если при фиксированных k и q норма оператора R_h равномерно ограничена по h :

$$\|z_i^h\|_1 = \|R_h \varphi_i^h\|_1 \leq M_h^{(k,q)} \|\varphi_i^h\|_\sigma, \quad M_h^{(k,q)} \leq M^{(k,q)}, \quad (5)$$

то из малости погрешности аппроксимации по норме $\|\cdot\|_\sigma$ будет следовать равномерная сходимость (см. [6]) решений разностной краевой задачи (II) к решению задачи (I).

При изучении сходимости разностных схем в классе гладких коэффициентов достаточно взять для φ_i^h и z_i^h одну и ту же норму:

$$\|\varphi_i^h\|_\sigma = \|\varphi_i^h\|_1 = \max_{0 < i < N} |\varphi_i^h| \quad (\sigma = 1).$$

В п. 3 исследована разностная функция Грина задачи (III) и показано, что операторы R_h , дающие решение задачи (III), равномерно ограничены по h для любой схемы $L_h^{(k,q)}$ (из класса $\mathcal{L}(2,1)$), если $k(x) \in C^{(1)}$ и $q(x) \in C^{(0)}$ (лемма 2).

Если $k(x) \in C^{(n+1)}$, $q(x) \in C^{(n)}$, $f(x) \in C^{(n)}$ ($n = 1, 2$), а схема $L_h^{(k,q,f)}$ из класса $\mathcal{L}(n+1, n, n)$ имеет n -й порядок аппроксимации, т. е. удовлетворяет условиям (У. А. 1), $n = 1$ или (У. А. 2), $n = 2$ (см. § 1, п. 6), то для погрешности φ_i^h имеет место равномерная оценка

$$\|\varphi^h\|_1 = O(h^n) \quad \text{или} \quad \|\varphi^h\|_1 \leq M \cdot h^n, \quad (6)$$

где M — положительная постоянная, зависящая от выбора k, q, f и не зависящая от h .

Отсюда и из леммы 2 следует

Лемма 3. Если исходная схема $L_h^{(k,q,f)}$ из $\mathcal{L}(n+1, n, n)$ имеет n -й ($n = 1, 2$) порядок аппроксимации, то решение краевой задачи (II) имеет в классе $k(x) \in C^{(n+1)}$, $q(x) \in C^{(n)}$, $f(x) \in C^{(n)}$ тот же n -й порядок точности.

Для изучения точности решения краевой задачи (II) в классе разрывных коэффициентов нам потребуется ограниченность оператора R_h по норме

$$\|\varphi_i^h\|_2 = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=1}^i h \varphi_s^h \right|. \quad (7)$$

Равномерная ограниченность по h операторов R_h в этой норме будет показана в п. 3.

2. Разностная функция Грина. Перейдем теперь к выяснению вопроса о существовании и ограниченности оператора R_h , определяемого с помощью разностной функции Грина.

Рассмотрим разностную краевую задачу

$$L_h z_i^h = -\varphi_i, \quad 0 < i < N, \quad z_0^h = 0, \quad z_N^h = 0, \quad (8)$$

где L_h — разностный оператор, определяемый выражением

$$L_h z_i = \frac{1}{h^2} (B_i^h \Delta z_i - A_i^h \nabla z_i) - D_i^h z_i. \quad (9)$$

Будем предполагать, что коэффициенты оператора L_h удовлетворяют условиям:

$$0 < M_1 \leq A_i^h \leq M_2, \quad 0 < M_1 \leq B_i^h \leq M_2,$$

$$0 \leq D_i^h \leq M_3, \quad (0 < i < N), \quad (\alpha)$$

где M_1, M_2 и M_3 — положительные постоянные, не зависящие от h .

Решение этой задачи можно представить с помощью разностной функции Грина G_{ij} в виде

$$z_i^h = R_h \varphi_i^h = \sum_{j=1}^{N-1} G_{ij} \varphi_j^h h. \quad (10)$$

В частности, если краевые условия неоднородны, то

$$z_i^h = \sum_{j=1}^{N-1} G_{ij} \varphi_j^h h - \frac{A_1^h G_{i1}}{h} z_0^h + \frac{B_{N-1}^h G_{i,N-1}}{h} z_N^h. \quad (11)$$

Разностную функцию Грина G_{ij} задачи (8) определим с помощью условий:

а) G_{ij} по переменному i при фиксированном j ($0 \leq j \leq N$) удовлетворяет уравнению

$$L_h G_{ij} = -\frac{\delta_{ij}}{h} \quad \text{при} \quad 0 < i < N, \quad \text{где} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \quad (12)$$

б) G_{ij} удовлетворяет однородным краевым условиям

$$G_{0j} = 0, \quad G_{Nj} = 0. \quad (13)$$

Покажем, что функция G_{ij} существует, если выполнены условия (а). Рассмотрим два случая.

А. Разностный оператор L_h консервативен, т. е.

$$B_i^h = A_{i+1}^h \quad \text{и} \quad L_h z_i = \frac{1}{h^2} \Delta(A_i^h \nabla z_i) - D_i^h z_i.$$

По аналогии с дифференциальными уравнениями будем искать G_{ij} в виде:

$$G_{ij} = \begin{cases} a_j v_i, & i < j, \\ b_j w_i, & i > j, \end{cases} \quad (14)$$

где a_j и b_j — подлежащие определению множители, а v_i и w_i — решения однородного уравнения $L_h z_i = 0$, удовлетворяющие условиям

$$L_h v_i = 0, \quad 0 < i < N, \quad v_0 = 0, \quad \frac{A_1^h \Delta v_0}{h} = 1 \quad \text{или} \quad v_1 = \frac{h}{A_1^h}; \quad (15)$$

$$L_h w_i = 0, \quad 0 < i < N, \quad w_N = 0,$$

$$-A_N^h \frac{\Delta w_{N-1}}{h} = 1 \quad \text{или} \quad w_{N-1} = \frac{h}{A_N^h}. \quad (15')$$

Применяя вторую разностную формулу Грина (см. п. 8, § 1) к функциям v_i и w_i , видим, что

$$v_N = w_0. \quad (16)$$

Из условий (15) получаем

$$A_i \frac{\nabla v_i}{h} = 1 + \sum_{s=1}^{i-1} D_s^h v_s h. \quad (17)$$

Отсюда и из условий $D_s^h \geq 0$, $v_1 = \frac{h}{A_1^h} > 0$ следует, что $v_i > 0$ при $i > 0$, точнее,

$$v_i \geq \sum_{k=1}^i \frac{h}{A_k^h} \geq \frac{x_i}{M_2}, \quad v_N \geq \frac{1}{M_2},$$

и, аналогично,

$$w_i \geq \frac{1 - x_i}{M_2}.$$

Таким образом, функция Грина $G_{ij} \geq 0$ ($0 \leq i, j \leq N$).

Из условия $a_j v_j = b_j w_j$ и уравнения (12) при $i = j$ находим

$$a_j = \frac{w_j}{\Delta}, \quad b_j = \frac{v_j}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \frac{1}{h} A_i (v_i w_{i-1} - v_{i-1} w_i) = \text{const.}$$

Из условий (15) и (15') для функций v_i и w_i следует, что

$$\Delta = v_N = w_0.$$

В результате получаем следующее выражение для разностной функции Грина:

$$G_{ij} = \begin{cases} \frac{v_i w_j}{v_N}, & i < j, \\ \frac{w_i v_j}{v_N}, & i > j. \end{cases} \quad (18)$$

Отсюда сразу получаем свойство симметрии функции Грина: $G_{ij} = G_{ji}$.

Б. Если разностный оператор L_h не консервативен, т. е.

$$L_h y_i = \frac{1}{h^2} (B_i^h \Delta y_i - A_i^h \nabla y_i) - D_i^h y_i,$$

то, умножая его на множитель

$$\Lambda_i = \prod_{s=1}^{i-1} \frac{B_s^h}{A_{s+1}^h},$$

мы, в соответствии с п. 6 § 1, получим консервативный оператор

$$L_h^* y_i = \frac{1}{h^2} \Delta (A_i^{*h} \nabla y_i) - D_i^{*h} y_i,$$

где $A_i^{*h} = A_i^h \Lambda_i$. Оператору L_h^* соответствует разностная функция Грина G_{ij}^* , которая строится так же, как и для случая A .

Из уравнений для G_{ij} и G_{ij}^* видно, что

$$G_{ij} = \Lambda_j G_{ij}^*.$$

3. Оценки разностной функции Грина. При выводе равномерных по h оценок для функции Грина мы будем предполагать, что наряду с условием (α) выполняется неравенство

$$e^{-bh} \leq \frac{B_i^h}{A_{i+1}^h} \leq e^{bh}, \quad 0 < i < N-1, \quad (\beta)$$

где b — положительная постоянная, не зависящая от параметра h .

Рассмотрим сначала случай A .

Из формулы (18) в силу неравенства $v_i \geq x_i/M_2$, $w_j \geq (1-x_j)/M_2$ следует

$$\frac{\psi_{ij}}{M_2 v_N} \leq G_{ij} \leq v_N, \quad (19)$$

где

$$\psi_{ij} = \begin{cases} x_i(1-x_j) & \text{при } i < j, \\ x_j(1-x_i) & \text{при } i > j. \end{cases}$$

Отсюда видно, что для получения двухсторонней оценки функции Грина достаточно оценить сверху v_N . Для этого нам нужна

Л е м м а 1. Пусть v_i — решение задачи (15), а \bar{v}_i — решение задачи

$$\bar{L}_h \bar{v}_i = 0, \quad \bar{v}_0 = 0, \quad \bar{A}_1 \bar{v}_1 = h, \quad \bar{L}_h \bar{v}_i = \frac{1}{h^2} \Delta(\bar{A}_i \nabla \bar{v}_i) - \bar{D}_i \bar{v}_i.$$

Если выполнены условия $\bar{A}_i \leq A_i$, $\bar{D}_i \geq D_i$, а также условия (α) для коэффициентов операторов L_h и \bar{L}_h , то имеет место неравенство $\bar{v}_i \geq v_i$.

В самом деле, функция $z_i = \bar{v}_i - v_i$ удовлетворяет условиям

$$\bar{L}_h z_i = \frac{1}{h^2} \Delta [(A_i - \bar{A}_i) \nabla v_i] + (\bar{D}_i - D_i) v_i,$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = h \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{A_1} \right) \geq 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\bar{A}_i \nabla z_i}{h} = \left(1 - \frac{\bar{A}_i}{A_i} \right) \left(1 + \sum_{s=1}^{i-1} D_s v_s h \right) + \sum_{s=1}^{i-1} D_s v_s h + \sum_{s=1}^{i-1} (\bar{D}_s - D_s) v_s h \geq 0,$$

т. е. $z_i \geq z_{i-1} \geq z_1 \geq 0$ или $\bar{v}_i \geq v_i$.

Полагая $\bar{A}_i = M_1$, $\bar{D}_i = M_3$, получаем для \bar{v}_i уравнение с постоянными коэффициентами

$$\Delta^2 \bar{v}_{i-1} - \kappa^2 h^2 \bar{v}_i = 0, \quad \kappa^2 = M_3/M_1,$$

решение которого при условиях $\bar{v}_0 = 0$, $\bar{v}_1 = \frac{h}{A_1}$ имеет вид

$$\bar{v}_i = \frac{\text{sh } \omega x_i}{M_1 \kappa \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa h}{2}\right)^2}},$$

где ω — корень уравнения $\text{sh } \frac{\omega h}{2} = \frac{\kappa h}{2}$, так что $\sin \omega \leq \sin \kappa$.

Поэтому для v_N получаем оценку

$$v_N \leq \frac{\text{sh } \kappa}{M_1 \kappa} = \frac{\text{sh } \sqrt{\frac{M_3}{M_1}}}{\sqrt{M_1 M_3}} \quad (20)$$

при любых значениях $h > 0$.

В результате мы приходим к следующей оценке функции Грина снизу и сверху:

$$2g_0 \psi_{ij} = \frac{\psi_{ij} \sqrt{M_1 M_3}}{M_2^2 \text{sh } \sqrt{\frac{M_3}{M_1}}} \leq G_{ij} \leq \frac{\text{sh } \sqrt{\frac{M_3}{M_1}}}{\sqrt{M_1 M_3}}. \quad (21)$$

Если $D_i^h = 0$, то для соответствующей функции Грина G_{ij}^0 формула (21) (при $M_3 = 0$) дает

$$\frac{M_1}{M_2^2} \psi_{ij} \leq G_{ij}^0 \leq \frac{1}{M_1}. \quad (22)$$

Из неравенства $G_{ij} \leq G_{ij}^0$ (при условии $D_i^h \geq 0$) следует, что для функции Грина G_{ij} можно пользоваться более простой оценкой сверху

$$G_{ij} \leq \frac{1}{M_1} = g_1. \quad (23)$$

Для первого разностного отношения функции Грина имеем

$$\frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{h} = \begin{cases} \frac{v_i}{v_N} \cdot \frac{\Delta w_j}{h}, & i < j, \\ \frac{w_i}{v_N} \cdot \frac{\Delta v_j}{h}, & i > j. \end{cases}$$

Учитывая неравенство

$$\frac{\nabla v_j}{h} = \frac{1}{A_j} + \frac{1}{A_j} \sum_{s=1}^{j-1} D_s v_s h \leq \frac{1}{M_1} + \frac{M_3}{M_1} v_N \leq M_5(M_1, M_3),$$

получаем

$$\left| \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{h} \right| \leq M_5, \quad (24)$$

где $M_5 = M_5(M_1, M_3)$ — положительная постоянная, зависящая только от M_1 и M_3 .

Выбирая, например, $i = j = i_0 = \left[\frac{N}{2} \right]$, получаем из (21)

$$G_{i_0, i_0} \geq g_0 = \frac{\sqrt{M_1 M_3}}{2M_2^2 \operatorname{sh} \sqrt{M_3/M_1}}. \quad (25)$$

Если оператор L_h неконсервативен и удовлетворяет условиям (α) и (β) , то для коэффициентов консервативного оператора $L_h^* = \Lambda_i L_h$ будем иметь

$$0 < M'_1 \leq A_i^* \leq M'_2, \quad 0 \leq D_i^* \leq M'_3, \quad (26)$$

где $M'_1 = M_1 e^{-b}$, $M'_2 = M_2 e^b$, $M'_3 = M_3 e^b$.

Для множителя Λ_i имеет место двухсторонняя оценка

$$e^{-b} \leq \Lambda_i \leq e^b, \quad 0 < i < N. \quad (27)$$

Для оценки G_{ij}^* можно пользоваться формулой (21), заменив константы M_k ($k = 1, 2, 3$) константами M'_k . Оценку для G_{ij} мы получим, если воспользуемся соотношением (27) и формулой

$$G_{ij} = \Lambda_j G_{ij}^*.$$

Обратимся теперь к формуле

$$z_i^h = \sum_{j=1}^{N-1} G_{ij} \varphi_j^h h.$$

Учитывая неравенство (23), находим

$$\|z^h\|_1 = \max_{0 < i < N} |z_i^h| \leq \frac{1}{M'_1} \sum_{j=1}^{N-1} |\varphi_j^h| h. \quad (28)$$

Отсюда следует

$$\|z^h\|_1 \leq \frac{1}{M'_1} \|\varphi^h\|_\sigma, \quad \sigma = 1, 3. \quad (29)$$

Таким образом, константа $\frac{1}{M'_1}$ и дает равномерную оценку оператора R_h .

Лемма 2. Операторы R_h , представляющие решение задачи (III) ($z^h = R_h \varphi^h$) для любой схемы $L_h^{(k,q)}$ из класса $\mathcal{L}(2,1)$ и для $k(x) \in C^{(1)}$, $q, f \in C^{(0)}$, равномерно ограничены как по норме $\|\cdot\|_1$, так и по норме $\|\cdot\|_2$, т. е.

$$\|z^h\|_1 \leq g_\sigma \|\varphi^h\|_\sigma, \quad \sigma = 1, 2,$$

где g_1 и g_2 — положительные постоянные, зависящие только от M_1, M_2, M_3 и b

$$\left(\|\varphi^h\|_1 = \max_{0 < i < N} |\varphi_i^h|, \quad \|\varphi^h\|_2 = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=1}^i \varphi_s h \right| \right).$$

В самом деле, условия (α) будут выполнены, если

$$0 < M_1 \leq k(x) \leq M_2, \quad 0 \leq q(x) \leq M_3,$$

так как шаблонные функционалы схемы нормированы и являются неубывающими.

Если $k(x) \in C^{(1)}$, то

$$A_i^{(h,k)} = k_i + h k'_1 A_1^{(0)}[s] + h \rho(h),$$

$$B_i^{(h,k)} = k_i + h k'_1 B_1^{(0)}[s] + h \rho(h),$$

$$\frac{B_i^{(h,k)}}{A_{i+1}^{(h,k)}} = 1 + h \left(\frac{k'}{k} \right)_i \cdot a_0 + h \rho(h),$$

$$a_0 = B_1^{(0)}[s] - A_1^{(0)}[s] - 1.$$

Отсюда видно, что всегда можно выбрать константу b так, чтобы выполнялось условие (β) . Например,

$$b = (1 + |a_0|) \max_{(0 \leq x \leq 1)} \left| \frac{k'}{k} \right|.$$

При изучении сходимости наших схем в классе разрывных коэффициентов, помимо оценки (29), понадобится более тонкая оценка. Представляя z_i в виде

$$z_i^h = \sum_{j=1}^{N-1} G_{ij} \Delta \left(\sum_{s=1}^{j-1} \varphi_s^h h \right)$$

и учитывая тождество $u_j \Delta v_j = -v_{j+1} \Delta u_j + \Delta(u_j v_j)$, получим

$$z_i^h = - \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{h} \right) \left(\sum_{s=1}^j \varphi_s^h h \right) h.$$

Отсюда следует неравенство

$$\|z^h\|_1 \leq \max_{0 \leq i, j \leq N-1} \left| \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{h} \right| \cdot \sum_{s=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=1}^j \varphi_s^h h \right|,$$

которое, если воспользоваться равномерной оценкой (24) для разностного отношения функции Грина, принимает вид:

$$\|z^h\|_1 \leq M'_5 \|\varphi^h\|_2, \quad \text{где } M'_5 = e^b M_5 (M'_1, M'_3). \quad (30)$$

З а м е ч а н и е. Если условие (β) выполняется всюду, кроме конечного числа точек $j = 1, 2, \dots, j_0$, то все полученные выше оценки сохраняют силу, если вместо b ввести новую константу b_1 с помощью условия

$$b_1 = b + j_0 \ln \frac{M_2}{M_1};$$

тогда

$$e^{-b_1} \leq \Lambda_i \leq e^{b_1}, \quad M'_1 = e^{-b} M_1, \quad M'_2 = e^b M_2$$

и т. д.

4. О порядке аппроксимации сходящихся схем. Перейдем теперь к установлению связи между порядком аппроксимации и порядком точности схемы для задачи (II). В п. 1 сформулирована лемма 3. Ее доказательство следует из неравенств (29) и (5).

Имеет ли место обратное утверждение? Определяет ли порядок точности схемы ее порядок аппроксимации? Ответ на этот вопрос дает

Л е м м а 3. Если разностная схема $L_h^{(k,q,f)}$ из семейства $\mathcal{L}(n+1, n, n)$ имеет n -й порядок точности в классе достаточно гладких коэффициентов

$\varphi(x) \in C^{(m_k)}$, $q(x) \in C^{(m_q)}$, $f(x) \in C^{(m_f)}$, $m_k \geq n+1$, $m_q \geq n$, $m_f \geq n$, то она имеет тот же n -й порядок аппроксимации ($n = 1, 2$).

Итак, пусть $z_i = O(h^n)$ для любых коэффициентов из указанного выше класса. Докажем, что при этом обязательно выполнены условия n -го порядка аппроксимации (см. (У. А. 1) и (У. А. 2); п. 6, § 1). Для оценок будем пользоваться неравенством

$$|z_{i_0}| \geq g_0 \left| \sum_{j=1}^{N-1} \psi_{i_0 j} \varphi_j h \right| > \frac{1}{4} g_0.$$

В частности, если $\varphi_j = \bar{\varphi} \cdot h^m + O(h^{m+1})$, где $\bar{\varphi} = \text{const}$, $m \geq 0$, то отсюда следует

$$|\bar{\varphi}| \leq \frac{|z_{i_0}|}{\bar{g}_0 h^m} + O(h), \quad 0 < \bar{g}_0 \leq g_0 \sum_{j=1}^{N-1} \psi_{i_0 j} h. \quad (31)$$

В п. 5 § 1 для погрешности аппроксимации $\varphi(x, u, h)$ было получено разложение по степеням h :

$$\varphi = \varphi^{(0)} + h\varphi^{(1)} + O(h^2),$$

где $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$ определяются формулами (25) и (26), § 1, через моменты дифференциалов шаблонных функционалов, функции $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ и их производные.

Будем выбирать функции $u(x)$, $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ таким образом, чтобы $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$ были постоянны.

Пусть $n = 1$. Полагая $k(x) = e^x$, $u(x) = e^{-x}$ и пользуясь (31) для $m = 0$, находим, что $\varphi^{(0)} = -a_0 = O(h)$, т. е. $a_0 = 0$.

Рассмотрим теперь схему $\mathcal{L}(3, 2, 2)$, $n = 2$. Для нее имеем

$$\varphi = \varphi^{(1)} h + O(h^2), \quad \text{так как} \quad \varphi^{(0)} = 0 \quad (m = 1).$$

Чтобы убедиться в справедливости соотношений $a_j = 0$, $j = 1, 2, 3, 4$, выберем следующие примеры:

$$1) k(x) = 1, f(x) = x, q(x) = 0, \varphi^{(1)} = F_1^{(0)}[s],$$

неравенство (31) дает $\varphi^{(1)} = O(h)$, т. е. $F_1^{(0)}[s] = 0$;

$$2) k(x) = 1, f(x) = 1 - x, q(x) = 1 - x, u(x) = 1, \varphi^{(1)} = D_1^{(0)}[s] = 0;$$

$$3) k(x) = e^x, u(x) = e^{-x}, \varphi^{(1)} = -a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = 0;$$

$$4) k(x) = e^x, u(x) = e^x, \varphi^{(1)} = -a_1 + a_2 + a_3 - a_4 = 0, a_1 = 0, a_4 = a_2 + a_3;$$

поэтому $\varphi^{(1)}$ можно переписать в виде

$$\varphi^{(1)} = a_3 \left(\frac{k'}{k} \right)' \cdot ku' - a_4 \left(\frac{k'}{k} \right) \cdot f \cdot u,$$

если воспользоваться для этого уравнением $ku'' + k'u' = -f$;

$$5) k(x) = e^x, f(x) = -1, q(x) = 0, \varphi^{(1)} = -a_4 = 0;$$

$$6) \left(\frac{k'}{k}\right)' \cdot ku' = 1, \varphi^{(1)} = a_3 = 0.$$

Тем самым лемма доказана.

Из лемм 3 и 4 вытекает следующая

Теорема 1. Для того чтобы разностная схема $L_h^{(k,q,f)}$ из класса $\mathcal{L}(n+1, n, n)$ имела для любых коэффициентов $k(x) \in C^{(n+1)}$, $q(x) \in C^{(n)}$, $f(x) \in C^{(n)}$ (удовлетворяющих условиям (α) и (β) , см. п. 1, § 1) n -й порядок точности, необходимо и достаточно, чтобы она имела n -й порядок аппроксимации ($n = 1, 2$).

§ 3. Необходимые условия сходимости в классе разрывных коэффициентов

В этом параграфе устанавливаются необходимые условия сходимости разностной схемы $L_h^{(k,q,f)}$ в классе разрывных коэффициентов.

1. О погрешности аппроксимации в окрестности точки разрыва коэффициентов. Погрешность $z_i^h = y_i^h - u(x_i)$ решения y_i^h разностной задачи (II) относительно решения $u(x)$ задачи (I) определяется, как мы видели, условиями

$$L_h^{(k,q,f)} z_i^h = -\varphi_i^h, \quad 0 < i < N, \quad z_0^h = 0, \quad z_N^h = 0. \quad (\text{задача (III)})$$

Правая часть уравнения

$$\varphi_i^h = L_h^{(k,q,f)} u_i - (L^{(k,q,f)} u)_i$$

есть погрешность аппроксимации схемы $L_h^{(k,q,f)}$ на решении $u = u(x)$ задачи (I).

Если коэффициент уравнения $k(x)$ имеет в некоторой точке $x = \xi$ разрыв первого рода, то в окрестности этой точки схема $L_h^{(k,q,f)}$ не аппроксимирует дифференциальный оператор $L^{(k,q,f)}$.

Положение точки $x = \xi$ на разностной сетке $S_h \{x_0 = 0, \dots, x_i = xh, \dots, x_N = Nh = 1\}$ определяется двумя числами n и θ :

$$\xi = x_n + \theta h, \quad 0 < \theta < 1, \quad x_n = nh. \quad (1)$$

Очевидно, что n и θ являются функциями шага h или номера N :

$$n = n(h), \quad \theta = \theta(h). \quad (2)$$

В точке $x = \xi$ решение $u = u(x)$ задачи (I) удовлетворяет условиям сопряжения

$$\begin{aligned} u(\xi - 0) = u(\xi + 0) = u(\xi), \quad k_{\text{л}} u'_{\text{л}} = k_{\text{п}} u'_{\text{п}}, \\ k_{\text{л}} = k(\xi - 0), \quad k_{\text{п}} = k(\xi + 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Будем рассматривать исходную схему $L_h^{(k,q,f)}$ из семейства схем $\mathcal{L}(2, 1, 1)$ первого порядка аппроксимации с коэффициентами

$$\begin{aligned} A_i^{(h,k)} = A^h[k(x_i + sh)], \quad B_i^{(h,k)} = B^h[k(x_i + sh)], \\ D_i^{(h,q)} = D^h[q(x_i + sh)], \quad F_i^{(h,f)} = F^h[f(x_i + sh)], \end{aligned}$$

причем D^h и F^h — линейные функционалы. Предположим теперь, что $k(x) \in Q^{(2)}$, $q(x) \in Q^{(1)}$, $f(x) \in Q^{(1)}$. В силу трехточечности схемы

$$\varphi_i^h = O(h), \quad i \neq n, \quad i \neq n + 1. \quad (4)$$

Для оценки φ_n^h и φ_{n+1}^h разложим $u(x)$ в окрестности точки $x = \xi$:

$$u_{n+j} = u(\xi) + (j - \theta)h u'_n + \frac{(j - \theta)^2}{2!} h^2 \cdot u''_n + O(h^3) \quad (j = 2, 1, 0, -1).$$

В дальнейшем индекс h у φ_i^h опускаем.

Учитывая условия сопряжения (4) при $x = \xi$, получим

$$\varphi_n = \varphi_n^{(0)} + \omega_n^{(0)} + O(h), \quad \varphi_{n+1} = \varphi_{n+1}^{(0)} + \omega_{n+1}^{(0)} + O(h), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(0)} = \frac{w}{h} \left[B_n^h \left(\frac{1 - \theta}{k_{\text{п}}} + \frac{\theta}{k_{\text{л}}} \right) - A_n^h \cdot \frac{1}{k_{\text{л}}} \right] + \\ + \frac{1}{2} B_n^h [(1 - \theta)^2 u''_{\text{п}} - \theta^2 u''_{\text{л}}] + (0,5 + \theta) A_n^h u''_{\text{л}} - (k u')'_{\text{л}}, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}^{(0)} = \frac{w}{h} \left[B_{n+1}^h \cdot \frac{1}{k_{\text{п}}} - A_{n+1}^h \left(\frac{1 - \theta}{k_{\text{п}}} + \frac{\theta}{k_{\text{л}}} \right) \right] - \\ - \frac{1}{2} A_{n+1}^h [(1 - \theta)^2 u''_{\text{п}} - \theta^2 u''_{\text{л}}] + (1,5 - \theta) B_{n+1}^h u''_{\text{п}} - (k u')'_{\text{п}}, \quad (7) \end{aligned}$$

$$w = k_{\text{л}} u'_{\text{л}} = k_{\text{п}} u'_{\text{п}},$$

$$\omega_n^{(0)} = (F_n^h - f_n) - (D_n^h - q_n)u(\xi);$$

$$\omega_{n+1}^{(0)} = (F_{n+1}^h - f_{n+1}) - (D_{n+1}^h - q_{n+1})u(\xi).$$

Отсюда видно, что члены φ_n и φ_{n+1} имеют порядок $1/h$, т. е. разностный оператор $L_h^{(k,q,f)}$ не аппроксимирует дифференциальный оператор $L^{(k,q,f)}$ в точках $x = x_n$, $x = x_{n+1}$. Если $k(x) \in Q^{(1)}$, $q(x) \in Q^{(0)}$, $f(x) \in Q^{(0)}$, то

$$\varphi_i = \rho(h) \quad \text{при} \quad i \neq n, n+1,$$

$$\varphi_n = \varphi_n^{(0)} + \omega_n^{(0)} + \rho(h), \quad \varphi_{n+1} = \varphi_{n+1}^{(0)} + \omega_{n+1}^{(0)} + \rho(h),$$

где $\rho(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

2. Случай консервативной схемы. Предположим теперь, что $L_h^{(k,q,f)}$ — консервативная схема, т. е. $B_i^{(h,k)} = A_{i+1}^{(h,k)}$. В этом случае формулы (6) принимают вид:

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(0)} &= \frac{w}{h} \left[A_{n+1}^h \left(\frac{\theta}{k_n} + \frac{1-\theta}{k_{n+1}} \right) - A_n^h \cdot \frac{1}{k_n} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} A_{n+1}^h [(1-\theta)^2 u_n'' - \theta^2 u_n''] + A_n^h (0,5 + \theta) u_n'' - (L^{(k)}u)_n + \theta h (L^k u)'_n, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}^{(0)} &= \frac{w}{h} \left[A_{n+2}^h \cdot \frac{1}{k_{n+1}} - A_{n+1}^h \left(\frac{\theta}{k_n} + \frac{1-\theta}{k_{n+1}} \right) \right] - \frac{1}{2} A_{n+1}^h [(1-\theta)^2 u_n'' - \theta^2 u_n''] + \\ &+ A_{n+2}^h (1,5 - \theta) u_n'' - (L^{(k)}u)_{n+1} - h(1-\theta)(L^k u)'_n. \end{aligned} \quad (9)$$

В дальнейшем нам понадобится сумма

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(0)} + \varphi_{n+1}^{(0)} &= \frac{w}{h} \left(\frac{1}{k_{n+1}} A_{n+2}^h - \frac{1}{k_n} A_n^h \right) + A_n^h (\theta + 0,5) u_n'' + \\ &+ A_{n+2}^h (1,5 - \theta) u_n'' - (L^{(k)}u)_n - (L^{(k)}u)_{n+1} + O(h). \end{aligned} \quad (10)$$

Если $L_h^{(k)}$ — исходная схема 2-го порядка аппроксимации, то

$$A_n^h = k_n - (0,5 + \theta) h k_n' + O(h^2),$$

$$A_{n+2}^h = k_{n+2} + (1,5 - \theta) h k_{n+2}' + O(h^2)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{k_{n+1}} A_{n+2}^h - \frac{1}{k_n} A_n^h = h \left[(1,5 - \theta) \cdot \frac{k_n'}{k_n} + (0,5 + \theta) \cdot \frac{k_{n+2}'}{k_{n+1}} \right] + O(h^2).$$

В результате получаем

$$\varphi_n^{(0)} + \varphi_{n+1}^{(0)} = (0,5 - \theta) \{ (L^{(k)}u)_{n+1} - (L^{(k)}u)_n \} + O(h). \quad (11)$$

Вычислим теперь сумму $\omega_n^0 + \omega_{n+1}^0$. Для простоты приведем вычисления, относящиеся к слагаемым, содержащим f .

Следует различать два случая:

а) если $\theta < 0,5$, то

$$F_{n+1}^h = f_{\Pi} + O(h), \quad F_n^h = F_n^{(0)} + O(h),$$

$$\omega_n^0 + \omega_{n+1}^0 = F_n^{(0)} - f_{\Pi} + O(h), \quad F_n^{(0)} = F^{(0)}[f(x_n + sh)];$$

б) если $\theta > 0,5$, то

$$F_{n+1}^h = F_{n+1}^{(0)} + O(h), \quad F_n^h = f_{\Pi} + O(h),$$

$$\omega_n^0 + \omega_{n+1}^0 = F_{n+1}^{(0)} f_{\Pi} + O(h).$$

В общем случае для схемы $L_h^{(k,q,f)}$ второго порядка аппроксимации получаем:

$$\varphi_n + \varphi_{n+1} = (0,5 - \theta)[(L^{(k,q,f)}u)_{\Pi} - (L^{(k,q,f)}u)_{\Pi}] + \chi_n +$$

$$+ O(h) = \chi_n + O(h), \quad (12)$$

где

$$\chi_n = F_n^{(0)} - D_n^{(0)}u(\xi) - (0,5 + \theta)(f_{\Pi} - q_{\Pi}u(\xi)) +$$

$$+ (0,5 - \theta)(f_{\Pi} - q_{\Pi}u(\xi)), \quad \theta < 0,5;$$

$$\chi_n = F_{n+1}^{(0)} - D_{n+1}^{(0)}u(\xi) + (1,5 - \theta)(f_{\Pi} - q_{\Pi}u(\xi)) -$$

$$- (1,5 - \theta)(f_{\Pi} - q_{\Pi}u(\xi)), \quad \theta > 0,5.$$

Заметим, что в случае $q(x) = 0$, $f(x) = 0$

$$\varphi_n + \varphi_{n+1} = O(h). \quad (13)$$

В общем же случае

$$\varphi_n + \varphi_{n+1} = O(1). \quad (14)$$

3. Основная лемма. В связи с тем, что в окрестности точки разрыва коэффициентов уравнения $L^{(k,q,f)}u = 0$ разностный оператор не аппроксимирует дифференциального оператора, возникает вопрос: каковы необходимые условия, которым должны удовлетворять φ_n и φ_{n+1} , чтобы схема $L_h^{(k,q,f)}$ сходилась или имела n -й порядок точности ($n = 1, 2$) на любой последовательности сеток S_h при $h \rightarrow 0$ (или $N \rightarrow \infty$)?

Ответ на этот вопрос будет получен с помощью основной леммы, доказываемой в этом пункте.

Рассмотрим разностный оператор

$$\tilde{L}_h z_i = \frac{1}{h^2} (\tilde{B}_i^h \Delta z_i - \tilde{A}_i^h \nabla z_i), \quad (15)$$

определенный на любой последовательности сеток S_h ($h = \frac{1}{N}$).

Пусть (\bar{x}, \bar{x}) — некоторая окрестность особой точки $\xi \in (0, 1)$, $0 < \bar{x} < \xi < \bar{\bar{x}} < 1$, причем

$$\bar{x} = x_{\bar{n}-1} + \bar{\theta}h, \quad \xi = x_n + \theta h, \quad \bar{\bar{x}} = x_{\bar{n}} + \bar{\bar{\theta}}h, \quad 0 \leq \bar{\theta}, \theta, \bar{\bar{\theta}} \leq 1,$$

где

$$x_i = ih.$$

В дальнейшем мы будем иметь дело с операторами \tilde{L}_h , коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$0 < M_1 \leq \tilde{A}_i^h \leq M_2, \quad 0 < M_1 \leq \tilde{B}_i^h \leq M_2, \quad \bar{n} < i < \bar{\bar{n}}, \quad (\bar{\alpha})$$

$$e^{-bh} \leq \tilde{\chi}_i = \frac{\tilde{B}_i^h}{\tilde{A}_{i+1}^h} \leq e^{bh}, \quad \bar{n} < i < \bar{\bar{n}}, \quad i \neq n-1, n, n+1, \quad (\bar{\beta})$$

где M_1, M_2 и b — положительные постоянные, не зависящие от h .

Основная лемма. Если коэффициенты \tilde{A}_i^h и \tilde{B}_i^h оператора \tilde{L}_h удовлетворяют условиям $(\bar{\alpha})$ и $(\bar{\beta})$ и функция $\tilde{\varphi}_i^h$ равномерно сходится к нулю на интервале $(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ при $h \rightarrow 0$ для всех $i \neq n, n+1$:

$$|\tilde{\varphi}_i^h| \leq \rho(h), \quad (16)$$

то для равномерной сходимости некоторой последовательности решений уравнения

$$\tilde{L}_h z_i^h = -\tilde{\varphi}_i^h \quad (17)$$

к нулю при $h \rightarrow 0$ на интервале $(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ ($|\tilde{\varphi}_i^h| \leq \rho(h)$, $\bar{n} \leq i \leq \bar{\bar{n}}$) необходимо выполнение условий

$$h^2 \tilde{\varphi}_{n+1}^h = \rho(h), \quad h^2 \tilde{\varphi}_i^h = \rho(h), \quad (a)$$

$$\Delta(\xi, h) = h(\tilde{A}_{n+1}^h \tilde{\varphi}_n^h + \tilde{B}_n^h \tilde{\varphi}_{n+1}^h) = \rho(h). \quad (b)$$

Введем функции

$$\varphi_i^{(1)} = \delta_{i,n} \tilde{\varphi}_n^h + \delta_{i,n+1} \tilde{\varphi}_{n+1}^h, \quad \varphi_i^{(2)} = \tilde{\varphi}_i^h - \varphi_i^{(1)},$$

где

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

и представим рассматриваемое решение z_i^h уравнения (17) в виде суммы

$$z_i^h = z_i^{(1)} + z_i^{(2)},$$

где $z_i^{(2)}$ — решение уравнения $L_h z_i^{(2)} = -\varphi_i^{(2)}$ с некоторыми краевыми условиями, например $z_{\bar{n}}^{(2)} = 0$, $z_{\bar{\bar{n}}}^{(2)} = 0$.

Условия $(\bar{\alpha})$ и $(\bar{\beta})$, как было показано в § 2, обеспечивают существование и двухстороннюю ограниченность разностной функции Грина оператора \tilde{L}_h .

Ниже при доказательстве основной леммы мы вводим разностные функции Грина $G_{ij}^{(a)}$ и $G_{ij}^{(b)}$ консервативного оператора $\Lambda_i \tilde{L}_h$ для первой краевой задачи на отрезках $n \leq i \leq \bar{n}$ и $\bar{n} \leq i \leq \bar{\bar{n}}$ соответственно.

Функции $G_{ij}^{(a)}$ и $G_{ij}^{(b)}$ определяются из условий

$$\Lambda_i^{(a)} \tilde{L}_h G_{ij}^{(a)} = -\frac{\delta_{i,j}}{h} \quad (n < i < \bar{n}; j \text{ фиксировано, } n \leq j \leq \bar{n}),$$

$$G_{ij}^{(a)} = 0 \text{ при } i = n \text{ и } i = \bar{n}, \quad \Lambda_i^{(a)} = \sum_{s=n}^{i-1} \tilde{\chi}_s;$$

$$\Lambda_i^{(b)} \tilde{L}_h G_{ij}^{(b)} = -\frac{\delta_{i,j}}{h} \quad (\bar{n} < i < \bar{\bar{n}}; j \text{ фиксировано, } \bar{n} \leq j \leq \bar{\bar{n}}),$$

$$G_{ij}^{(b)} = 0 \text{ при } i = \bar{n} \text{ и } i = \bar{\bar{n}}, \quad \Lambda_i^{(b)} = \prod_{s=\bar{n}}^{i-1} \tilde{\chi}_s.$$

Пользуясь формулой Грина, находим

$$z_i^{(2)} = \sum_{j=\bar{n}+1}^{\bar{\bar{n}}} G_{ij}^{(b)} \Lambda_j^{(b)} \varphi_j^{(2)} h \quad (z_{\bar{n}}^{(2)} = z_{\bar{\bar{n}}}^{(2)} = 0).$$

Отсюда, в силу ограниченности $G_{ij}^{(6)}$, следует

$$\|z_i^{(2)}\|_1 = \rho(h) \quad (\|\psi\|_1 = \max_{\bar{n} \leq i \leq \bar{n}} |\psi_i|). \quad (18)$$

Таким образом, вместо решения уравнения (17) можно рассматривать на отрезке $\bar{n} \leq i \leq \bar{n}$ решение $z_i^{(1)}$ уравнения

$$L_h z_i^{(1)} = -\varphi_i^{(1)}. \quad (19)$$

По условию леммы $\|z_i^{(1)}\|_1 = \rho(h)$. Отсюда и из (18) следует, что $z_i^{(1)} = \rho(h)$ на (\bar{x}, \bar{x}) .

Требуется доказать, что при этом условии должны выполняться условия (а) и (б).

Для доказательства леммы мы представляем решение уравнения (19) с помощью функций Грина $G_{ij}^{(a)}$ и $G_{ij}^{(b)}$. Так, например, решение на интервале $n \leq i \leq \bar{n}$ выражается через $\tilde{\varphi}_{n+1}^h$ и краевые значения $z_n^{(1)}$, $z_{\bar{n}}^{(1)}$, стремящиеся к нулю при $h \rightarrow 0$. Для получения нужной оценки (а) или (б) мы пользуемся оценками снизу для разностной функции Грина (см. § 2, п. 3).

1°. Решение уравнения (19) внутри интервала $n \leq i \leq \bar{n}$ представим в виде:

$$z_i^{(1)} = \bar{z}_i^{(1)} + \bar{\bar{z}}_i^{(1)}, \quad \bar{z}_i^{(1)} = \sum_{j=n+1}^{\bar{n}-1} G_{ij}^{(a)} \Lambda_j^{(a)} \tilde{\varphi}_j^h h = G_{i,n+1}^{(a)} \Lambda_{n+1}^{(a)} \tilde{\varphi}_{n+1}^h h, \quad (20)$$

$$\bar{\bar{z}}_i^{(1)} = \frac{1}{h} \tilde{A}_{n+1}^h G_{i,n+1}^{(a)} \Lambda_{n+1}^{(a)} z_n^{(1)} + \frac{1}{h} \tilde{B}_{\bar{n}-1}^h G_{i,\bar{n}-1}^{(a)} \Lambda_{\bar{n}-1}^{(a)} \cdot z_{\bar{n}}^{(1)}. \quad (21)$$

В силу ограниченности разностных отношений функции Грина $G_{ij}^{(a)}$ при $j = n$ и $j = \bar{n} - 1$, получаем

$$\|\bar{\bar{z}}_i^{(1)}\|_1 \leq M(|z_n^{(1)}| + |z_{\bar{n}-1}^{(1)}|) = \rho(h),$$

так как по условию $z_i^{(1)} = \rho(h)$.

Пользуясь оценкой снизу для $G_{i,j}^{(a)}$ (см. § 2, п. 3, (22)), видим, что

$$\Lambda_{n+1}^{(a)} G_{i,n+1}^{(a)} \geq \frac{M_1'}{(M_2')^2} \psi_{i,n+1} = \frac{M_1'}{(M_2')^2} h(x_{\bar{n}} - x_i).$$

Выберем для определенности $i = i_0$ так, чтобы $x_{\bar{n}} - x_{i_0} \geq 0,5(\bar{x} - \xi)$, тогда

$$\Lambda_{n+1}^{(a)} G_{i_0,n+1}^{(a)} \geq h \cdot g_0^{(a)}, \quad g_0^{(a)} = \frac{M_1'}{(M_2')^2} \cdot 0,5(\bar{x} - \xi).$$

Отсюда и из (21) следует, что

$$|\tilde{\varphi}_{n+1}^h| \cdot h^2 \leq \max_{n < i < \bar{n}} |z_i^{(1)} - \bar{z}_i^{(1)}|,$$

$$h^2 \tilde{\varphi}_{n+1}^h = \rho(h). \quad (22)$$

2°. Чтобы получить условие (6), представим решение уравнения (19) внутри интервала $\bar{n} < i < \bar{\bar{n}}$ с помощью функции Грина $G_{ij}^{(6)}$:

$$z_j^{(1)} = \bar{z}_i^{(1)} + \bar{\bar{z}}_i^{(1)},$$

где

$$\bar{z}_i^{(1)} = G_{i,n}^{(6)} \Lambda_n^{(6)} \tilde{\varphi}_n^h \cdot h + G_{i,n+1}^{(6)} \Lambda_{n+1}^{(6)} \tilde{\varphi}_{n+1}^h \cdot h,$$

$\bar{\bar{z}}_i^{(1)}$ выражается формулой, аналогичной (21).

Учитывая, что

$$\Lambda_{n+1}^{(6)} = \Lambda_n^{(6)} \cdot (\tilde{B}_n^h / \tilde{A}_{n+1}^h),$$

представим $\bar{z}_i^{(1)}$ в виде

$$\bar{z}_i^{(1)} = G_{i,n}^{(1)} \cdot \frac{\Delta(\xi, h)}{\tilde{A}_{n+1}^h} \cdot \Lambda_n^{(6)} + \frac{G_{i,n+1}^{(6)} - G_{i,n}^{(6)}}{h} \cdot \Lambda_{n+1}^{(6)} (h^2 \tilde{\varphi}_{n+1}^h). \quad (23)$$

В силу (22) второе слагаемое есть величина $\rho(h)$.

Выберем затем $i = i_0$ так, что $x_{i_0} - x_{\bar{n}} \geq 0,5(\bar{x} - \bar{x})$, получим

$$\frac{\Lambda_n^{(6)}}{\tilde{A}_{n+1}^h} G_{i_0,n}^{(6)} \geq g_0^{(6)}.$$

Поэтому из (23) следует оценка

$$\Delta(\xi, h) \leq \frac{|\bar{z}_{i_0}^{(1)}|}{g_0^{(6)}} + \rho(h) = \rho(h). \quad (24)$$

Условие $h^2 \tilde{\varphi}_n^h = \rho(h)$, очевидно, является следствием условий (22) и (24). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Основная лемма сохраняет силу, если функция

$$\varphi_i^{(2)} = \varphi_i^h - (\delta_{i,n} \tilde{\varphi}_n^h + \delta_{i,n+1} \tilde{\varphi}_{n+1}^h)$$

удовлетворяет условию сходимости по одной из применяемых нами норм:

$$\begin{aligned}\|\varphi_i^{(2)}\|_1 &= \max_{\bar{n} < i < \bar{\bar{n}}} |\varphi_i^{(2)}| = \rho(h), \\ \|\varphi_i^{(2)}\|_2 &= \sum_{i=\bar{n}+1}^{\bar{\bar{n}}-1} h \left| \sum_{s=\bar{n}+1}^i h \varphi_s^{(2)} \right| = \sum_{i=\bar{n}+1}^{\bar{\bar{n}}-1} h \left| \sum_{\substack{s=\bar{n}+1 \\ (s \neq n, s \neq n+1)}}^i h \varphi_s \right| = \rho(h), \\ \|\varphi_i^{(2)}\|_3 &= \sum_{i=\bar{n}+1}^{\bar{\bar{n}}-1} h |\varphi_i^{(2)}| = \rho(h).\end{aligned}$$

В самом деле, из неравенств

$$\|z_i^{(2)}\|_1 \leq M \|\varphi_i^{(2)}\|_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, 3),$$

полученных в § 2 п. 3, следует

$$\|z_i^{(2)}\|_1 = \rho(h).$$

Лемма 1. Если коэффициенты оператора \tilde{L}_h удовлетворяют условиям $(\bar{\alpha})$ и $(\bar{\beta})$, а функция $\varphi_i^{(2)} = \tilde{\varphi}_i^h - (\delta_{i,n} \tilde{\varphi}_n^h + \delta_{i,n+1} \tilde{\varphi}_{n+1}^h)$ на интервале $(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ имеет по какой-либо норме $\|\varphi_i^{(2)}\|_\sigma$ ($\sigma = 1, 2, 3$) порядок h^m :

$$\|\varphi_i^{(2)}\|_\sigma = O(h^m),$$

то для того чтобы некоторая последовательность решений уравнения (17) имела на интервале $(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ m -й ($m = 1, 2$) порядок малости при $h \rightarrow 0$ ($\|\bar{z}_i^h\|_1 = O(h^m)$), необходимо выполнение условий

$$h^2 \tilde{\varphi}_n^h = O(h^m), \quad h^2 \varphi_{n+1}^h = O(h^m), \quad (a_m)$$

$$\Delta(\xi, h) = O(h^m). \quad (б_m)$$

4. Необходимое условие сходимости для исходной схемы в классе разрывных коэффициентов. Для выяснения необходимых условий сходимости разностной схемы $L_h^{(k,q,f)}$ из исходного семейства $\mathcal{L}(n_1, n_2, n_3)$ в классе разрывных коэффициентов рассмотрим разностную задачу (III) для погрешности $z_i = y_i - u(x_i)$.

Проведем сначала исследование для схемы $L_h^{(k)}$ первого ранга, удовлетворяющей (У. А. 1).

Пусть $\xi = x_n + \theta \cdot h$ ($0 < \theta \leq 1$) — точка разрыва коэффициента $k(x) \in Q^{(1)}$. Учитывая, что при $i \neq n$, $i \neq n + 1$

$$\begin{aligned} B_i^{(h,k)} &= k_i + hk'_i B_1^{(0)}[s] + h\rho(h), \\ A_i^{(h,k)} &= k_i + hk'_i(1 + A_1^{(0)}[s]) + h\rho(h), \end{aligned}$$

получим, что $\kappa_i = \frac{B_i^{(h,k)}}{A_{i+1}^{(h,k)}} = 1 + h\rho(h)$ при $i \neq n$ в некоторой окрестности

$(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ точки ξ , не содержащей других точек разрыва функции $k(x)$.

Отсюда и из условия $0 \leq M_1 \leq k(x) \leq M_2$ следует, что условия (α) и (β) выполнены и

$$\varphi_i^h = (L_h^{(k)} u_i) - (L^{(k)} u)_i = \rho(h)$$

в точках $i \neq n$, $i \neq n + 1$ на интервале $(\bar{x} + h, \bar{\bar{x}} - h)$.

Учитывая замечание в конце п. 3, убеждаемся, что условие

$$\Delta = h(B_n^{(h,k)} \varphi_{n+1}^h + A_{n+1}^{(h,k)} \varphi_n^h) = \rho(h) \quad (23')$$

необходимо для сходимости к нулю решения задачи (III), т. е. для сходимости разностной схемы $L_h^{(k)}$ и, следовательно, схемы $L_h^{(k,q,f)}$ из $\mathcal{L}(1, 0, 0)$ в классе разрывных коэффициентов.

Условие $h^2 \varphi_n^h = \rho(h)$ выполнено, так как $h \varphi_n^h = O(1)$.

Подставляя в (23) выражения (5) и (6) для φ_n^h и φ_{n+1}^h , получим необходимое условие сходимости схемы $L_h^{(k,q,f)}$ из семейства $\mathcal{L}(1, 0, 0)$ в форме

$$\frac{B_n^{(h,k)} B_{n+1}^{(h,k)}}{k_{\Pi}} - \frac{A_n^{(h,k)} A_{n+1}^{(h,k)}}{k_{\Pi}} = \rho(h). \quad (24')$$

Рассмотрим теперь консервативные схемы.

Т е о р е м а 1. Любая консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ нулевого ранга удовлетворяет необходимому условию сходимости в классе $k, q, f \in Q^{(0)}$.

В самом деле, если схема консервативна, то

$$B_n^{(h,k)} = A_{n+1}^{(h,k)},$$

$$A_n^{(h,k)} = A^h[k(x_n + sh)] = A^{(0)}[k(x_n + sh)] + \rho(h) = k_{\Pi} + \rho(h) = k_{\Pi} + \rho(h),$$

$$B_{n+1}^{(h,k)} = A_{n+2}^{(h,k)} = k_{n+2} + \rho(h) = k_{\Pi} + \rho(h).$$

Подставляя эти выражения в левую часть условия (24'), будем иметь

$$\frac{B_n^{(h,k)} B_{n+1}^{(h,k)}}{k_{\Pi}} - \frac{A_n^{(h,k)} A_{n+1}^{(h,k)}}{k_{\Lambda}} = A_{n+1}^{(h,k)} \left(\frac{B_{n+1}^{(h,k)}}{k_{\Pi}} - \frac{A_n^{(h,k)}}{k_{\Lambda}} \right) = \rho(h).$$

Теорема 2. Любая консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ первого порядка аппроксимации из семейства $\mathcal{L}(2, 1, 1)$ удовлетворяет необходимым условиям 1-го порядка точности в классе разрывных коэффициентов $k(x) \in Q^{(1)}$, $q(x) \in Q^{(0)}$, $f(x) \in Q^{(0)}$.

В самом деле, условие $h^2 \varphi_n = O(h)$ или $h \varphi_n = O(1)$ выполнено автоматически. Что касается второго условия $\Delta = O(h)$, то оно легко проверяется, если учесть, что $B_n^{(h,k)} = A_{n+1}^{(h,k)}$, $B_{n+1}^{(h,k)} = k_{\Pi} + O(h)$, $A_n^{(h,k)} = k_{\Lambda} + O(h)$. Из условий теоремы следует, что $\varphi_i = O(h)$ при $i \neq n$, $i \neq n+1$. Поэтому здесь лемма 1 применима ($m = 1$).

5. Необходимые условия второго порядка точности в классе разрывных коэффициентов. Рассмотрим разностную краевую задачу (III) для функции $z_i = y_i - u(x_i)$.

Для простоты предположим, что k, q, f имеют одну точку разрыва. Полагаем $\varphi_i^{(1)} = \delta_{i,n} \varphi_n + \delta_{i,n+1} \varphi_{n+1}$, $\varphi_i^{(2)} = \varphi_i - \varphi_i^{(1)}$. Если $k(x) \in Q^{(3)}$, $q(x) \in Q^{(2)}$, $f(x) \in Q^{(2)}$, а схема $L_h^{(k,q,f)}$ принадлежит семейству $\mathcal{L}(3, 2, 2)$ и имеет второй порядок аппроксимации, то $\|\varphi_i^{(2)}\|_1 = O(h^2)$ и условия леммы 1 выполнены.

В силу леммы 1 необходимые условия второго порядка точности схемы $L_h^{(k,q,f)}$ в классе разрывных коэффициентов имеют вид:

$$\varphi_n = O(1) \quad \text{или} \quad \varphi_{n+1} = O(1), \quad (a_2)$$

$$\Delta = O(h^2). \quad (b_2)$$

Если схема консервативна, то условие (b₂) эквивалентно условию (b'₂): $\varphi_n + \varphi_{n+1} = O(h)$.

Лемма 2. Необходимому условию второго порядка точности

$$\varphi_n + \varphi_{n+1} = O(h) \quad (25)$$

в классе разрывных коэффициентов $k(x) \in Q^{(2)}$ удовлетворяет любая консервативная схема $L_h^{(k)}$ второго порядка аппроксимации.

Это утверждение является следствием формулы

$$\varphi_n^{(0)} + \varphi_{n+1}^{(0)} = (0,5 - \theta)\{(L^{(k)}u)_n - (L^{(k)}u)_n\} + O(h) = O(h),$$

так как $(L^{(k)}u)_n = (L^{(k)}u)_n = 0$, поскольку $u = u(x)$ есть решение уравнения $L^{(k)}u = 0$.

Отсюда следует, что для консервативной схемы $L_h^{(k)}$ второго порядка надо проверять только первое из необходимых условий $\varphi_n = O(1)$.

6. О достаточных условиях сходимости. В п. 5 мы установили необходимое условие сходимости исходной схемы $L_h^{(k,q,f)}$ в некотором классе разрывных коэффициентов ($k(x) \in Q^{(1)}$, $q(x) \in Q^{(0)}$, $f(x) \in Q^{(0)}$).

Покажем, что это условие является и достаточным для сходимости.

Теорема 3. *Для того чтобы разностная схема $L_h^{(k,q,f)}$ первого порядка аппроксимации из класса $\mathcal{L}(2, 1, 1)$ сходилась для любых коэффициентов $k(x) \in Q^{(1)}$, $q(x) \in Q^{(0)}$, $f(x) \in Q^{(0)}$, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $\xi_j = x_{n_j} + \theta_j h$ ($j = 1, 2, \dots, j_0$) разрыва функций k, q и f выполнялось условие*

$$\Delta_j = h(B_{n_j}^{(h,k)}\varphi_{n_j+1} + A_{n_j+1}^{(h,k)}\varphi_{n_j}) = \rho(h), \quad (26)$$

где

$$\varphi_i = L_h^{(k,q,f)}u_i - (L^{(k,q,f)}u)_i.$$

Доказательство. Необходимость условия $\Delta_j = \rho(h)$ установлена ранее. Для доказательства достаточности воспользуемся формулой

$$\|z_i\|_1 = \|y_i - u_i\|_1 \leq M\|\varphi_i\|_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, 3),$$

где M — постоянная, не зависящая от h .

Представим φ_i и z_i в виде сумм:

$$\varphi_i = \varphi_i^{(1)} + \varphi_i^{(2)}, \quad \varphi_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{j_0} (\delta_{i,n_j}\varphi_{n_j} + \delta_{i,n_j+1}\varphi_{n_j+1}), \quad z_i = z_i^{(1)} + z_i^{(2)},$$

где $z_i^{(m)}$ — решение задачи (III) с правой частью $\varphi_i^{(m)}$ ($m = 1, 2$). В точках $i \neq n_j, i \neq n_j + 1$ ($j = 1, 2, \dots, j_0$) $\varphi_i^{(2)} = \rho(h)$, пользуясь неравенством

$$\|z_i^{(2)}\|_1 \leq \frac{1}{M_1}\|\varphi_i^{(2)}\|_1,$$

получим $\|z_i^{(2)}\|_1 = \max_{0 < i < N} |z_i^{(2)}| = \rho(h)$.

Для оценки $z_i^{(1)}$ воспользуемся неравенством

$$\|z_i^{(1)}\|_1 \leq M \|\Lambda_s \varphi_s^{(1)}\|_2 \left(\|\psi_s\|_2 = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=1}^i h \psi_s \right| \right), \quad (27)$$

где $\Lambda_s = \prod_{m=1}^{s-1} (B_m^h / A_{m+1}^h)$, а M — постоянная, не зависящая от h .

Для определенности будем считать, что $n_j < n_{j+1}$.

Подставляя в (27) выражение для $\varphi_s^{(1)}$, получим

$$\|z_i^{(1)}\|_1 \leq M \sum_{j=1}^{j_0} [\Lambda_{n_j} \varphi_{n_j} h^2 + h(\Lambda_{n_j} \varphi_{n_j} + \Lambda_{n_{j+1}} \varphi_{n_{j+1}})].$$

Подставляя в первую часть $\Lambda_{n_{j+1}} = \Lambda_{n_j} (B_{n_j} / A_{n_{j+1}})$, находим

$$\|z_i^{(1)}\|_1 \leq M \left\{ \sum_{j=1}^{j_0} \Lambda_{n_j} \varphi_{n_j} h^2 + \sum_{j=1}^{j_0} \frac{\Lambda_{n_j}}{A_{n_{j+1}}} \Delta_j \right\}. \quad (28)$$

Первое слагаемое имеет первый порядок малости, так как $h \varphi_{n_j} = O(1)$. Второе слагаемое сходится к нулю при $h \rightarrow 0$, так как по условию $\Delta_j = \rho(h)$, а число j_0 — конечно. Таким образом,

$$\|z_i\|_1 \leq \|z_i^{(1)}\|_1 + \|z_i^{(2)}\|_1 = \rho(h).$$

Теорема 4. Если $L_h^{(k,q,f)}$ — разностная схема типа $\mathcal{L}(m+1, m, m)$ m -го ($m = 1, 2$) порядка аппроксимации, то для того, чтобы она в классе $k(x) \in Q^{(m+1)}$, $q, f \in Q^{(m)}$ имела m -й порядок точности, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности каждой точки $\xi_j = x_{n_j} + \theta_j h$ ($j = 1, 2, \dots, j_0$) разрыва функции k, q, f выполнялись условия

$$h^2 \varphi_{n_j}^h = O(h^m), \quad h^2 \varphi_{n_{j+1}}^h = O(h^m), \quad (a_m)$$

$$\Delta(\xi_j, h) = O(h^m) \quad (j = 1, 2, \dots, j_0). \quad (б_m)$$

Для доказательства достаточности условий (a_m) и $(б_m)$ надо учесть, что $\varphi_i^{(2)} = O(h^m)$, $\|z_i^{(2)}\|_1 = O(h^m)$, и воспользоваться неравенством (28). Необходимость следует из леммы 1.

§ 4. Коэффициенто-устойчивые разностные схемы

При решении дифференциального уравнения $L^{(k,q,f)}$ методом конечных разностей может оказаться, что информация о коэффициентах уравнения k, q, f является недостаточно полной. Это может случиться, например, когда эти коэффициенты определяются приближенно с помощью некоторого вычислительного алгоритма.

Поэтому даже при точном вычислении коэффициентов разностной схемы $L_h^{(k,q,f)}$ будет допускаться погрешность. С другой стороны, может оказаться, что функционалы A^h, B^h, D^h, F^h сами вычисляются приближенно, что приводит также к погрешности в коэффициентах схемы. Отсюда ясно, насколько важной является задача изучения схем с возмущенными коэффициентами.

Ниже вводится норма возмущения коэффициентов схемы и с ее помощью дается определение коэффициенто-устойчивой, или ко-устойчивой, разностной схемы.

Основной результат данного параграфа выражает теорема о том, что необходимым и достаточным условием ко-устойчивости канонической схемы типа $\mathcal{L}(1, 0, 0)$ является ее консервативность (теорема 3).

1. Зависимость решения дифференциального уравнения от коэффициентов. Рассмотрим краевую задачу

$$L^{(k,q,f)}u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \bar{u}_1, \quad u(1) = \bar{u}_2 \quad (1)$$

и сравним ее решение $u(x)$ с решением $\tilde{u}(x)$ возмущенной задачи

$$L^{(\tilde{k}, \tilde{q}, \tilde{f})}\tilde{u} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad \tilde{u}(0) = \bar{u}_1, \quad \tilde{u}(1) = \bar{u}_2. \quad (2)$$

Будем предполагать, что коэффициенты задач (1) и (2) удовлетворяют условиям

$$0 < M_1 \leq k(x) \leq M_2, \quad 0 \leq q(x) \leq M_3, \quad |f(x)| \leq M_4. \quad (\alpha)$$

Лемма 1. Если коэффициенты уравнений (1) и (2) кусочно-непрерывны и удовлетворяют условиям (α), то

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq C_1 \int_0^1 |k(x) - \tilde{k}(x)| dx + C_2 \int_0^1 |q(x) - \tilde{q}(x)| dx + \\ + C_3 \int_0^1 |f(x) - \tilde{f}(x)| dx, \quad (3)$$

где C_1, C_2, C_3 — положительные постоянные, зависящие только от M_j ($j = 1, 2, 3, 4$), \bar{u}_1 и \bar{u}_2 .

В самом деле, разность $z = u - \tilde{u}$ определяется из

$$L^{(k,q)}z = -\varphi, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0, \quad (4)$$

где

$$\varphi = L^{(k,q,f)}\tilde{u} - L^{(\tilde{k},\tilde{q},\tilde{f})}\tilde{u} = [(k - \tilde{k})\tilde{u}]' - (q - \tilde{q})\tilde{u} + (f - \tilde{f}). \quad (5)$$

Решение задачи (4) представим в виде

$$z(x) = \int_0^1 G(x, \xi)\varphi(\xi) d\xi = - \int_0^1 [k(\xi) - \tilde{k}(\xi)] \frac{dG}{d\xi}(x, \xi)\tilde{u}'(\xi) d\xi - \\ - \int_0^1 G(x, \xi)[q(\xi) - \tilde{q}(\xi)]\tilde{u}(\xi) d\xi + \int_0^1 G(x, \xi)[f(\xi) - \tilde{f}(\xi)] d\xi, \quad (6)$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина задачи (1).

Учитывая оценки для функции Грина и решения задачи (1), устанавливаемые по аналогии с оценками, найденными в § 2:

$$0 \leq G(x, \xi) \leq \frac{1}{M_1}, \quad \left| \frac{dG}{d\xi} \right| \leq \frac{M_1 + M_3}{M_1^2}, \quad |u| \leq M_5, \quad |u'| \leq \frac{M_5(M_1 + M_3)}{M_1^2},$$

где

$$M_5 = \frac{M_4 + (|\bar{u}_1| + |\bar{u}_2|)M_3}{M_1} + |\bar{u}_2| + |\bar{u}_1|,$$

получим из (6) неравенство (3).

Неравенство (3) выражает устойчивость решения задачи (1) по отношению к изменению коэффициентов уравнения.

2. Принцип ко-устойчивости разностных схем. Переходя к разностным схемам, естественно требовать, чтобы они обладали также свойством устойчивости по отношению к возмущению их коэффициентов независимо от природы этого возмущения.

Наряду с исходной схемой $L_h^{(k,q,f)}$ рассмотрим «возмущенную» схему $\tilde{L}_h^{(\tilde{k},\tilde{q},\tilde{f})}$, коэффициенты которой $\tilde{A}_i^h, \tilde{B}_i^h, \tilde{D}_i^h, \tilde{F}_i^h$ получаются из коэффициентов $A_i^h, B_i^h, D_i^h, F_i^h$ с помощью произвольного возмущения. В общем случае это возмущение может быть вызвано искажением коэффициентов дифференциального уравнения $L^{(k,q,f)}u = 0$, искажением функционалов $A^h[\psi], B^h[\psi], D^h[\psi]$ и $F^h[\psi]$ и погрешностями, допускаемыми уже при вычислении самих коэффициентов схемы в точках сетки.

Наряду с задачей (I) мы будем рассматривать задачу

$$\tilde{L}_h^{(\tilde{k},\tilde{q},\tilde{f})}\tilde{y}_i = 0, \quad 0 < i < N, \quad \tilde{y}_0 = \bar{u}_1, \quad \tilde{y}_N = \bar{u}_2. \quad (\text{задача } (\tilde{\text{II}}))$$

Для оценки величины искажения коэффициентов мы вводим некоторую норму, например,

$$\|\psi_i\|_3 = \sum_{i=1}^{N-1} |\psi_i| h. \quad (7)$$

Для оценки решения мы по-прежнему пользуемся нормой

$$\|z_i\|_1 = \max_{0 < i < N} |z_i|. \quad (8)$$

Будем говорить, что схема $L_h^{(k,q,f)}$ коэффициенто-устойчива, или ко-устойчива, если в случае сходимости при $h \rightarrow 0$ по норме (7) коэффициентов любым образом возмущенной схемы $\tilde{L}_h^{(\tilde{k},\tilde{q},\tilde{f})}$ к коэффициентам схемы $L_h^{(k,q,f)}$ решение задачи (II) равномерно сходится к решению задачи (I) при условии, что коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ принадлежат некоторому классу $Q^{(m)}$ ($m \geq 0$).

Иными словами, схема $L_h^{(k,q,f)}$ ко-устойчива, если из условий

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}_i^h - A_i^h\|_3 = \rho(h), \quad \|\tilde{B}_i^h - B_i^h\|_3 = \rho(h), \quad \|\tilde{D}_i^h - D_i^h\|_3 = \rho(h), \\ \|\tilde{F}_i^h - F_i^h\|_3 = \rho(h) \end{aligned} \quad (9)$$

следует

$$\|\tilde{z}_i\|_1 = \|\tilde{y}_i - u(x_i)\|_1 = \rho(h). \quad (10)$$

Из определения видно, что ко-устойчивость схемы сводится к двум требованиям:

1) сходимости схемы ($\|y_i^h - u(x_i)\|_1 = \rho(h)$ в $Q^{(m)}$ ($m \geq 0$));

2) устойчивости решения разностной краевой задачи (II) относительно возмущения коэффициентов схемы ($\|\tilde{y}_i - y_i\|_1 = \rho(h)$):

$$\|\tilde{y}_i - u(x_i)\|_1 \leq \|\tilde{y}_i - y_i\|_1 + \|y_i - u(x_i)\|_1. \quad (11)$$

Для изучения структуры ко-устойчивых разностных схем, принадлежащих исходному семейству, мы специализируем тип возмущения коэффициентов разностного уравнения, предполагая, что оно вызвано возмущением коэффициентов дифференциального уравнения. Обозначим через $\tilde{k}(x, h)$, $\tilde{q}(x, h)$, $\tilde{f}(x, h)$ возмущенные коэффициенты дифференциального уравнения, зависящие от шага h разностной сетки S_h . Соответствующие коэффициенты уравнения $L_h^{(\tilde{k}, \tilde{q}, \tilde{f})} y_i = 0$ равны

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i^h &= A^h[\tilde{k}(x_i + sh, h)], & \tilde{B}_i^h &= B^h[\tilde{k}(x_i + sh, h)], \\ \tilde{D}_i^h &= D^h[\tilde{q}(x_i + sh, h)], & \tilde{F}_i^h &= F^h[\tilde{f}(x_i + sh, h)]. \end{aligned}$$

В частности, в п. 4 мы будем рассматривать возмущения коэффициентов k, q, f на одном интервале сетки в окрестности точки разрыва этих функций.

3. Ко-устойчивость консервативной схемы. Покажем, что консервативные схемы обладают свойством ко-устойчивости.

Рассмотрим сначала решения y_i^h и \tilde{y}_i^h двух разностных краевых задач:

$$L_h y_i^h = \frac{1}{h^2} \Delta(A_i^h \nabla y_i^h) - D_i^h y_i^h = -F_i^h, \quad 0 < i < N, \quad y_0^h = \bar{u}_1, \quad y_N^h = \bar{u}_2, \quad (12)$$

$$\tilde{L}_h \tilde{y}_i^h = \frac{1}{h^2} \Delta(\tilde{A}_i^h \nabla \tilde{y}_i^h) - \tilde{D}_i^h \tilde{y}_i^h = -\tilde{F}_i^h, \quad 0 < i < N, \quad \tilde{y}_0^h = \bar{u}_1, \quad \tilde{y}_N^h = \bar{u}_2, \quad (13)$$

где L_h и \tilde{L}_h — консервативные разностные операторы.

Лемма 2. Если коэффициенты консервативных разностных уравнений (12) и (13) удовлетворяют условиям (α), то справедливо неравенство

$$\|\tilde{y}_i^h - y_i^h\|_1 \leq C_1 \|\tilde{A}_i^h - A_i^h\|_2 + C_2 \|\tilde{D}_i^h - D_i^h\|_2 + C_3 \|\tilde{F}_i^h - F_i^h\|_2, \quad (14)$$

где C_1, C_2, C_3 — положительные постоянные, зависящие только от постоянных M_j ($j = 1, 2, 3, 4$).

Для доказательства этой леммы достаточно составить уравнение для разности $z_i^h = \tilde{y}_i^h - y_i^h$, после чего представить z_i^h с помощью разностной функции Грина задачи (13) и, применив первую разностную формулу Грина, воспользоваться оценками из § 2 для функции Грина и ее разностного отношения.

Обратимся теперь к вопросу о ко-устойчивости консервативной схемы $L_h^{(k,q,f)}$. Для этого нужно сравнить решения задач (II) и $(\tilde{\text{II}})$ при условии, что

$$\|\tilde{A}_i^h - A_i^h\|_3 = \rho(h), \quad \|\tilde{D}_i^h - D_i^h\|_3 = \rho(h), \quad \|\tilde{F}_i^h - F_i^h\|_3 = \rho(h). \quad (15)$$

Лемма 2 применима к консервативной схеме любого ранга. Поэтому будем иметь

$$\|\tilde{y}_i^h - y_i^h\|_1 = \rho(h). \quad (16)$$

Отсюда в силу неравенства (14) следует, что доказательство ко-устойчивости консервативной схемы целиком сводится к доказательству сходимости этой схемы в классе разрывных коэффициентов, так как

$$\|\tilde{y}^h - u\|_1 \leq \|y^h - u\|_1 + \rho(h).$$

Из теоремы § 3, п. 6. следует, что консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ из класса $\mathcal{L}(1, 0, 0)$ сходится, если

$$k(x) \in Q^{(1)}, \quad q(x) \in Q^{(0)}, \quad f(x) \in Q^{(0)}.$$

Тем самым доказана

Т е о р е м а 1. *Консервативная разностная схема $L_h^{(k,q,f)}$ первого ранга является ко-устойчивой, если $k(x) \in Q^{(1)}$, $q, f \in Q^{(0)}$.*

В § 5 будет доказана теорема о ко-устойчивости консервативной схемы нулевого ранга в классе $Q^{(0)}$ ($k, q, f \in Q^{(0)}$).

Справедливо ли обратное утверждение, т. е. всякая ли ко-устойчивая схема консервативна? Положительный ответ на этот вопрос будет дан в п. 5.

4. Необходимое условие ко-устойчивости. Для практического использования требования ко-устойчивости схемы найдем необходимое условие ко-устойчивости, которое носит локальный характер и аналогично необходимому условию сходимости из § 3, п. 3.

Пусть $L_h^{(k,q,f)}$ — некоторая ко-устойчивая схема типа $\mathcal{L}(1, 0, 0)$. Поскольку речь идет о необходимом условии, то мы можем вести изложение для простейшего случая схемы $L_h^{(k)}$ первого ранга, полагая $q(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv 0$.

Пусть $k(x)$ — некоторая функция из $Q^{(m)}$ ($m \geq 1$), имеющая разрыв в иррациональной точке $\xi = x_n + \theta \cdot h$, $x_n = n \cdot h$, $0 < \theta < 1$. Введем функцию $\tilde{k}(x, h)$, совпадающую с $k(x)$ всюду, кроме интервала (x_n, x_{n+1}) . Тогда коэффициенты $\tilde{A}_i^h = A_i^{(h, \tilde{k})}$ и $\tilde{B}_i^h = B_i^{(h, \tilde{k})}$ будут совпадать с $A_i^h = A^{(h, k)}$ и $B_i^h = B^{(h, k)}$ всюду, кроме $i = n$ и $i = n + 1$.

Поскольку схема $L_h^{(k)}$ по предположению ко-устойчива, т. е.

$$\|\tilde{y}^h - u\| = \rho(h),$$

и имеет первый ранг, то мы находимся в условиях применимости основной леммы § 3. Пользуясь выражениями $\tilde{\varphi}_n$ и $\tilde{\varphi}_{n+1}$ для схемы $L_h^{(\tilde{k})}$, приведенными в п. 1, § 3, получим условие

$$\frac{\tilde{B}_n^h \tilde{B}_{n+1}^h}{k_n} - \frac{\tilde{A}_n^h \tilde{A}_{n+1}^h}{k_n} = \rho(h), \quad (17)$$

которое тем самым является необходимым условием ко-устойчивости.

В дальнейшем мы будем для простоты считать, что $k(x)$ — кусочно-постоянная функция ($k(x) = k_n$ при $x < \xi$ и $k(x) = k_n$ при $x \geq \xi$).

Для задания функции $\tilde{k}(x, h)$ введем произвольную кусочно-непрерывную положительную функцию $\mu^*(s)$, $0 \leq s \leq 1$, а также функцию

$$\mu(s) = \begin{cases} k_n, & s \leq 0, \\ \mu^*(s), & 0 < s < 1, \\ k_n, & s \geq 1 \end{cases} \quad (18)$$

и положим

$$\tilde{k}(x, h) = \mu\left(\frac{x - x_n}{h}\right). \quad (19)$$

Поскольку коэффициент $\tilde{k}(x, h)$ должен удовлетворять условию ограниченности снизу ($\tilde{k}(x, h) \geq M_1 > 0$), то и функция $\mu(s)$ подчинена этому условию.

Функции той же структуры, что и $\mu(s)$, в дальнейшем будем называть функциями типа μ .

Подставляя (19) в условие (17), получим необходимое условие ко-устойчивости

$$\frac{B[\mu(s)]B[\mu(1+s)]}{k_n} - \frac{A[\mu(s)]A[\mu(1+s)]}{k_n} = 0, \quad (20)$$

где $A[\mu]$ и $B[\mu]$ — канонические части функционалов $A^h[\mu]$ и $B^h[\mu]$ (индекс (0) у функционалов $A^{(0)}$ и $B^{(0)}$ мы опускаем).

Потребуем теперь, чтобы условие (20) выполнялось для функции $\mu(s) + \delta \cdot \varphi(s)$ (типа μ), где δ — произвольный неотрицательный параметр,

$$\varphi(s) = \begin{cases} k_{\pi}, & s \leq 0, \\ \varphi^*(s), & 0 < s < 1, \\ 0, & s \geq 1, \end{cases} \quad (21)$$

где $\varphi^*(s)$ — произвольная кусочно-непрерывная неотрицательная функция. Тогда будем иметь

$$\frac{B[\mu(s) + \delta \cdot \varphi(s)]B[\mu(1+s) + \delta \cdot \varphi(1+s)]}{k_{\pi}} - \frac{A[\mu(s) + \delta \cdot \varphi(s)]A[\mu(1+s) + \delta \cdot \varphi(1+s)]}{k_{\pi}(1+\delta)} = 0. \quad (22)$$

Учитывая затем разложения

$$A[\mu + \delta \cdot \varphi] = A[\mu] + \delta \cdot A_1[\mu, \varphi] + \delta \cdot \rho(\delta),$$

$$B[\mu + \delta \cdot \varphi] = B[\mu] + \delta \cdot B_1[\mu, \varphi] + \delta \cdot \rho(\delta),$$

в силу произвольности δ получим из (22):

$$\begin{aligned} 1 + \beta[\mu(s), \varphi(s)] + \beta[\mu(1+s), \varphi(1+s)] &= \\ &= \alpha[\mu(s), \varphi(s)] + \alpha[\mu(1+s), \varphi(1+s)], \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\beta[f, \varphi] = \frac{B_1[f, \varphi]}{B[\varphi]}, \quad \alpha[f, \varphi] = \frac{A_1[f, \varphi]}{A[f]}$$

— логарифмические производные функционалов $B[f]$ и $A[f]$.

Аналогично находим

$$1 + \alpha[\mu(s), \psi(-1 + s)] + \alpha[\mu(1 + s), \psi(s)] = \\ = \beta[\mu(s), \psi(-1 + s)] + \beta[\mu(1 + s), \psi(s)], \quad (24)$$

где

$$\psi(s) = \begin{cases} 0, & s \leq -1, \\ \psi^*(s), & -1 < s < 0, \\ k_{\Pi}, & s \geq 0, \end{cases}$$

$\psi^*(s)$ — произвольная неотрицательная кусочно-непрерывная функция.

Тождества (23) и (24) являются также необходимыми условиями ко-устойчивости схемы $L_h^{(k)}$ и используются в п. 5.

5. Консервативность ко-устойчивой канонической схемы. Потребуем теперь, чтобы каноническая схема $L_h^{(k)}$ первого ранга удовлетворяла необходимому условию ко-устойчивости и, следовательно, соотношениям (23) и (24).

Л е м м а 3. Если выполнено условие (23), то

$$\beta[\mu(s), \omega(s)] = 0, \quad (25)$$

где $\omega(s)$ — произвольная неотрицательная кусочно-непрерывная функция

$$\omega(s) \not\equiv 0, \quad -1 \leq s < 0, \quad \omega(s) \equiv 0 \text{ при } s \geq 0.$$

Возьмем ступенчатую функцию

$$\omega_0(s) = \begin{cases} k_{\Pi}, & s < 0, \\ 0, & s \geq 0. \end{cases} \quad (26)$$

Учитывая, что $\omega_0(1 + s) = 0$, $-1 \leq s \leq 1$, находим:

$$\alpha[\mu(1 + s), \omega_0(1 + s)] = \beta[\mu(1 + s), \omega_0(1 + s)] = 0.$$

Условие (23) для $\varphi(s) = \omega_0(s)$ принимает вид:

$$1 + \beta[\mu(s), \omega_0(s)] = \alpha[\mu(s), \omega_0(s)]. \quad (27)$$

Шаблонные функционалы $A[f]$ и $B[f]$ схемы $L_h^{(k)}$ любого ранга являются нормированными и невозрастающими функционалами. Отсюда следует, что функционалы $\alpha[f, \varphi]$ и $\beta[f, \varphi]$ положительны по φ и

$$\beta[f, f] = 1, \quad 0 \leq \beta[f, \varphi] \leq 1, \quad 0 \leq \alpha[f, \varphi] \leq 1$$

для $0 \leq \varphi \leq f$, $0 < \varepsilon \leq f$ (см. леммы 1, 3, 4, п. 3, § 1), в частности,

$$\beta[\mu(s), \omega_0(s)] \geq 0, \quad 0 \leq \alpha[\mu(s), \omega_0(s)] \leq 1.$$

Поэтому (27) справедливо только при

$$\beta[\mu(s), \omega_0(s)] = 0, \quad (28)$$

$$\alpha[\mu(s), \omega_0(s)] = 1. \quad (29)$$

Без ограничения общности можно считать $\omega(s) \leq \omega_0(s)$. В силу неотрицательности по второму аргументу функционала $\beta[f_1, f_2]$ будем иметь

$$0 \leq \beta[\mu(s), \omega(s)] \leq \beta[\mu(s), \omega_0(s)] = 0$$

и, следовательно, $\beta[\mu(s), \omega(s)] = 0$.

Аналогично доказывается

Лемма 3*. Если выполнено условие (24), то

$$\alpha[\mu(s), \chi(s)] = 0, \quad (30)$$

где $\chi(s) \not\equiv 0$ только на интервале $0 < s \leq 1$, а в остальном является произвольной кусочно-непрерывной неотрицательной функцией.

Лемма 4. Если $B[f(s)]$ — канонический функционал первого ранга, определенный для $f(s) \in Q^{(0)}[-1, 1]$, и его первый дифференциал

$$B_1[f, \varphi] = \beta[f, \varphi] \cdot B[f]$$

удовлетворяет условию (25), то $B[f(s)]$ не зависит от $f(s)$ при $-1 \leq s < 0$.

Докажем сначала лемму для функций типа μ . Пусть $\mu_0(s)$ и $\mu_1(s) = \mu_0(s) + \omega_0(s)$ — две функции типа μ , совпадающие при $s \geq 0$ и различные при $s < 0$. Введем функцию

$$\mu_\lambda(s) = \mu_0(s) + \lambda\omega_0(s),$$

где λ — произвольное число на отрезке $[0, 1]$. Если предположить, что

$$B[\mu_0(s)] \neq B[\mu_1(s)],$$

то найдется такое число $\lambda = \bar{\lambda}$, что

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} B[\mu_\lambda(s)]|_{\lambda=\bar{\lambda}} = B_1[\mu_{\bar{\lambda}}(s), \omega_0(s)] \neq 0$$

и, следовательно,

$$\beta[\mu_\lambda(s), \omega_0(s)] \neq 0,$$

что противоречит условию (25) леммы.

Любую функцию $f(s) \in Q^{(0)}[-1, 1]$ (ограниченную снизу константой $M_1 > 0$) можно представить в виде

$$f(s) = \mu(s) + \omega(s), \quad (31)$$

где $\mu(s)$ — произвольная функция вида (18), а $\omega(s)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция, отличная от нуля только при $s < 0$.

Лемма будет доказана, если мы убедимся, что

$$B[f(s)] = B[\mu(s)]. \quad (32)$$

Пусть $\omega_0^{(1)}(s)$ и $\omega_0^{(2)}(s)$ — ступенчатые функции вида (26), ограничивающие $\omega(s)$ снизу и сверху:

$$0 \leq \omega_0^{(1)}(s) \leq \omega(s) \leq \omega_0^{(2)}(s).$$

Тогда

$$f_1(s) \leq f(s) \leq f_2(s), \quad (33)$$

где

$$f_1(s) = \mu(s) + \omega_0^{(1)}(s), \quad f_2(s) = \mu(s) + \omega_0^{(2)}(s)$$

— функции типа μ , для которых лемма уже доказана, так что

$$B[f_j(s)] = B[\mu(s)], \quad j = 0, 1.$$

Так как $B[f]$ — неубывающий функционал, то отсюда и из (33) вытекает (32).

Аналогично доказывается

Лемма 4*. Если $A[f(s)]$ — канонический функционал первого ранга, определенный для $f(s) \in Q^{(0)}[-1, 1]$ и удовлетворяющий условию (30), то он не зависит от значений $f(s)$ при $s > 0$.

Обратимся теперь к условию (23).

Учитывая, что $\varphi(1+s) = 0$ при $s \geq 0$ ($\varphi(s)$ — любая функция вида (21)), и пользуясь леммой 4, получаем

$$\beta[\mu(1+s), \varphi(1+s)] = 0.$$

Из леммы 4* следует, что

$$\alpha[\mu(s), \varphi(s)] = \alpha[k_{\text{л}}, k_{\text{л}}] = 1,$$

так как $\mu(s) = \varphi(s) = k_{\text{л}}$ при $s \leq 0$.

В результате формула (23) принимает вид:

$$\beta[\mu(s), \varphi(s)] = \alpha[\mu(1+s), \varphi(1+s)], \quad (34)$$

где $\mu(s)$ и $\varphi(s)$ — произвольные функции типа (18) и (21).

Покажем, что (34) эквивалентно равенству

$$B[\mu(s)] = A[\mu(1+s)]. \quad (35)$$

С этой целью образуем функционал

$$H[\mu(s)] = \ln \frac{B[\mu(s)]}{A[\mu(1+s)]},$$

равный нулю в силу лемм 4 и 4* при $\mu^*(s) = \mu_0^*(s) = k_{\text{л}}^{(0)} = \text{const}$, и докажем, что он равен нулю для любой функции $\mu(s)$.

Допустим, что для некоторой функции

$$\mu_1(s) = \mu_0(s) + \varphi(s),$$

где $\varphi(s)$ — функция вида (21),

$$H[\mu_1(s)] = H[\mu_1(s)] - H[\mu_0(s)] \neq 0.$$

Тогда существует такое значение $\lambda = \bar{\lambda}$, при котором

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} H[\mu_{\lambda}(s)]|_{\lambda=\bar{\lambda}} = \beta[\mu_{\bar{\lambda}}(s), \varphi(s)] - \alpha[\mu_{\bar{\lambda}}(1+s), \varphi(1+s)] \neq 0,$$

где

$$\mu_{\lambda}(s) = \mu_0(s) + \lambda\varphi(s), \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \varphi(s) = k_{\text{л}} - k_{\text{л}}^{(0)} \neq 0 \quad \text{при} \quad s \leq 0.$$

Полученное противоречие с условием (34) и означает, что $H[\mu] = 0$ для любой функции типа μ .

Пользуясь теперь леммами 4 и 4* и представлением (31), заключаем, что

$$B[f(s)] = A[f(1+s)],$$

где $f(s)$ — любая кусочно-непрерывная положительная функция, заданная на отрезке $-1 \leq s \leq 1$.

Тем самым доказана

Теорема 2. Если разностная схема $L_h^{(k)}$ первого ранга удовлетворяет необходимому условию ко-устойчивости, то она консервативна.

В самом деле, условие (36) означает, что

$$B[k(x_i + sh)] = A[k(x_i + (1 + s)h)] = A[k(x_{i+1} + sh)], \quad \text{т. е. } B_i = A_{i+1}.$$

Из теорем 1 и 2 вытекает

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием ко-устойчивости канонической схемы $L_h^{(k,q,f)}$ из семейства $\mathcal{L}(1,0,0)$ является консервативность этой схемы.*

§ 5. О сходимости и точности

После выяснения в § 4 того, что свойством ко-устойчивости обладают только схемы с консервативной канонической частью, мы в § 5 будем изучать только консервативные схемы.

В данном параграфе рассматриваются вопросы о сходимости и точности консервативных схем $L_h^{(k,q,f)}$ в классах $Q^{(m)}$ разрывных коэффициентов k, q, f дифференциального уравнения.

При этом используется оценка

$$\|z^h\|_1 \leq M \|\varphi^h\|_2,$$

полученная в § 2, п. 3 (формула (30)) для решения z_i^h задачи (III) с правой частью φ_i^h . Норма

$$\|\varphi^h\|_2 = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=1}^i h \varphi_s^h \right|$$

оказывается весьма эффективным средством для доказательства не только теорем о сходимости и точности в случае разрывных коэффициентов, но и при доказательстве теоремы 3 о точности в классе $C^{(m)}$ гладких коэффициентов, так как использование этой нормы позволяет снизить требования как на ранг n схемы, так и на порядок m класса коэффициентов по сравнению с соответствующей теоремой, доказываемой при помощи неравенства

$$\|z^h\|_1 \leq M \|\varphi^h\|_1, \quad \|\varphi^h\|_1 = \max_{0 < i < N} |\varphi_i^h|$$

(см. § 2, п. 3, формула (29)).

1. О сходимости консервативных схем в классе разрывных коэффициентов.

Теорема 1. *Любая консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ нулевого ранга сходится в классе кусочно-непрерывных коэффициентов $k, q, f \in Q^{(0)}$.*

Для упрощения изложения приведем доказательство теоремы для случая, когда имеется только одна точка $\xi = x_n + \theta h$ ($x_n = nh$, $0 \leq \theta \leq 1$) разрыва коэффициентов $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$. Вводя, как обычно, разность

$$z_i^h = y_i^h - u(x_i),$$

получаем для нее разностную краевую задачу

$$L_h^{(k,q)} z_i^h = -\varphi_i^h, \quad 0 < i < N, \quad z_0^h = 0, \quad z_N^h = 0, \quad (\text{задача (III)})$$

где

$$\varphi_i^h = L_h^{(k,q,f)} u_i - (L^{(k,q,f)} u)_i.$$

Представим правую часть φ_i^h в виде суммы

$$\varphi_i^h = \overline{\varphi}_i^{(1)} + \overline{\overline{\varphi}}_i^{(1)} + \varphi_i^{(2)}, \quad (1)$$

где

$$\varphi_i^{(2)} = \varphi_n^h \delta_{i,n} + \varphi_{n+1}^h \cdot \delta_{i,n+1}, \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (2)$$

$$\overline{\varphi}_i^{(1)} = -(D_i^{(h,q)} - q_i)u_i + (F_i^{(h,q)} - f_i), \quad i \neq n, \quad i \neq n+1, \quad (3)$$

$$\overline{\overline{\varphi}}_i^{(1)} = \frac{1}{h^2} \Delta(A_i^{(h,k)} \nabla u_i) - (ku')'_i, \quad i \neq n, \quad i \neq n+1, \quad (4)$$

$$\overline{\varphi}_i^{(1)} = \overline{\overline{\varphi}}_i^{(1)} = 0, \quad i = n, \quad i = n+1.$$

Если $i \neq n$, $i \neq n+1$, то

$$F_i^{(h,f)} = F^h[f(x_i + sh)] = F^{(0)}[f_i + \rho(h)] + \rho(h) = f_i + \rho(h) \quad (5)$$

и, аналогично,

$$D_i^{(h,q)} = q_i + \rho(h), \quad (5')$$

так что

$$\|\overline{\varphi}_i^{(1)}\|_1 = \rho(h). \quad (6)$$

В п. 1, § 1 было отмечено, что если $k, q, f \in Q^{(0)}$, то и производные u' , $(ku')'$ решения $u(x)$ задачи (I) также кусочно-непрерывны. Поэтому при $i \neq n$ и $i \neq n+1$ можно написать

$$(ku')_{i+\frac{1}{2}} = (ku')_i + \frac{h}{2} (ku')'_i + h\rho(h),$$

$$(ku')_{i-\frac{1}{2}} = (ku')_i - \frac{h}{2} (ku')'_i + h\rho(h),$$

и, следовательно,

$$(ku')'_i = \frac{(ku')_{i+1/2} - (ku')_{i-1/2}}{h} + \rho(h). \quad (7)$$

Поскольку производная $u'(x)$ при $x \neq \xi$ непрерывна, то

$$\frac{\nabla u_i}{h} = u'_{i-1/2} + \rho(h), \quad \text{если } i \neq n+1. \quad (8)$$

В результате выражение для $\overline{\varphi}_i^{(1)}$ представим в следующем виде:

$$\overline{\overline{\varphi}}_i^{(1)} = \frac{\Delta \Omega_i}{h} + \rho(h), \quad (9)$$

где

$$\Omega_i = (A_i^{(h,k)} - k_{i-1/2})u'_{i-1/2} + \rho(h). \quad (10)$$

Так как $L_h^{(k)}$ — схема нулевого ранга, то

$$A_i^{(h,k)} = k_i + \rho(h) = k_{i-1/2} + \rho(h), \quad i \neq n+1.$$

Отсюда и из (10) заключаем, что

$$\Omega_i = \rho(h) \quad \text{для всех } i \neq n+1. \quad (11)$$

Для оценки решения задачи (III) воспользуемся полученным в § 2, п. 3 неравенством

$$\|z^h\|_1 \leq \overline{M}_5 \|\varphi^h\|_2. \quad (12)$$

Поскольку коэффициенты k и q удовлетворяют условиям

$$0 < M_1 \leq k(x) \leq M_2, \quad 0 \leq q(x) \leq M_3, \quad (\alpha)$$

то таким же условиям удовлетворяют и $A_i^{(h,k)}$ и $D_i^{(h,q)}$. Тогда $\overline{M}_5 = \overline{M}_5(M_1, M_3)$ есть константа, зависящая только от M_1 и M_3 .

Подставляя в (12)

$$\varphi_i^h = \overline{\varphi}_i^{(1)} + \overline{\overline{\varphi}}^{(1)} + \varphi_i^{(2)},$$

получим

$$\|\varphi^h\|_1 \leq M_5 \{ \|\overline{\varphi}^{(1)}\|_2 + \|\overline{\overline{\varphi}}^{(1)}\|_2 + \|\varphi^{(2)}\|_2 \}.$$

Учитывая, что $\|\varphi^h\|_2 \leq \|\varphi^h\|_1$, из условия (6) найдем

$$\|\overline{\varphi}^{(1)}\|_2 = \rho(h). \quad (13)$$

Далее имеем

$$\|\bar{\varphi}^{(1)}\|_2 = \sum_{i=1}^{n-1} h|\Omega_{i+1} - \Omega_1| + \sum_{i=n+2}^{N-1} h|(\Omega_{i+1} - \Omega_1) + (\Omega_n - \Omega_{n+2})| + 2h|\Omega_n - \Omega_1| \leq 4 \max_{0 < i < N (i \neq n+1)} |\Omega_i| + \rho(h). \quad (14)$$

Учитывая затем оценку (11), будем иметь

$$\|\bar{\varphi}^{(1)}\|_2 = \rho(h). \quad (15)$$

Вычислим норму функции $\varphi^{(2)}$, определяемой формулой (2):

$$\|\varphi^{(2)}\|_2 = h^2|\varphi_n^h| + h|\varphi_n^h + \varphi_{n+1}^h| \sum_{i=n+2}^{N-1} h \leq h^2|\varphi_n| + h|\varphi_n + \varphi_{n+1}|. \quad (16)$$

Необходимое условие сходимости

$$\varphi_n + \varphi_{n+1} = \rho(h)$$

для нашей схемы выполнено, и $h\varphi_n = O(1)$; поэтому

$$\|\varphi^{(2)}\|_2 = \rho(h). \quad (16')$$

Объединяя оценки (13), (15) и (16'), получаем

$$\|z^h\|_1 = \rho(h). \quad (17)$$

2. О точности консервативной схемы.

Теорема 2. Консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ первого ранга имеет в классе кусочно-непрерывных и кусочно-гладких функций $k, q, f \in Q^{(1)}$ первый порядок точности.

Чтобы убедиться в справедливости теоремы 2, достаточно повторить доказательство теоремы 1, заменив всюду $\rho(h)$ через $O(h)$.

Теорема 3. Консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ второго ранга, удовлетворяющая условиям (У. А. 2) второго порядка аппроксимации, имеет второй порядок точности в классе $C^{(2)}$ коэффициентов k, q, f .

Однако такая схема имеет, вообще говоря, первый порядок точности в $Q^{(m)}$ (при любом $m \geq 1$).

Если $k(x) \in C^{(2)}$, то

$$A_i^{(h,k)} = k_{i-1/2} + hk'_{i-1/2}(A_1^{(0)}[s] + 0,5) + O(h^2) = k_{i-1/2} + O(h^2), \quad (18)$$

так как $A_1^{(0)}[s] = -0,5$ (условие второго порядка аппроксимации схемы $L_h^{(k)}$).

Так как существуют производные u''' и k'' , то

$$(ku')'_i = \frac{(ku')'_{i+1/2} - (ku')'_{i-1/2}}{h} + O(h^2),$$

$$\Delta u_i/h = u'_{i+1/2} + O(h^2).$$

Положим $\varphi_i^h = \varphi_i^{(1)} + \varphi_i^{(2)}$, где

$$\varphi_i^{(1)} = -(D_i^{(h,q)} - q_i)u_i + (F_i^{(h,f)} - f_i),$$

$$\varphi_i^{(2)} = \frac{\Delta(A_i^{(h,k)} \nabla u_i)}{h^2} - (ku')'_i = \frac{\Delta \Omega_i}{h} + O(h^2), \quad (19)$$

$$\Omega_i = (A_i^{(h,k)} - k_{i-1/2})u'_{i-1/2} + O(h^2).$$

Если учесть условие (18), то получим сразу

$$\Omega_i = O(h^2). \quad (20)$$

Из условий теоремы следует также, что

$$D_i^{(h,q)} = q_i + O(h^2), \quad F_i^{(h,f)} = f_i + O(h^2), \quad \varphi_i^{(1)} = O(h^2). \quad (21)$$

Обращаясь затем к формуле (12), будем иметь для решения задачи (III)

$$\|z^h\|_1 \leq M_5 \{ \|\varphi^{(1)}\|_2 + \|\varphi^{(2)}\|_2 \},$$

причем $\|\varphi^{(1)}\|_2 = O(h^2)$ в силу условия (21).

Воспользуемся формулой (19):

$$\|\varphi^{(2)}\|_2 = \sum_{i=1}^N h |\Omega_i - \Omega_1| + O(h^2),$$

откуда, учитывая оценку (20), получаем

$$\|\varphi^{(2)}\|_2 = O(h^2),$$

т. е. $\|z^h\|_1 = O(h^2)$, что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е. Консервативная симметричная схема $L_h^{(k,q,f)}$ второго ранга имеет второй порядок точности в $C^{(2)}$.

В самом деле, такая схема удовлетворяет (У. А. 2.), т. е. всем условиям теоремы 3.

З а м е ч а н и е. В условиях теорем 2 и 3 можно ослабить требования дифференцируемости коэффициентов. Теорема 3 сохраняет силу, если $k, q, f \in C^{(1,1)}$, где $C^{(1,1)}$ — класс функций, первая производная которых удовлетворяет на отрезке $[0, 1]$ условию Липшица. Теорема 2 сохраняет силу, если $k, q, f \in Q^{(0,1)}$, где $Q^{(0,1)}$ — класс кусочно-непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций, удовлетворяющих в интервалах их непрерывности условию Липшица.

Замечание аналогичного типа относится и к теореме 4.

Т е о р е м а 4. Для того чтобы консервативная схема второго ранга, удовлетворяющая условиям второго порядка аппроксимации, имела второй порядок точности в классе $Q^{(m)}$ ($m \geq 2$), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям

$$\varphi_{n_j}^h = O(1), \quad (a_2)$$

$$\varphi_{n_j}^h + \varphi_{n_j+1}^h = O(h) \quad (b_2)$$

в окрестности точек

$$\xi_j = x_{n_j} + \theta_j h \quad (x_{n_j} = hn_j, 0 \leq \theta_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, j_0)$$

разрыва коэффициентов $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$.

Заметим, что отличие этой теоремы от аналогичной теоремы из § 3 состоит в ослаблении требований ранга схемы и порядка m класса $Q^{(m)}$ коэффициентов. Доказательство необходимости и в этом случае не представит труда. Изложение, как обычно, проведем для одного разрыва.

Проводя разбиение задачи (III) на три задачи в соответствии с формулами (1)–(4), убеждаемся, по аналогии с п. 1, что

$$\|\overline{\overline{\varphi}}^{(1)}\|_1 = O(h^2),$$

$$\overline{\overline{\varphi}}_i^{(1)} = \frac{\Delta\Omega_i}{h} + O(h^2), \quad \Omega_i = (A_i^{(h,k)} - k_{i-1/2})u'_{i-1/2} + O(h^2)$$

$$(i \neq n, \quad i \neq n+1),$$

$$\overline{\overline{\varphi}}_i^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad i = n, n+1.$$

Поскольку $L_h^{(k)}$ — схема второго ранга, удовлетворяющая (У. А. 2), то

$$A_i^{(h,k)} = k_{i-1/2} + O(h^2) \quad \text{при} \quad i \neq n+1.$$

Отсюда следует, что

$$\Omega_i = O(h^2) \quad \text{для } i \neq n+1.$$

Пользуясь затем аналогом неравенства (14)

$$\|\bar{\varphi}^{(1)}\|_2 \leq 4 \max_{0 < i < N, i \neq n+1} |\Omega_i| + O(h^2),$$

будем иметь $\|\bar{\bar{\varphi}}^{(1)}\|_2 = O(h^2)$.

Если $\bar{z}_i^{(1)}$ и $\bar{\bar{z}}_i^{(1)}$ — решения задачи (III) с правыми частями $\bar{\varphi}_i^{(1)}$ и, соответственно, $\bar{\bar{\varphi}}_i^{(1)}$, то формула (12) и оценки для $\|\bar{\varphi}^{(1)}\|_2$ и $\|\bar{\bar{\varphi}}^{(1)}\|_2$ дают

$$\|\bar{z}^{(1)}\|_1 = O(h^2), \quad \|\bar{\bar{z}}^{(1)}\|_1 = O(h^2). \quad (22)$$

Обращаясь к задаче (III) для

$$z_i^{(2)} = z_i - (\bar{z}_i^{(1)} + \bar{\bar{z}}_i^{(1)})$$

с правой частью

$$\varphi_i^{(2)} = \delta_{i,n} \varphi_n^h + \delta_{i,n+1} \varphi_{n+1}^h$$

и учитывая результаты § 3, п. 3, видим, что условия (а₂) и (б₂) являются необходимыми для того, чтобы

$$\|z^{(2)}\|_1 = O(h^2).$$

Из неравенств

$$\|z^{(2)}\|_1 \leq \bar{M}_5 \|\varphi^{(2)}\|_2$$

и

$$\|\varphi^{(2)}\|_2 \leq h^2 |\varphi_n| + h |\varphi_n + \varphi_{n+1}| \quad (23)$$

видно, что условия (а₂) и (б₂) являются и достаточными условиями для второго порядка малости функции $z^{(2)}$ и (в силу (22)) функции z . Тем самым теорема 4 доказана.

Если имеется не один, а конечное число разрывов в точках

$$\xi_j = x_{n_j} + \theta_j \cdot h \quad (j = 1, 2, \dots, j_0),$$

то

$$\varphi_i^{(2)} = \sum_{j=1}^{j_0} \varphi_{i,j}^{(2)},$$

где

$$\varphi_{i,j}^{(2)} = \delta_{i,n_j} \varphi_{n_j}^h + \delta_{i,n_j+1} \varphi_{n_j+1}^h,$$

и вместо (16) и (23) мы получим следующую оценку:

$$\|\varphi_i^{(2)}\|_2 \leq \sum_{j=1}^{j_0} [|\varphi_{n_j}^h| h^2 + |\varphi_{n_j}^h + \varphi_{n_j+1}^h| h],$$

так как

$$\|\varphi_i^{(2)}\|_2 \leq \sum_{j=1}^{j_0} \|\varphi_{i,j}^{(2)}\|_2.$$

Поступила в редакцию 14 X 1960

Список литературы

1. Люстерник Л. А. Проблема Дирихле // Успехи матем. наук.— 1940. — Вып. 8. — С. 115–124; О разностных аппроксимациях оператора Лапласа // Успехи матем. наук.— 1954. — Т. 9, вып. 2. — С. 3–66.
2. Courant R., Friedrichs K. O., Lewy H. Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik // Math. Ann. — 1928. — V. 100. — 32 p. (Русский перевод см. Успехи матем. наук. — 1941. — № 8. — С. 125–160).
3. Микеладзе Ш. Е. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными. — М.: Изд-во АН СССР, 1936.
4. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.—Л.: Гостехиздат, 1949.
5. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во ин. лит., 1953.
6. Рябенский В. С., Филиппов А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956.
7. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. II. — М.: Физматгиз, 1953.
8. Риттмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Изд-во ин. лит., 1960.
9. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. — М.: Физматгиз, 1960.
10. Марчук Г. И. Численные методы расчета ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1958.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 108, № 3. — С. 393–396.

12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О представлении линейных функционалов в классе разрывных функций // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 2. — С. 188–191.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 122, № 4. — С. 562–565.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 124, № 3. — С. 529–532.
15. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об одной наилучшей однородной разностной схеме // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 124, № 4. — С. 779–782.
16. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О наилучших разностных схемах // Успехи матем. наук. — 1959. — Т. 14, вып. 3 (87). — С. 185–188.
17. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 131, № 3. — С. 514–517.
18. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О канонических однородных разностных схемах // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 131, № 4. — С. 761–764.
19. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О коэффициентно-устойчивости разностных схем // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 131, № 6. — С. 1264–1267.
20. Самарский А. А. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения // Труды Всесоюзного совещания по дифференциальным уравнениям (Ереван, ноябрь 1958 г.). — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1960. — С. 148–160.

ОДНОРОДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский
(Москва)

Среди однородных разностных схем, соответствующих краевым задачам для дифференциального уравнения

$$L^{(p,q,f)}u = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right] - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$M_2 \geq p(x) \geq M_1 > 0, \quad 0 \leq q(x) \leq M_3,$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами ($p, q, f \in Q^{(0)}$), содержится точная схема [1, 2]. Эта схема позволяет определить сеточную функцию, совпадающую с точным решением краевой задачи на произвольной неравномерной сетке

$$S_N(x_0 = 0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_N = 1, h_i = x_i - x_{i-1}).$$

В настоящей работе строятся схемы любого (наперед заданного) порядка точности на неравномерных сетках.

Все названные схемы имеют вид

$$L_h^{(p,q,f)}y_i = \frac{1}{\bar{h}_i} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{h_i A_i^h} \right) - D_i^h y_i + \Phi_i^h, \quad (2)$$

$$\bar{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1}), \quad \Delta y_i = \nabla y_{i+1} = y_{i+1} - y_i.$$

Индекс h , стоящий наверху, является условным обозначением зависимости коэффициентов от сетки.

Разностные схемы (2) в случае равномерной сетки ($h_i = h = 1/N$, $i = 1, 2, \dots, N$) принадлежат семейству однородных трехточечных консервативных схем [2, 3]. Это же утверждение остается в силе при соответствующем обобщении понятий однородности и консервативности схем на неравномерные сетки.

Схемы повышенного порядка точности оказываются особенно полезными в ряде практически важных случаев, например, при решении уравнения (1) с кусочно-постоянными коэффициентами, имеющими большое число точек разрыва, при решении систем аналогичных уравнений и при решении уравнений теплопроводности и диффузии в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L^{(p,q,f)}u.$$

§ 1. Точная схема на неравномерной сетке

1. Построение точной схемы

Рассмотрим первую краевую задачу для дифференциального уравнения

$$L^{(p,q,f)}u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2. \quad (3)$$

Пусть $S_N = \{x_i\}$ — некоторая разностная сетка, получающаяся в результате разбиения отрезка $0 \leq x \leq 1$ на N частей точками

$$x_0 = 0, \quad x_1, \dots, x_i, \dots, x_N = 1.$$

В каждой точке x_i имеется два шага (левый и правый) разностной сетки,

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{и} \quad h_{i+1} = x_{i+1} - x_i,$$

вообще говоря, не равные друг другу. Обозначим

$$\bar{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$$

средний шаг сетки в точке x_i . Характеристикой локальной неравномерности сетки может служить отношение

$$\Delta_i = -\frac{h_{i+1} - h_i}{h_{i+1} + h_i} = -\frac{0,5(h_{i+1} - h_i)}{\bar{h}_i}.$$

Если разностная сетка равномерна, то $\Delta_i = 0$.

Мы будем всюду в дальнейшем предполагать, что на любой последовательности сеток S_N выполнено условие

$$0 < C_1 \leq \frac{h_{i+1}}{h_i} \leq C_2, \quad (\text{H})$$

где C_1 и C_2 — положительные постоянные, не зависящие от сетки.

В дальнейшем мы пользуемся обозначением

$$h^* = \max_{0 < i \leq N} h_i.$$

Покажем, что решение уравнения (3) на любой сетке S_N удовлетворяет соотношению

$$u(x_i) = P_i^h u(x_{i-1}) + Q_i^h u(x_{i+1}) + R_i^h, \quad (4)$$

где P_i^h, Q_i^h, R_i^h , — коэффициенты, выражающиеся с помощью некоторых функционалов, зависящих от сетки S_N (или S_h), точнее, от двух параметров h_n и h_p .

Возможность соотношения (4) очевидна, так как решение дифференциального уравнения второго порядка в интервале (x_{i-1}, x_{i+1}) полностью определяется заданием значений искомой функции на концах этого интервала.

В статье [1] точная схема (4) была построена на равномерной сетке.

Рассмотрим уравнение (3) на интервале (x_{i-1}, x_{i+1}) и введем местную систему координат, связанную с точкой $x = x_i$, положив

$$x = x_i + \hbar_i(s - \Delta_i), \quad -1 \leq s \leq 1,$$

или

$$x = \bar{x}_i + \hbar_i s, \quad \text{где } \bar{x}_i = x_i - \hbar_i \Delta_i.$$

Отрезок $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ отображается на отрезок $-1 \leq s \leq 1$, причем точке $x = x_i$ соответствует точка $s = \Delta_i$. Уравнение (3) принимает вид

$$\mathcal{L}^* \bar{u} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\bar{p}(s)} \frac{d\bar{u}}{ds} \right] - \hbar^2 \bar{q}(s) = -\hbar^2 \bar{f}(s), \quad (5)$$

где

$$\bar{u}(s) = u(x_i + \hbar_i(s - \Delta_i)) \quad \text{и т. д.} \quad (6)$$

Индекс i , которым следовало бы снабдить все функции в (5) и шаг \hbar , мы опускаем.

Общее решение уравнения (5) на отрезке $[-1, 1]$ имеет вид

$$\bar{u}(s) = Cv_1(s, \hbar) + Dv_2(s, \hbar) + \hbar^2 v_3(s, \hbar),$$

где C и D — произвольные постоянные, $v_1(s, \hbar)$ и $v_2(s, \hbar)$ — линейно-независимые решения однородного уравнения

$$\mathcal{L}^* \bar{u} = 0,$$

$v_3(s, \hbar)$ — некоторое решение неоднородного уравнения (5).

Определим функции v_1 , v_2 и v_3 с помощью условий

$$\left. \begin{aligned} v_1(-1, \hbar) = 0, & \quad \frac{1}{\bar{p}(-1)} \frac{dv_1}{ds}(-1, \hbar) = 1, \\ v_2(1, \hbar) = 0, & \quad \frac{1}{\bar{p}(1)} \frac{dv_2}{ds}(1, \hbar) = -1, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$v_3(-1, \hbar) = 0, \quad v_3(1, \hbar) = 0. \quad (8)$$

Функции v_1 , v_2 , v_3 в дальнейшем будем называть *шаблонными функциями*. Они являются функционалами коэффициентов $\bar{p}(s)$, $\bar{q}(s)$ и $\bar{f}(s)$ и параметрически зависят от \hbar .

Полагая в (6) $s = -1$ и $s = 1$ и учитывая условия (7) и (8), находим

$$C = \frac{\bar{u}(1)}{v_1(1, \hbar)}, \quad D = \frac{\bar{u}(-1)}{v_2(-1, \hbar)}$$

и, следовательно,

$$\bar{u}(s) = \frac{v_2(s, \hbar)}{v_2(-1, \hbar)} \bar{u}(-1) + \frac{v_1(s, \hbar)}{v_1(1, \hbar)} \bar{u}(1) + \hbar^2 v_3(s, \hbar). \quad (9)$$

Отсюда видно, что нормировка функций v_1 и v_2 произвольна. Положив в (9) $s = \Delta$, получаем соотношение

$$\bar{u}(\Delta) = P^h \bar{u}(-1) + Q^h \bar{u}(1) + R^h, \quad (10)$$

коэффициенты которого

$$P^h = \frac{v_2(\Delta, \hbar)}{v_2(-1, \hbar)} = P^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \Delta],$$

$$Q^h = \frac{v_1(\Delta, \hbar)}{v_1(1, \hbar)} = Q^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \Delta],$$

$$R^h = \hbar^2 v_3(\Delta, \hbar) = R^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s), \Delta]$$

являются функционалами от $\bar{p}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s)$ на отрезке $-1 \leq s \leq 1$, зависящими от двух параметров: \hbar и Δ или от $h_{\text{л}}$ и $h_{\text{п}}$, где

$$\hbar = 0,5(h_{\text{л}} + h_{\text{п}}), \quad \Delta = -0,5 \frac{h_{\text{п}} - h_{\text{л}}}{\hbar}.$$

Чтобы получить разностную схему, вернемся к исходному переменному x , положив

$$s = \Delta_i + \frac{x - x_i}{\hbar_i}$$

и учитывая (6). Полученные при этом значения шаблонных функций будем обозначать через $v_k^{(i)}(s, \hbar)$, $k = 1, 2, 3$. Соотношение (10) примет вид (4), где

$$P_i^h = P^h[p(\bar{x}_i + s\hbar_i), q(\bar{x}_i + s\hbar_i), \Delta_i], \quad (11)$$

$$Q_i^h = Q^h[p(\bar{x}_i + s\hbar_i), q(\bar{x}_i + s\hbar_i), \Delta_i], \quad (12)$$

$$R_i^h = R^h[p(\bar{x}_i + s\hbar_i), q(\bar{x}_i + s\hbar_i), f(\bar{x}_i + s\hbar_i), \Delta_i]. \quad (13)$$

Из построения схемы (4) ясно, что решение разностной краевой задачи

$$y_i = P_i^h y_{i-1} + Q_i^h y_{i+1} + R_i^h, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad (14)$$

совпадает с решением исходной задачи:

$$y_i = u(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

в узловых точках произвольной сетки S_N .

2. Некоторые свойства шаблонных функций

Для дальнейших исследований нам понадобится ряд свойств шаблонных функций $v_1(s, \hbar)$ и $v_2(s, \hbar)$.

Лемма 1. Если $\bar{q}(s) \geq 0$, то шаблонная функция $v_1(s, \hbar)$ положительна в интервале $-1 < s \leq 1$, а $v_2(s, \hbar) > 0$ — в интервале $-1 \leq s < 1$.

Это очевидное утверждение следует из того, что при $\bar{q}(s) \geq 0$ все собственные значения первой краевой задачи для оператора \mathcal{L}^* положительны. По этой же причине v_1 и v_2 линейно-независимы.

Лемма 2. *Шаблонные функции $v_1(s, \hbar)$ и $v_2(s, \hbar)$ удовлетворяют соотношениям:*

$$1) \quad v_1(1, \hbar) = v_2(-1, \hbar), \quad (15)$$

$$2) \quad v_1(1, \hbar) - v_1(\Delta, \hbar) - v_2(\Delta, \hbar) = \\ = \hbar^2 \left\{ v_2(\Delta, \hbar) \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s) v_1(s, \hbar) ds + v_1(\Delta, \hbar) \int_{\Delta}^1 \bar{q}(s) v_2(s, \hbar) ds \right\}, \quad (16)$$

если $\bar{q}(s) \geq 0$.

Заметим, что условие (15) выражает *принцип взаимности* для обыкновенного дифференциального уравнения. Это условие следует из второй формулы Грина:

$$\int_{-1}^1 (v_1 \mathcal{L}^* v_2 - v_2 \mathcal{L}^* v_1) ds = \frac{1}{\bar{p}(s)} \left(v_1 \frac{dv_2}{ds} - v_2 \frac{dv_1}{ds} \right) \Big|_{-1}^1 = 0.$$

Чтобы получить формулу (16), проинтегрируем уравнение $\mathcal{L}^* v_1 = 0$ по s от -1 до Δ , а уравнение $\mathcal{L}^* v_2 = 0$ по s от Δ до 1 и воспользуемся условиями (7):

$$\left(\frac{1}{\bar{p}} \frac{dv_1}{ds} \right)_{s=\Delta} = 1 + \hbar^2 \int_{-1}^{\Delta} \bar{q} v_1 ds, \\ \left(\frac{1}{\bar{p}} \frac{dv_2}{ds} \right)_{s=\Delta} = -1 - \hbar^2 \int_{\Delta}^1 \bar{q} v_2 ds. \quad (17)$$

Формула Грина для v_1 и v_2 на отрезках $-1 \leq s \leq \Delta$ и $\Delta \leq s \leq 1$ дает

$$\frac{1}{\bar{p}} (v_2 v_1' - v_1 v_2') \Big|_{s=\Delta} = \frac{1}{\bar{p}} (v_2 v_1' - v_1 v_2') \Big|_{s=-1} = v_2(-1, \hbar), \\ \frac{1}{\bar{p}} (v_2 v_1' - v_1 v_2') \Big|_{s=\Delta} = \frac{1}{\bar{p}} (v_2 v_1' - v_1 v_2') \Big|_{s=1} = v_1(1, \hbar).$$

Сравнивая эти выражения, получим

$$v_2(\Delta, \hbar) \cdot \left(\frac{1}{\bar{p}} \frac{dv_1}{ds} \right)_{s=\Delta} - v_1(\Delta, \hbar) \cdot \left(\frac{1}{\bar{p}} \frac{dv_2}{ds} \right)_{s=\Delta} = v_1(1, \hbar).$$

После подстановки сюда выражений (17) мы приходим к формуле (16).

Все эти рассуждения сохраняют силу для кусочно-непрерывной функции $\bar{p}(s)$, так как в точках ее разрыва выполняются условия сопряжения

$$\left(\frac{1}{\bar{p}} \frac{dv_k}{ds} \right)_{\text{л}} = \left(\frac{1}{\bar{p}} \frac{dv_k}{ds} \right)_{\text{п}}, \quad (v_k)_{\text{л}} = (v_k)_{\text{п}}, \quad k = 1, 2,$$

где индексы л и п соответствуют левому и правому предельным значениям.

Нетрудно показать, что функция Грина $G^{\hbar}(s, t)$ оператора \mathcal{L}^* для первой краевой задачи выражается просто через шаблонные функции v_1 и v_2 :

$$G^{\hbar}(s, t) = \begin{cases} \frac{v_1(s, \hbar)v_2(t, \hbar)}{v_1(1, \hbar)}, & s < t, \\ \frac{v_1(t, \hbar)v_2(s, \hbar)}{v_1(1, \hbar)}, & s > t, \end{cases}$$

если учесть, что

$$\frac{1}{\bar{p}}(v_2v_1' - v_1v_2') = v_1(1, \hbar) = v_2(-1, \hbar).$$

3. Консервативность точной схемы

Опираясь на свойства шаблонных функций, установленные в п. 2, преобразуем точную разностную схему к виду (2).

Преобразование удобнее сначала проводить с уравнением (11), которое в силу (15) можно записать в виде

$$\frac{\bar{u}(1) - \bar{u}(\Delta)}{v_2(\Delta, \hbar)} - \frac{\bar{u}(\Delta) - \bar{u}(-1)}{v_1(\Delta, \hbar)} - \frac{v_1(1, \hbar) - v_1(\Delta, \hbar) - v_2(\Delta, \hbar)}{v_1(\Delta, \hbar)v_2(\Delta, \hbar)}\bar{u}(\Delta) = -\hbar^2 \frac{v_1(1, \hbar)v_3(\Delta, \hbar)}{v_1(\Delta, \hbar)v_3(\Delta, \hbar)}.$$

С помощью (16) отсюда исключается $v_1(1, \hbar)$. Чтобы записать соответствующее разностное уравнение в точке $x = x_i$ сетки, мы должны положить

$$\bar{u}(s) = u(\bar{x}_i + s\hbar_i), \quad \bar{p}(s) = p(\bar{x}_i + s\hbar_i)$$

и т. д., где $\bar{x}_i = x_i - \hbar_i\Delta_i$. Заменяя u_i на y_i , записываем точную схему в виде

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = \frac{1}{\hbar_i} \left(\frac{\Delta y_i}{h_{i+1}B_i^h} - \frac{\nabla y_i}{h_iA_i^h} \right) - D_i^h \cdot y_i + \Phi_i^h = 0, \quad (18)$$

где

$$A_i^h = \frac{\hbar_i}{h_i} v_1^i(\Delta_i, \hbar_i), \quad B_i^h = \frac{\hbar_i}{h_{i+1}} v_2^i(\Delta_i, \hbar_i), \quad (19)$$

$$D_i^h = \frac{\hbar_i}{h_i A_i^h} \int_{-1}^{\Delta_i} q(\bar{x}_i + s\hbar_i) v_1^i(s, \hbar_i) ds + \frac{\hbar_i}{h_{i+1} B_i^h} \int_{\Delta_i}^1 q(\bar{x}_i + s\hbar_i) v_2^i(s, \hbar_i) ds, \quad (20)$$

$$\Phi_i^h = \left(\hbar_i D_i^h + \frac{1}{h_i A_i^h} + \frac{1}{h_{i+1} B_i^h} \right) \cdot \hbar_i v_3^i(\Delta_i, \hbar_i). \quad (21)$$

Лемма 3. Точная, разностная схема $L_h^{(p,q,f)}$, определяемая формулами (18)–(21), консервативна, т. е.

$$B_i^h = A_{i+1}^h \quad \text{или} \quad \hbar_i v_2^i(\Delta, \hbar) = v_1^{i+1}(\Delta, \hbar) \cdot \hbar_{i+1} \quad (22)$$

В самом деле, обозначим

$$V_k^i(x, \hbar) = v_k^i(s, \hbar), \quad x = \bar{x}_i + s\hbar_i, \quad \bar{x}_i = x_i - \hbar_i \Delta_i.$$

По определению, функции $V_1^{i+1}(x, \hbar)$ и $V_2^i(x, \hbar)$ удовлетворяют условиям

$$V_1^{i+1}(x_i, \hbar_{i+1}) = 0, \quad V_2^i(x_{i+1}, \hbar) = 0,$$

$$\left(\frac{1}{p} \frac{dV_1^{i+1}}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{1}{\hbar_{i+1}}, \quad \left(\frac{1}{p} \frac{dV_2^i}{dx} \right)_{x=x_{i+1}} = -\frac{1}{\hbar_i}.$$

Применяя вторую формулу Грина к функциям $V_1^{i+1}(x, \hbar)$ и $V_2^i(x, \hbar)$ на отрезке $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ V_1^{i+1} L^{(p,q)} V_2^i - V_2^i L^{(p,q)} V_1^{i+1} \right\} dx = \\ &= V_1^{i+1} \frac{1}{p} \frac{dV_2^i}{dx} - V_2^i \frac{1}{p} \frac{dV_1^{i+1}}{dx} \Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = \\ &= \frac{1}{\hbar_{i+1}} V_2^i(x_i, \hbar_i) - \frac{1}{\hbar_i} V_1^{i+1}(x_{i+1}, \hbar_{i+1}), \end{aligned}$$

т. е.

$$\hbar_i V_2^i(x_i, \hbar_i) = \hbar_{i+1} V_1^{i+1}(x_{i+1}, \hbar_{i+1}) \quad \text{или} \quad h_{i+1} B_i^h = h_{i+1} A_{i+1}^h,$$

откуда и следует, что $B_i^h = A_{i+1}^h$.

Консервативность схемы $L_h^{(p,q,f)}$ означает, что ее можно записать в виде

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = \frac{1}{\hbar_i} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{\hbar_i A_i^h} \right) - D_i^h \cdot y_i + \Phi_i^h.$$

Нетрудно при этом заметить, что коэффициент A_i^h зависит только от шага $h_i = x_i - x_{i-1}$ и не зависит от \hbar_i , т. е. от h_{i+1} .

В самом деле,

$$A_i^h = \frac{\hbar_i}{h_i} V_1^i(x_i, \hbar_i) = \frac{1}{h_i} \bar{V}_1^i(x_i),$$

где $\bar{V}_1^i(x)$ — решение уравнения $L_h^{(p,q)} \bar{V}_1 = 0$ с начальными данными

$$\bar{V}_1^i(x_{i-1}) = 0, \quad \frac{1}{p} \frac{d\bar{V}_1^i}{dx} \Big|_{x=x_{i-1}} = 1.$$

4. Точные краевые условия третьего рода

Рассмотрим теперь краевую задачу третьего рода. Для простоты будем считать, что условие третьего рода задано только при $x = 0$, а на правом конце $x = 1$ по-прежнему задано условие первого рода:

$$L^{(p,q,f)} u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad \frac{1}{p(0)} u'(0) - \sigma u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2. \quad (23)$$

Найдем точное разностное краевое условие при $x = 0$, которому удовлетворяет любое решение задачи (23).

Введем местную систему координат $s = x/h_1$ в точке $x = 0$. По аналогии с п. 1. введем на интервале $0 < s < 1$ шаблонные функции $v_1^*(s, h_1)$, $v_2(s, h_1)$, $v_3^*(s, h_1)$ с помощью условий

$$\mathcal{L}^* v_1^* = \mathcal{L}^* v_2 = 0, \quad \mathcal{L}^* v_3^* = -\bar{f}(s), \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} v_1^*(0, h_1) &= 0, & \frac{1}{\bar{p}(0)} \frac{dv_1^*}{ds}(0, h_1) &= 1, \\ v_2(1, h_1) &= 0, & \frac{1}{\bar{p}(1)} \frac{dv_2}{ds}(1, h_1) &= -1, \\ v_3^*(0, h_1) &= 0, & v_3^*(1, h_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Общее решение уравнения $\mathcal{L}^*\bar{u}(s) = -h_1^2\bar{f}(s)$ представляем в виде

$$\bar{u}(s) = \frac{v_2(s, h_1)}{v_2(0, h_1)}\bar{u}(0) + \frac{v_1^*(s, h_1)}{v_1(1, h_1)}\bar{u}(1) + h_1^2 v_3^*(s, h_1). \quad (26)$$

Потребуем, чтобы эта функция удовлетворяла условию

$$\frac{1}{h_1\bar{p}(0)}\frac{d\bar{u}}{ds}(0) - \sigma\bar{u}(0) = \mu_1. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (27) и учитывая условия (25), видим, что

$$\bar{u}(0) = a_1\bar{u}(1) + b_1,$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \left\{ 1 + h_1 \left[\sigma v_2(0, h_1) + h_1 \int_0^1 \bar{q}(s)v_2(s, h_1) ds \right] \right\}^{-1}, \\ b_1 &= h_1 \left[\mu_1 - \frac{h_1}{\bar{p}(0)} \frac{dv_3^*}{ds}(0, h_1) \right] a_1 v_2(0, h_1). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Возвращаясь к исходной переменной $x = sh$, получаем точное краевое условие в виде

$$u_0 = a_1 u_1 + b_1, \quad (29)$$

где

$$u_0 = u(0), \quad u_1 = u(x_1), \quad x_1 = h_1,$$

a_1 и b_1 определяются по формулам (28), в которые подставлены

$$\bar{q}(s) = q(sh_1), \quad \bar{p}(s) = p(sh_1), \quad \bar{f}(s) = f(sh_1).$$

Таким образом, решение краевой задачи

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = 0, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = a_1 y_1 + b_1, \quad y_N = \mu_2, \quad (30)$$

где $L_h^{(p,q,f)}$ — точная схема из п. 3, совпадает в узловых точках разностной сетки с решением задачи (23): $y_i = u(x_i)$.

Краевому условию

$$\frac{u'(1)}{p(1)} + \sigma u(1) = \mu_2 \quad (31)$$

соответствует точное краевое условие

$$u_N = a_2 u_{N-1} + b_2, \quad (32)$$

где

$$a_2 = \left\{ 1 + h_N \left[\sigma v_1^N(s, h_N) + h_N \int_{-1}^0 q(1 + sh_N) v_1^N(s, h_N) ds \right] \right\}^{-1}, \quad (33)$$

$$b_2 = h_N \left[\mu_2 - \frac{h_N}{p(1)} \frac{d}{ds} v_3^N(0, h_N) \right] a_2 v_1^N(0, h_N),$$

$v_1(s, h_N)$ — шаблонная функция, определяемая на интервале $-1 < s < 0$ условиями при $s = -1$, а $v_3(s, h_N)$ — условиями $v_3 = 0$ при $s = -1$ и $s = 0$. Индекс N означает, что начало местной системы координат взято в точке $x_N = 1$.

5. Точная схема $L_h^{(p,f)}$

Если $q(x) \equiv 0$, то все шаблонные функции и, следовательно, функционалы A^h и Φ^h вычисляются с помощью квадратур.

Точная схема $L_h^{(p,f)}$ имеет вид

$$L_h^{(p,f)} y_i = \frac{1}{\tilde{h}_i} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{h_i A_i^h} \right) + \Phi_i^h, \quad (34)$$

где

$$A_i^h = \frac{\tilde{h}_i}{h_i} v_1^i(0, h) = \int_{-1}^0 p(x_i + sh_i) ds = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx, \quad (35)$$

$$\Phi_i^h = F_i^h + \frac{1}{\tilde{h}_i} \Delta \left(\frac{h_i}{A_i^h} \int_{-1}^0 p(x_i + th_i) \left[\int_{-0,5}^t f(x_i + sh_i) ds \right] dt \right), \quad (36)$$

$$F_i^h = \frac{1}{\tilde{h}_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx \quad (x_{i-1/2} = x_i - 0,5h_i). \quad (37)$$

В самом деле,

$$v_1(s, h) = v_1(s) = \int_{-1}^s \bar{p}(s) ds,$$

$$v_2(s, h) = v_2(s) = \int_s^1 \bar{p}(s) ds,$$

$$v_3(s, h) = v_3(s) = \left\{ \int_{-1}^1 \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^t \bar{f}(\lambda) d\lambda \right] dt v_1(s) - v_1(1) \int_{-1}^s \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^t \bar{f}(\lambda) d\lambda \right] dt \right\} \frac{1}{v_1(1)}.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_i^h = \frac{1}{\bar{h}_i} \left\{ \frac{1}{h_{i+1} A_{i+1}^h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) \left[\int_{x_{i-1}}^x f(\xi) d\xi \right] dx - \frac{1}{h_i A_i^h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) \left[\int_{x_{i-1}}^x f(\xi) d\xi \right] dx \right\}. \quad (38)$$

Представим Φ_i^h в виде суммы главной части F_i^h и консервативного («дивергентного») добавка

$$\Phi_i^h = F_i^h + \frac{1}{\bar{h}_i} \Delta \tilde{F}_i^h.$$

Для этого слагаемые в фигурных скобках в формуле (38) запишем так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{i+1}^h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) \left[\int_{x_{i-1}}^x f(\xi) d\xi \right] dx &= \frac{1}{A_{i+1}^h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) \left[\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}/2} f(\xi) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_{i+1}/2}^{x_i} f d\xi \right] dx = h_{i+1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}/2} f dx + \frac{1}{A_{i+1}^h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) \left[\int_{x_{i+1}/2}^x f d\xi \right] dx; \\ \frac{1}{A_i^h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) \left[\int_{x_{i-1}}^x f d\xi \right] dx &= h_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}/2} f dx + \frac{1}{A_i^h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) \left[\int_{x_{i-1}/2}^x f d\xi \right] dx. \end{aligned}$$

В результате получаем выражение (36) для Φ^h . Второе слагаемое в (36) в классе достаточно гладких функций $p(x)$ и $f(x)$ имеет второй порядок малости при $h^* \rightarrow 0$:

$$\Phi_i^h - F_i^h = O(h^{*2}) \quad (h^* = \|h_i\|_0 = \max_{1 < i \leq N} h_i).$$

Если положить $f = 0$, то мы получаем наилучшую каноническую схему

$$L_h^{(p)} y_i = L_h^{(p,0)} y_i = \frac{1}{\bar{h}_i} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{h_i A_i^h} \right), \quad A_i^h = \int_{-1}^0 p(x_i + sh_i) ds, \quad (39)$$

которая является точной схемой для уравнения $L^{(p)} u = 0$.

6. Определение шаблонных функций

В общем случае при $q(x) \neq 0$ шаблонные функции нельзя непосредственно выразить с помощью квадратур. Однако, в силу аналитичности $v_1(s, \hbar)$, $v_2(s, \hbar)$, $v_3(s, \hbar)$ относительно \hbar^2 , естественно эти функции искать в виде разложения по степеням \hbar^2 :

$$v_j(s, \hbar) = \sum_{k=0}^{\infty} v_j^{(k)}(s) \hbar^{2k}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (40)$$

Для коэффициентов разложения $v_j^{(k)}(s)$ получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\bar{p}(s)} \frac{dv_j^{(0)}}{ds} \right] &= 0, \quad j = 1, 2; \\ \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\bar{p}(s)} \frac{dv_3^{(0)}}{ds} \right] &= -\bar{f}(s), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\bar{p}(s)} \frac{dv_j^{(k)}}{ds} \right] = \bar{q}(s) v_j^{(k-1)}(s), \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots$$

со следующими дополнительными условиями:

$$\begin{aligned} v_1^{(k)}(-1) = v_2^{(k)}(1) = v_3^{(k)}(\pm 1) &= 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \frac{1}{\bar{p}(-1)} \frac{dv_1^{(0)}}{ds}(-1) = 1, \quad \frac{1}{\bar{p}(1)} \frac{dv_2^{(0)}}{ds}(1) &= -1, \\ \frac{dv_1^{(k)}}{ds}(-1) = \frac{dv_2^{(k)}}{ds}(1) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} v_1^{(0)}(s) &= \int_{-1}^s \bar{p}(t) dt, \quad v_2^{(0)}(s) = \int_s^1 \bar{p}(t) dt, \\ v_1^{(k)}(s) &= \int_{-1}^s \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^t \bar{q}(\lambda) v_1^{(k-1)}(\lambda) d\lambda \right] dt, \quad k = 1, 2, \dots, \\ v_2^{(k)}(s) &= \int_s^1 \bar{p}(t) \left[\int_t^1 \bar{q}(\lambda) v_2^{(k-1)}(\lambda) d\lambda \right] dt, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$v_3^{(k)}(s) = \frac{1}{v_1^{(0)}(1)} \left\{ v_1^{(0)}(s) \int_{-1}^1 \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^t \omega^{(k)}(\zeta) d\zeta \right] dt - \right. \\ \left. - v_1^{(0)}(1) \int_{-1}^s \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^t \omega^{(k)}(\zeta) d\zeta \right] dt \right\},$$

где

$$\omega^{(0)}(s) = -\bar{f}(s), \quad \omega^{(k)}(s) = \bar{q}(s)v_3^{(k-1)}(s) \quad \text{при } k = 1, 2, \dots$$

§ 2. Разностные схемы высокого порядка точности

1. Усеченные разностные схемы

В § 1, п. 6, было получено разложение в ряд по степеням \hbar^2 шаблонных функций $v_j(s, \hbar)$, $j = 1, 2, 3$, с помощью которых вычисляются коэффициенты точной схемы.

Если в разложении

$$v_j(s, \hbar) = \sum_{k=0}^{\infty} v_j^{(k)}(s) \hbar^{2k}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

ограничиться конечным числом слагаемых и взять в качестве шаблонных функций полиномы

$$\Pi_j^{(m)}(s, \hbar) = \sum_{k=0}^m v_j^{(k)}(s) \cdot \hbar^{2k}, \quad (2)$$

то мы получим разностную схему

$$L_{\hbar}^{(p,q,f)} y_i = \frac{1}{\hbar_i} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{\hbar_i A_i^{\hbar}} \right) - D_i^{\hbar} \cdot y_i + \Phi_i^{\hbar}, \quad (3)$$

коэффициенты которой A_i^{\hbar} , D_i^{\hbar} , Φ_i^{\hbar} вычисляются по тем же формулам, что и коэффициенты A_i^{\hbar} , D_i^{\hbar} , Φ_i^{\hbar} точной схемы с заменой функций $v_j(s, \hbar)$ полиномами $\Pi_j^{(m)}(s, \hbar)$.

Построенную таким образом разностную схему будем называть *усеченной разностной схемой m -го ранга*.

Последующее изложение посвящено выяснению порядка точности усеченной схемы.

2. Сравнение решений разностных задач

Сравним решения двух разностных краевых задач:

$$L_h y_i = \frac{1}{\bar{h}_i} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{h_i A_i^h} \right) - D_i^h y_i = -\Phi_i^h, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad (4)$$

$$\tilde{L}_h \tilde{y}_i = \frac{1}{\tilde{h}_i} \Delta \left(\frac{\nabla \tilde{y}_i}{h_i \tilde{A}_i^h} \right) - \tilde{D}_i^h \tilde{y}_i = -\tilde{\Phi}_i^h, \quad 0 < i < N, \quad \tilde{y}_0 = \mu_1, \quad \tilde{y}_N = \mu_2, \quad (5)$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} 0 < M_1 \leq A_i^h \leq M_2, \quad 0 < M_1 \leq \tilde{A}_i^h \leq M_2, \\ 0 \leq D_i^h \leq M_3, \quad 0 \leq \tilde{D}_i^h \leq M_3, \end{aligned} \quad (6)$$

где M_1, M_2, M_3 — положительные постоянные, не зависящие от сетки. Нетрудно по аналогии с [3], где рассматривалась равномерная сетка, показать, что разностная функция Грина оператора L_h (или \tilde{L}_h) ограничена:

$$0 \leq G_{ik} \leq M \quad (7)$$

и имеет ограниченные первые разностные отношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_{i+1}} |G_{i+1,k} - G_{i,k}| \leq M, \quad \frac{1}{h_{k+1}} |G_{i,k+1} - G_{i,k}| \leq M, \\ i, k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (8)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от сетки.

Воспользуемся обозначениями

$$\|\psi\|_0 = \max_{0 \leq i \leq N} |\psi_i|, \quad \|\psi\|_1 = \sum_{i=1}^{N-1} |\psi_i| \bar{h}_i, \quad \|\psi\|_1^* = \sum_{i=1}^N |\psi_i| h_i, \quad (9)$$

где ψ_i — любая сеточная функция.

Лемма 4. Если выполнены условия (6) и, кроме того, Φ_i^h , μ_1 и μ_2 ограничены, то

$$\left| \frac{\Delta y_i}{h_{i+1}} \right| \leq M, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (10)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от сетки.

В самом деле, решение задачи (4) определяется с помощью разностной функции Грина:

$$y_i = \sum_{k=1}^{N-1} G_{ik} \Phi_k^h \cdot \tilde{h}_k - A_1 \frac{G_{i,1}}{h_1} \mu_1 - A_N \frac{G_{i,N-1}}{h_N} \mu_2, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y_i}{h_{i+1}} &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{G_{i+1,k} - G_{i,k}}{h_{i+1}} \Phi_k^h \cdot \tilde{h} - \\ &- A_1 \frac{G_{i+1,1} - G_{i,1}}{h_1 h_{i+1}} \mu_1 - A_N \frac{G_{i+1,N-1} - G_{i,N-1}}{h_N h_{i+1}} \mu_2. \end{aligned} \quad (11')$$

Разностная функция Грина

$$G_{ik} = \begin{cases} \frac{\alpha_i \beta_k}{\alpha_N}, & i < k, \\ \frac{\alpha_k \beta_i}{\alpha_N}, & i > k, \end{cases} \quad (12)$$

где α_i и β_i — решения уравнения

$$L_h v_i = 0$$

с условиями

$$\alpha_0 = 0, \quad \frac{1}{A_1^h} \frac{\Delta \alpha_0}{h_1} = 1, \quad \beta_N = 0, \quad \frac{1}{A_N} \frac{\Delta \beta_{N-1}}{h_N} = -1. \quad (13)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{h_1 h_{i+1}} (G_{i+1,1} - G_{i,1}) = \frac{1}{h_1} \frac{\Delta \alpha_0}{\alpha_N} \frac{\Delta \beta_i}{h_{i+1}} = \frac{A_1^h}{\alpha_N} \frac{\Delta \beta_i}{h_{i+1}} = O(1)$$

и, аналогично,

$$\frac{1}{h_{i+1} h_N} (G_{i+1,N-1} - G_{i,N-1}) = O(1).$$

Поэтому из формулы (11') следует ограниченность $\Delta y_i / h_{i+1}$.

Лемма 5. Если выполнены условия леммы 4, то

$$\|y - \tilde{y}\|_0 \leq M \{ \|A^h - \tilde{A}^h\|_1^* + \|D^h - \tilde{D}^h\|_1 + \|\Phi^h - \tilde{\Phi}^h\|_1 \}, \quad (14)$$

где y — решение задачи (4), \tilde{y} — решение задачи (5), M — положительная постоянная, не зависящая от сетки.

Для доказательства леммы составим уравнение для разности $z = y_i - \tilde{y}_i$:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_h z_i &= \\ &= - \left\{ (\Phi_i^h - \tilde{\Phi}_i^h) + \frac{1}{\hbar_i} \Delta \left(\left(\frac{1}{A_i^h} - \frac{1}{\tilde{A}_i^h} \right) \frac{\nabla y_i}{\hbar_i} \right) - (D_i^h - \tilde{D}_i^h) y_i \right\} = -\Psi, \\ z_0 &= z_N = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} z_i &= \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{\hbar}_k \tilde{G}_{ik} \{ -(D_k^h - \tilde{D}_k^h) y_k + (\Phi_k^h - \tilde{\Phi}_k^h) \} - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{G}_{i,k+1} - \tilde{G}_{i,k}}{\hbar_{k+1}} \left(\frac{1}{A_{k+1}^h} - \frac{1}{\tilde{A}_{k+1}^h} \right) \frac{\Delta y_k}{\hbar_{k+1}} \cdot \hbar_{k+1}, \end{aligned}$$

так как

$$\sum_{i=1}^{N-1} \tilde{G}_{ik} \Delta v_k = - \sum_{k=0}^{N-1} (\tilde{G}_{i,k+1} - \tilde{G}_{i,k}) \cdot v_{k+1} \quad (\tilde{G}_{ik} = 0 \text{ при } k = 0, \dots, N).$$

Чтобы получить неравенство (14), надо воспользоваться ограниченностью функций y_i , \tilde{G}_{ik} и их первых разностных отношений.

Обращаясь теперь к точной и усеченной разностным схемам, в силу леммы 5 будем иметь

$$\|y^{(m)h} - u\|_0 \leq M \{ \|A^h - \tilde{A}^h\|_1^* + \|D^h - \tilde{D}^h\|_1 + \|\Phi^h - \tilde{\Phi}^h\|_1 \}, \quad (15)$$

где $u = u(x)$ — решение исходной задачи, а $y^{(m)h}$ — решение разностной краевой задачи

$$\begin{aligned} L_h^{(p,q,f)} y_i^{(m)h} &= 0, \quad 0 < i < N, \\ y_0^{(m)h} &= \mu_1, \quad y_N^{(m)h} = \mu_2, \end{aligned} \quad (16)$$

где $L_h^{(p,q,f)}$ — усеченная схема (3) m -го ранга.

Чтобы оценить погрешности в коэффициентах схемы, стоящих в правой части формулы (15), необходимо оценить разность

$$\begin{aligned} v_j(s, \hbar) - \Pi_j^{(m)}(s, \hbar) &= \hbar^{2m+2} (v_j^{(m+1)}(s) + \hbar^2 v_j^{(m+2)}(s) + \dots) = \\ &= \hbar^{2m+2} \Omega_j^{(m+1)}(s, \hbar). \end{aligned} \quad (17)$$

3. Оценка остаточного члена в разложении шаблонных функций

Обратимся теперь к доказательству ограниченности при любом $m \geq 0$ функций

$$\Omega_j^{(m+1)}(s, \hbar) = \sum_{k=0}^{\infty} v_j^{(m+1+k)}(s) \hbar^{2k}, \quad (18)$$

$$j = 1, 2, 3, \quad m \geq 0.$$

Сначала покажем, что для $\Omega_1^{(m+1)}(s, \hbar)$ и $\Omega_2^{(m+1)}(s, \hbar)$ выполняются неравенства:

$$0 \leq \Omega_1^{(m+1)}(s, \hbar) \leq M \frac{[\varkappa(1+s)]^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad (19)$$

$$0 \leq \Omega_2^{(m+1)}(s, \hbar) \leq M \frac{[\varkappa(1-s)]^{2m-1}}{(2m+1)!},$$

где $\varkappa = \sqrt{M_2 M_3}$, M — некоторая положительная постоянная, зависящая только от M_1, M_2 и M_3 .

В самом деле, учитывая условия (41)–(42), § 1, для $v_j^{(k)}(s)$, получаем

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\bar{p}(s)} \frac{d\Omega_j^{(m+1)}}{ds} \right] = \bar{q}(s) \Omega_j^{(m)}(s, \hbar),$$

$$\Omega_1^{(m+1)}(-1, \hbar) = \frac{d\Omega_1^{(m+1)}}{ds}(-1, \hbar) = 0,$$

$$\Omega_2^{(m+1)}(1, \hbar) = \frac{d\Omega_2^{(m+1)}}{ds}(1, \hbar) = 0.$$

Отсюда находим

$$\Omega_1^{(m+1)}(s, \hbar) = \int_{-1}^s \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^t \bar{q}(\lambda) \Omega_1^{(m)}(\lambda, \hbar) d\lambda \right] dt,$$

$$\Omega_2^{(m+1)}(s, \hbar) = \int_s^1 \bar{p}(t) \left[\int_t^1 \bar{q}(\lambda) \Omega_2^{(m)}(\lambda, \hbar) d\lambda \right] dt.$$

Учитывая затем условия $M_1 \leq \bar{p} \leq M_2$, $\bar{q} \leq M_3$, будем иметь

$$\Omega_1^{(m+1)}(s, \hbar) \leq \varkappa^2 \int_{-1}^s \int_{-1}^t \Omega_1^{(m)}(\lambda, \hbar) d\lambda dt, \quad (20)$$

$$\Omega_2^{(m+1)}(s, \hbar) \leq \varkappa^2 \int_s^1 \int_t^1 \Omega_2^{(m)}(\lambda, \hbar) d\lambda dt.$$

Нетрудно показать, что для

$$\Omega_j^{(0)}(s, \hbar) = v_j(s, h)$$

справедливы оценки вида

$$\Omega_1^{(0)}(s, \hbar) \leq M\varkappa(1+s), \quad \Omega_2^{(0)}(s, \hbar) \leq M\varkappa(1-s). \quad (21)$$

Из (20) и (21) следует (19).

Обратимся теперь к функции

$$v_3(s, \hbar) = \Pi_3^{(m)}(s, h) + \hbar^{2m+2} \Omega_3^{(m+1)}(s, h), \quad (22)$$

где

$$\Pi_3^{(m)}(s, h) = \sum_{k=0}^m v_3^{(k)}(s) \hbar^{2k}$$

— полином степени m относительно $\zeta = \hbar^2$.

Вводя функцию Грина

$$G^{\hbar}(s, t) = \begin{cases} \frac{v_1(s, \hbar)v_2(t, \hbar)}{v_1(1, \hbar)}, & s < t, \\ \frac{v_1(t, \hbar)v_2(s, \hbar)}{v_1(1, \hbar)}, & s > t, \end{cases} \quad (23)$$

представим решение краевой задачи

$$\mathcal{L}^* v_3 = -\bar{f}(s), \quad v_3(\pm 1, \hbar) = 0$$

в виде

$$v_3(s, \hbar) = \int_{-1}^1 G^{\hbar}(s, t) \bar{f}(t) dt. \quad (24)$$

Учитывая затем, что функция $1/v_1(1, \hbar)$ аналитична в некоторой области $|\zeta| \leq \zeta_0$ комплексного переменного $\zeta = \hbar^2$, нетрудно убедиться в аналитичности функции $\Omega_3^{(m+1)}(s, \hbar)$ для достаточно малых $\hbar \leq \bar{h}_0$. Отсюда

следует ее ограниченность:

$$|\Omega_3^{(m+1)}(s, \hbar)| \leq M, \quad \hbar \leq \bar{\hbar}_0, \quad (25)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая ни от \hbar , ни от номера m .

Таким образом, оценка вида (25) имеет место для всех шаблонных функций.

4. Точность усеченной схемы

Для того чтобы определить точность усеченной схемы, т. е. оценить норму $\|y^h - u\|_1$, найдем сначала величину погрешности, допускаемой при замене шаблонных функционалов

$$A^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \Delta], \quad \Phi^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s), \Delta], \quad D^h[\bar{q}(s), \bar{p}(s), \Delta]$$

точной схемы функционалами A^h , D^h , Φ^h усеченной схемы.

Рассмотрим сначала разность

$$A^h - A^h = \frac{\hbar}{h} [v_1(\Delta, \hbar) - \Pi_1^{(m)}(\Delta, \hbar)] = \hbar^{2m+2} \Omega_1^{(m+1)}(\Delta, \hbar). \quad (26)$$

Из оценки предыдущего пункта, а также из условия (Н) (§ 1, п. 1/) следует, что

$$|A^h - A^h| \leq M(\hbar^*)^{2m+2}, \quad (27)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая ни от сетки, ни от m .

Разность $D^h - D^h$ представим в виде

$$\begin{aligned} D^h - D^h = & \frac{\hbar^{2m+2}}{v_1(\Delta, \hbar)} \left[\int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s) \Omega_1^{(m+1)}(s, \hbar) ds - \right. \\ & - \frac{\Omega_1^{(m+1)}(\Delta, \hbar)}{\Pi_1^{(m)}(\Delta, \hbar)} \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s) \Pi_1^{(m)}(s, h) ds \left. \right] + \frac{\hbar^{2m+2}}{v_2(\Delta, \hbar)} \left[\int_{\Delta}^1 \bar{q}(s) \Omega_2^{(m+1)}(s, \hbar) ds - \right. \\ & \left. - \frac{\Omega_2^{(m+1)}(\Delta, \hbar)}{\Pi_2^{(m)}(\Delta, \hbar)} \int_{\Delta}^1 \bar{q}(s) \Pi_2^{(m)}(s, h) ds \right]. \quad (28) \end{aligned}$$

В силу ограниченности снизу $p(x) \geq M_1 > 0$ имеем

$$v_j(\Delta, h) \geq M_1 \geq 0, \quad \Pi_j^{(m)}(\Delta, h) \geq M_1 > 0, \quad j = 1, 2.$$

Учитывая затем, что

$$\Omega_j^{(m+1)}(s, \hbar) \leq M_0 \quad (j = 1, 2), \quad \bar{q} \leq M_3,$$

получаем

$$|D^h - \overset{(m)}{D}h| \leq \frac{4M_0M_3}{M_1}(h^*)^{2m+2} = M \cdot (h^*)^{2m+2}. \quad (29)$$

Аналогично поступаем и при оценке погрешности $\Phi^h - \overset{(m)}{\Phi}h$, где

$$\Phi^h = \left(\hbar^2 D^h + \frac{1}{v_1(\Delta, h)} + \frac{1}{v_2(\Delta, h)} \right) v_3(\Delta, h),$$

$$\overset{(m)}{\Phi}h = \left(\hbar^2 \overset{(m)}{D}h + \frac{1}{\Pi_1^{(m)}(\Delta, h)} + \frac{1}{\Pi_2^{(m)}(\Delta, h)} \right) \Pi_3^{(m)}(\Delta, h).$$

В результате приходим к оценке типа (27) или (29):

$$|\Phi^h - \overset{(m)}{\Phi}h| \leq M \cdot (h^*)^{2m+2}, \quad h^* \leq \bar{h}_0. \quad (30)$$

При этом коэффициенты $\bar{p}(s)$, $\bar{q}(s)$ и $\bar{f}(s)$ являются произвольными кусочно-непрерывными функциями.

Из (27), (22), (30) и леммы 4 следует

Теорема. *Усеченная разностная схема m -го ранга ($m \geq 0$) имеет $(2m + 2)$ -й порядок точности при $\|h\|_1 = h^* \rightarrow 0$ в классе $Q^{(0)}$ кусочно-непрерывных функций $p(x), q(x), f(x)$ на любой последовательности разностных сеток, удовлетворяющих условию*

$$0 < C_1 \leq \frac{h_{i+1}}{h_i} \leq C_2, \quad (H)$$

иными словами,

$$\| \overset{(m)}{y}h - u \|_0 \leq M \|h\|_0^{2m+2}, \quad \|h\|_0 \leq \bar{h}_0, \quad (31)$$

где C_1, C_2, M и \bar{h}_0 — положительные постоянные, не зависящие ни от номера m , ни от выбора сетки.

З а м е ч а н и е 1. Теорема сформулирована для первой краевой задачи, однако может быть распространена и на случай третьей краевой задачи (п. 5).

З а м е ч а н и е 2. Простейшей усеченной схемой является схема нулевого ранга, обеспечивающая второй порядок точности в классе $Q^{(0)}$ для любых сеток, удовлетворяющих (H).

Ее шаблонные функционалы определяются формулами

$$A^{(0)}[\bar{p}(s)] = \frac{\hbar}{h} \int_{-1}^{\Delta} \bar{p}(s) ds = v_1^{(0)}(\Delta) \frac{\hbar}{h}, \quad (32)$$

$$D^{(0)}[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \Delta] = \frac{1}{v_1^{(0)}(\Delta)} \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s) v_1^{(0)}(s) ds + \frac{1}{v_2^{(0)}(\Delta)} \int_{\Delta}^1 \bar{q}(s) v_2^{(0)}(s) ds, \quad (33)$$

$$\Phi^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s), \Delta] = \left(\hbar^2 D^{(0)} + \frac{1}{v_1^{(0)}(\Delta)} + \frac{1}{v_2^{(0)}(\Delta)} \right) v_3^{(0)}(\Delta), \quad (34)$$

где

$$v_1^{(0)}(\Delta) = \int_{-1}^{\Delta} \bar{p}(s) ds, \quad v_2^{(0)}(\Delta) = \int_{\Delta}^1 \bar{p}(s) ds,$$

$$v_3^{(0)}(\Delta) = \frac{1}{v_1^{(0)}(1)} \cdot$$

$$\cdot \left\{ v_1^{(0)}(\Delta) \int_{-1}^1 \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^t \bar{f}(\lambda) d\lambda \right] dt - v_1^{(0)}(1) \int_{-1}^1 \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^t \bar{f}(\lambda) d\lambda \right] dt \right\}.$$

При этом функционалы A и D не зависят от h , т. е. являются капои-ческими (см. [1, 2, 3]).

5. Усеченные разностные краевые условия

Рассмотрим теперь краевое условие 3-го рода

$$lu = \frac{u'(0)}{p(0)} - \sigma u(0) = \mu_1 \quad (35)$$

и соответствующую краевую задачу

$$L^{(p,q,f)}u = 0, \quad lu = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2. \quad (36)$$

В п. 4, § 1, было показано, что точное краевое условие при $x = 0$ имеет вид

$$l_h y = \frac{y_1 - y_0}{h_1 A_1^h} - y_0 \left[\sigma + \frac{h_1}{A_1^h} \int_0^1 q(s h_1) v_2^{(0)}(s, h_1) ds \right] = \bar{\mu}_1, \quad (37)$$

$$\bar{\mu}_1 = \mu_1 - \frac{h_1}{p(0)} \frac{dv_3^*}{ds}(0, h_1), \quad A_1^h = v_2^{(0)}(0, h_1). \quad (38)$$

Заменяя в (37) шаблонные функции $v_2(s, h_1)$ и $v_3^*(s, h_1)$ полиномами $\Pi_2^{(m)}(s, h_1)$ и $\Pi_3^{*(m)}(s, h_1)$ степени $2m$ относительно \hbar , получим усеченное разностное краевое условие m -го ранга

$$l_h y = \bar{\mu}_1^m.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\bar{\mu}_1^m - \bar{\mu}_1 = O(\hbar_1^{2m+3}), \quad l_h u - l_h u = O(\hbar_1^{2m+2}).$$

Отсюда следует, что решение разностной краевой задачи

$$L_h^{m(p,q,f)} y_i = 0, \quad 0 < i < N, \quad l_h y = \bar{\mu}_1^m, \quad y_N = \mu_2,$$

с усеченной схемой $L_h^{m(p,q,f)}$ и усеченным краевым условием m -го ранга имеет точность $(2m + 2)$ -го порядка относительно решения краевой задачи (36).

Усеченное условие нулевого ранга имеет вид

$$y_0 = \nu_1 y_1 + \eta_1,$$

где

$$\nu_1 = \left\{ 1 + h_1 A_1 \left[\sigma + \frac{1}{h_1 A_1} \int_0^{h_1} q(x) \left(\int_0^x p(\xi) d\xi \right) dx \right] \right\}^{-1},$$

$$A_1 = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} p(x) dx, \quad \eta_1 = \left[\mu_1 - \frac{1}{h_1 A_1} \int_0^{h_1} p(x) \left(\int_0^x f(\xi) d\xi \right) dx \right] h A_1 \nu_1.$$

Это условие можно заменить эквивалентным ему по точности, но более простым условием:

$$\nu_1 = \{1 + h_1 p_0(\sigma + 0,5 h q_0)\}^{-1}, \quad \eta_1 = h p_0 \nu_1 (\mu_1 - 0,5 h q_0).$$

Поступила в редакцию 3.03.1961

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 131, № 3. — С. 514–517.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О канонических однородных разностных схемах // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 131, № 4. — С. 761–764.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 1. — С. 5–63.

РАЗНОСТНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский
(Москва)

Решению задачи Штурма–Лиувилля для уравнения

$$L^{(k,q)}u + \lambda r(x)u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad L^{(k,q)}u = \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u(x) \quad (1)$$

методом конечных разностей посвящен ряд работ. В статьях [1–3] рассматривались вопросы сходимости и точности в классе гладких коэффициентов для разностных схем частного вида.

В данной работе мы используем однородные разностные схемы, изученные в [4], для решения задачи Штурма–Лиувилля в классе разрывных коэффициентов $Q^{(m)}$. В § 1 дается постановка задачи и характеристика исходного семейства разностных схем. В § 2 доказывается сходимость разностного метода. В § 3 с помощью априорных оценок устанавливается порядок точности в $Q^{(m,1)}$ решения разностной задачи при $h \rightarrow 0$. Показано, что разностная схема

$$L_h^{(k,q,\lambda r)}y = (ay_{\bar{x}})_x - dy + \lambda \rho y,$$

где

$$a = \left[\int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x+sh)} \right]^{-1}, \quad d = \int_{-0,5}^{0,5} q(x+sh) ds, \quad \rho = \int_{-0,5}^{0,5} r(x+sh) ds,$$

обеспечивает второй порядок точности в классе разрывных коэффициентов.

§ 1. Разностная краевая задача

1. Задача Штурма–Лиувилля

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение (1) с однородными краевыми условиями

$$k(0)u'(0) - \sigma_1 u(0) = 0, \quad k(1)u'(1) + \sigma_2 u(1) = 0, \quad (2)$$

где σ_1 и σ_2 — некоторые постоянные.

Задача Штурма–Лиувилля, или задача на собственные значения, состоит в отыскании таких значений параметра λ (собственных значений), при которых существуют нетривиальные решения (собственные функции) задачи (1)–(2), а также в отыскании собственных функций.

В дальнейшем мы будем всюду предполагать, что коэффициенты, входящие в уравнение (1) и условия (2), удовлетворяют условиям

$$0 < c_1 \leq k(x) \leq c_2, \quad 0 < c_2 \leq r(x) \leq c_4, \quad 0 \leq q(x) \leq c_5, \\ \sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 > 0, \quad (3)$$

где c_j ($j = 1, \dots, 5$) — некоторые постоянные.

Если $k(x)$ имеет разрыв первого рода в точке $x = \xi$ ($0 < \xi < 1$), то в этой точке должны выполняться условия сопряжения (непрерывность $u(x)$ и $k(x)u'(x)$):

$$[u] = 0, \quad [ku'] = 0 \quad \text{при } x = \xi, \quad (4)$$

где

$$[f] = f_{\text{п}} - f_{\text{л}}, \quad f_{\text{л}} = f(\xi - 0), \quad f_{\text{п}} = f(\xi + 0).$$

Задачу, определяемую условиями (1)–(4), мы в дальнейшем будем называть задачей (I).

Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$Q^m[l_1, l_2]$ — класс функций, кусочно-непрерывных на отрезке $[l_1, l_2]$ вместе со своими производными до m -го порядка включительно;

$Q^{(m, \gamma)}[l_1, l_2]$ ($0 \leq \gamma \leq 1$) — класс функций из $Q^{(m)}[l_1, l_2]$, m -е производные которых удовлетворяют на интервалах их непрерывности условию Гёльдера порядка γ ;

$C^{(m)}[l_1, l_2]$ — как обычно, класс функций, имеющих m -ю непрерывную производную.

Задача (I), как известно, эквивалентна вариационной задаче:

1) в классе кусочно-гладких функций сравнения $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям

$$H[\varphi] = \int_0^1 \varphi^2(x)r(x) dx = 1, \\ k(0)\varphi'(0) - \sigma_1\varphi(0) = 0, \quad k(1)\varphi'(1) + \sigma_2\varphi(1) = 0,$$

найти минимум функционала

$$D[\varphi] = \int_0^1 k(x)(\varphi')^2 dx + \int_0^1 q(x)\varphi^2(x) dx + \sigma_1\varphi^2(0) + \sigma_2\varphi^2(1). \quad (5)$$

Этот минимум определяет первое собственное значение

$$\lambda_1 = \min D[\varphi] = D[u_1];$$

2) остальные собственные значения λ_n ($n > 1$) находятся как минимум функционала (5) в классе кусочно-гладких функций сравнения $\varphi(x)$, удовлетворяющих дополнительным условиям:

$$H[\varphi] = 1, \quad H[\varphi, u_m] = \int_0^1 \varphi(x)u_m(x)r(x) dx = 0 \quad \text{при } m < n, \\ k(0)\varphi'(0) - \sigma_1\varphi(0) = 0, \quad k(1)\varphi'(1) + \sigma_2\varphi(1) = 0,$$

где $u_m(x)$ — собственная функция номера m . Этот минимум определяет n -е собственное значение

$$\lambda_n = \min D[\varphi] = D[u_n]$$

и достигается на n -й собственной функции $u_n(x)$.

Задача Штурма–Лиувилля (I) для кусочно-непрерывных коэффициентов $k, q, r \in Q^{(0)}$ имеет счетное множество собственных значений $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$, которым соответствуют собственные функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ (см. [5]).

Укажем некоторые известные [5] свойства собственных функций и собственных значений.

1. Каждому собственному значению соответствует только одна собственная функция.

В самом деле, предположим, что λ_n соответствуют две собственные функции $\bar{u}_n(x)$ и $\bar{\bar{u}}_n(x)$. Тогда их линейная комбинация

$$\tilde{u}_n(x) = \bar{\bar{u}}_n(0)\bar{u}_n(x) - \bar{u}_n(0)\bar{\bar{u}}_n(x)$$

удовлетворяет условию $\tilde{u}_n(0) = 0$ и также является собственной функцией, соответствующей λ_n . Из условия

$$k(0)\tilde{u}'(0) - \sigma_1\tilde{u}(0) = 0$$

для $\sigma_1 \neq \infty$ получаем $\tilde{u}'(0) = 0$. Отсюда следует, что $\tilde{u}_n(x) \equiv 0$.

В случае условия первого рода ($\sigma_1 = \infty$) можно выбрать

$$\tilde{u}_n(x) = \bar{\bar{u}}'_n(0)\bar{u}_n(x) - \bar{u}'_n(0)\bar{\bar{u}}_n(x).$$

Поэтому можно писать $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$

2. Собственные функции $\{u_n(x)\}$ образуют ортогональную и нормированную с весом $r(x)$ систему:

$$H[u_n, u_m] = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n, \quad H[u_n] = 1.$$

3. Все собственные значения положительны: $\lambda_n > 0, n = 1, 2, \dots$

4. Собственные значения $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, точнее,

$$c_6 n^2 \leq \lambda_n \leq c_7 n^2, \tag{6}$$

где c_6 и c_7 — положительные постоянные, не зависящие от номера n и зависящие только от c_j ($j = 1, \dots, 5$).

5. Собственные функции и их первые производные ограничены, точнее,

$$|u_n(x)| < c_8, \quad |u'_n(x)| \leq c'_9 \sqrt{\lambda_n} \leq c_9 n, \tag{7}$$

где c_8 и c_9 — положительные постоянные, зависящие только от c_j ($j = 1, \dots, 5$).

Для случая $k, q, r \in C^{(2)}$ доказательство (7) дано в [5]. Это доказательство с некоторыми изменениями переносится и на случай $k, q, r \in C^{(1)}$.

Введем новую переменную $t = \int_0^x r(x) dx$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left[\bar{k}(t) \frac{d\bar{u}}{dt} \right] - \bar{q}(t)\bar{u} + \lambda\bar{u} = 0, \quad 0 < t < l, \quad (1')$$

где

$$\bar{k}(t) = k(x)r(x), \quad \bar{q}(t) = q(x)/r(x), \quad \bar{u}(t) = u(x), \quad l = \int_0^1 r(x) dx.$$

Умножим уравнение (1') на $\bar{u}'(t)$ и проинтегрируем от 0 до t :

$$\bar{k}(0)[\bar{u}'(0)]^2 + \lambda\bar{u}^2(0) = \bar{k}(t)[\bar{u}'(t)]^2 + \lambda\bar{u}^2(t) - 2 \int_0^t \bar{q}\bar{u}\bar{u}' dt_1. \quad (8)$$

Интегрируем еще раз по t от 0 до l и учитываем, что

$$\int_0^l \bar{u}^2(t) dt = 1, \quad \int_0^l \bar{k}(t)[\bar{u}'(t)]^2 dt \leq \lambda,$$

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_0^l dt \left(\int_0^l \bar{q}\bar{u}\bar{u}' dt_1 \right) \right| &\leq 2l \cdot c_5 \left(\int_0^l [\bar{u}^2 dt \int_0^l [\bar{u}'(t)]^2 dt] \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{2lc_5}{c_1 c_3} \sqrt{\lambda} \leq c_{10} \sqrt{\lambda}. \quad (9) \end{aligned}$$

В результате будем иметь

$$\bar{k}(0)[\bar{u}'(0)]^2 + \lambda\bar{u}^2(0) \leq \frac{2\lambda}{l} + c_{10}\sqrt{\lambda}. \quad (10)$$

Возвращаясь теперь к (8) и учитывая неравенства (9) и (10), получаем

$$\bar{k}(t)[\bar{u}'(t)]^2 + \lambda\bar{u}^2(t) \leq \frac{2\lambda}{l} + c_{10}\sqrt{\lambda}.$$

Отсюда и из (6) следуют оценки (7).

Задача (I) эквивалентна интегральному уравнению с симметризуемым ядром:

$$u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) r(\xi) u(\xi) d\xi, \quad (11)$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина оператора $L^{(k,q)}$ с краевыми условиями (2), а также интегральному уравнению

$$u(x) = \int_0^1 G_0(x, \xi) (\lambda r(\xi) - q(\xi)) u(\xi) d\xi, \quad (12)$$

где $G_0(x, \xi)$ — функция Грина оператора $L^{(k)}u = (ku)'$ с краевыми условиями (2).

2. Обозначения

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ разностную сетку

$$\omega_h = \{x_0 = 0, \dots, x_i = i \cdot h, \dots, x_N = N \cdot h = 1\}.$$

Сеточную функцию y_i , заданную на ω_h , в дальнейшем будем обозначать y или $y(x)$ в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений. Условимся также писать

$${}^{(+1)}y = y_{i+1}, \quad {}^{(-1)}y = y_{i-1}, \quad y_{\bar{x}} = (y - {}^{(-1)}y)/h, \quad y_x = ({}^{(+1)}y - y)/h.$$

Пусть v — некоторая сеточная функция, заданная на ω_h . Введем обозначения

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad [y, v] = \sum_{i=0}^{N-1} y_i v_i h, \quad (y, v] = \sum_{i=1}^N y_i v_i h, \quad [y, v] = \sum_{i=0}^N y_i v_i h.$$

Мы будем пользоваться следующими нормами:

$$\|v\|_0 = \max_{\omega_h} |v_i|, \quad \|v\|_\sigma = [|v|^\sigma, 1]^{1/\sigma} \quad (\sigma = 1, 2),$$

$$\|v\|_3 = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=1}^i h v_k \right|, \quad (13)$$

$$\|v\|_4 = \|v\|_3 + |(v, 1)| + |v_0| \cdot h + |v_N| h. \quad (14)$$

Может оказаться, что функция v определена не на всей сетке, а на ее части. Например, функция $y_{\bar{x}}$ определена в точках x_i для $i = 1, 2, \dots, N$, а функция y_x — для $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. В этом случае

$$\|y_{\bar{x}}\|_0 = \max_{0 < i \leq N} |y_{\bar{x},i}|, \quad \|y_{\bar{x}}\|_{\sigma} = (|y_{\bar{x}}|^{\sigma}, 1)^{1/\sigma},$$

$$\|y_x\|_0 = \max_{0 \leq i < N} |y_{x,i}|, \quad \|y_x\|_{\sigma} = (|y_x|^{\sigma}, 1)^{1/\sigma}.$$

$\sigma = 1, 2.$

Мы будем также писать

$$[y, \psi] = (y, \psi) + y_0 \bar{v}_1 + y_N \bar{v}_2, \quad (15)$$

где ψ — функция, заданная в точках x_i , $i = 1, 2, \dots, N - 1$, если формально полагать $h\psi_0 = \bar{v}_1$, $h\psi_N = \bar{v}_2$.

Разностный оператор

$$\frac{(a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1}))}{h^2}$$

при помощи введенных обозначений запишется в виде $(ay_{\bar{x}})_x$.

Нам понадобятся в дальнейшем:

1) формула суммирования по частям:

$$[y, v_x] = -(v, y_{\bar{x}}] + (yv)_N - (yv)_0; \quad (16)$$

2) разностные формулы Грина:

$$((ay_{\bar{x}})_x, v) = -(a, y_{\bar{x}} v_{\bar{x}}] + (ay_{\bar{x}} v)_N - \binom{+1}{a} (y_x v)_0, \quad (17)$$

$$((ay_{\bar{x}})_x, v) = ((av_{\bar{x}})_x, y) + a_N (y_{\bar{x}} v - yv_{\bar{x}})_N - a_1 (y_x v - yv_x)_0. \quad (18)$$

На выводе этих формул ввиду его элементарности мы не останавливаемся. Условимся обозначать $\rho(h)$ любое выражение, равномерно сходящееся к нулю при $h \rightarrow 0$.

Все постоянные, не зависящие от h , будем обозначать буквой M , не указывая, как правило, их структуру и зависимость от других постоянных.

3. Разностные схемы

При построении разностной схемы для решения задачи (I) мы используем результаты работы [4]. Введем обозначения

$$L^{(k,q,\lambda r)}u = (ku')' - qu + \lambda ru, \quad L_h^{(k,q,\lambda r)}y = (ay_{\bar{x}})_x - dy + \lambda ry.$$

Будем предполагать, что $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ есть однородная консервативная схема стандартного типа [4]. Ее коэффициенты a, d и ρ выражаются с помощью шаблонных функций

$$A^h[f(s)], \quad f \in Q^{(0)}[-1; 0]; \quad D^h[f(s)], \quad f \in Q^{(0)}[-0,5; 0,5];$$

$$R^h[f(s)], \quad f \in Q^{(0)}[-0,5; 0,5],$$

определенных в классе $Q^{(0)}$ ($f \in Q^{(0)}$), через коэффициенты k, q и r дифференциального уравнения (1). Каждый коэффициент схемы зависит только от одного коэффициента дифференциального уравнения (схема стандартного типа):

$$a = A^h[k(x + sh)], \quad -1 \leq s \leq 0; \quad d = D^h[q(x + sh)], \quad -0,5 \leq s \leq 0,5;$$

$$\rho = R^h[r(x + sh)], \quad -0,5 \leq s \leq 0,5.$$

(Зависимость коэффициентов a, d и ρ от h в обозначениях явно не указываем.)

В качестве исходного семейства схем мы рассматриваем консервативные схемы, поскольку, как показано в [4], неконсервативные схемы

$$\bar{L}_h^{(k,q)}y = \frac{by_x - ay_{\bar{x}}}{h} - dy$$

не дают сходимости в $Q^{(m)}$.

В классе гладких коэффициентов схему $\bar{L}_h^{(k,q)}$ можно преобразовать в консервативную схему

$$L_h^{(k,q)}y_i = \mu_i \bar{L}_h^{(k,q)}y_i = (\bar{a}y_{\bar{x}})_{x,i} - \bar{d}_iy_i,$$

где

$$\mu_i = \prod_{k=1}^{i-1} \frac{b_k}{a_{k+1}}, \quad \bar{a}_i = a_i\mu_i, \quad \bar{d}_i = d_i\mu_i$$

(см. [4]).

Если схема $\bar{L}_h^{(k,q)}$ имеет m -й ($m = 1, 2$) порядок аппроксимации и $k(x) \in C^{(m+1)}$, то $\mu_i = 1 + O(h^m)$. Отсюда следует, что все результаты, получаемые в дальнейшем для $k(x) \in C^{(m+1)}$, $q, r \in C^{(m)}$, переносятся и на неконсервативные схемы.

Заметим, что в работах [1–3] изучались только дискретные схемы частного вида (например, $a = k(x - h)$, $a = k(x - 0,5h)$, $d = q$, $\rho = r(x)$), а в [3], кроме того, — дискретные схемы четвертого порядка в $C^{(m)}$.

Разностная схема $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ характеризуется погрешностью аппроксимации в классе дифференцируемых коэффициентов

$$\psi = L_h^{(k,q,\lambda r)}u - L^{(k,q,\lambda r)}u,$$

где u — любая достаточное число раз дифференцируемая функция.

При изучении сходимости и точности мы будем иметь дело с погрешностью аппроксимации на решении $u(x)$ уравнения (1).

В [4] было введено понятие ранга шаблонных функционалов. Если все шаблонные функционалы имеют ранг m ($m = 0, 1, 2$), то мы говорим, что $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ является схемой m -го ранга. Требование определенного порядка аппроксимации приводит к некоторым условиям (мы их не выписываем), которым удовлетворяют шаблонные функционалы и их дифференциалы по h и по функциональному аргументу. Из свойств шаблонных функционалов, которые выполнены для схем всех рангов, начиная со схемы нулевого ранга, укажем два свойства:

а) $A^h[1] = D^h[1] = R^h[1] = 1$ (условие нормировки),

б) функционалы $A^h[f]$, $D^h[f]$ и $R^h[f]$ являются неубывающими:

$$A^h[f_2] \geq A^h[f_1], \quad \text{если } f_2 \geq f_1, \quad \text{и т. д.}$$

Кроме того, мы предполагаем, что $D^h[f]$ и $R^h[f]$ — линейные функционалы.

Отсюда и из (3), в частности, следует, что коэффициенты a , d и ρ удовлетворяют условиям

$$0 < c_1 \leq a \leq c_2, \quad 0 < c_3 \leq \rho \leq c_4, \quad 0 \leq d \leq c_5, \quad (19)$$

где c_j ($j = 1, \dots, 5$) — постоянные, входящие в условие (3).

В качестве исходного класса разностных схем $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ мы будем рассматривать в § 2 схемы нулевого ранга.

В § 3 рассматривается также принадлежащее исходному классу семейство разностных схем 2-го ранга, удовлетворяющих условиям второго порядка аппроксимации (см. [4]). Мы будем называть его исходным семейством схем второго порядка.

Если шаблонные функционалы являются каноническими, т. е. не зависят от параметра h , то разностная схема называется канонической.

Две схемы называются эквивалентными по порядку аппроксимации (точности), если они имеют одинаковый порядок аппроксимации (точности). Нетрудно убедиться в том, что любая схема m -го ранга эквивалентна своей канонической части [4], т. е. схеме с каноническими шаблонными функционалами $A^{(0)}$, $D^{(0)}$ и $R^{(0)}$, которые являются главными членами в разложении A^h , D^h и R^h по h .

Отсюда следует, что все изложение можно вести для канонических схем.

Дадим более детальную характеристику свойств канонических шаблонных функционалов $A[f]$, $D[f]$ и $R[f]$.

Линейные канонические функционалы $D[f]$ и $R[f]$, удовлетворяющие условиям а) и б), имеют любой сколь угодно большой ранг.

Канонический функционал $A[f]$, являющийся, вообще говоря, нелинейным, имеет m -й ранг, если, помимо условий а) и б), он удовлетворяет еще двум требованиям:

в) $A[f]$ есть однородный функционал первой степени, т. е.

$$A[cf] = cA[f],$$

где c — любое положительное число;

г) $A[f]$ имеет m -й дифференциал, так что, в частности, можно написать

$$A[1 + \delta \cdot f] = 1 + \rho(\delta) \quad (\text{если } |f| \leq M) \quad \text{при } m = 0,$$

$$A[1 + \delta \cdot f] = 1 + \delta A_1[f] + \delta \rho(\delta) \quad \text{при } m = 1,$$

$$A[1 + \delta \cdot f] = 1 + \delta A_1[f] + \delta^2 A_2[f] + \delta^2 \rho(\delta) \quad \text{при } m = 2,$$

где $\rho(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, $A_1[f]$ — линейный функционал, $A_2[f]$ — квадратичный функционал.

Необходимые условия m -го порядка аппроксимации схемы $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ имеют вид $(k, q, r \in C^{(m)}[0, 1])$

$$a = k(\bar{x}) + O(h^m), \quad d = q(x) + O(h^m), \quad \rho = r(x) + O(h^m),$$

$$\bar{x} = x - 0,5h, \quad m = 1, 2. \quad (20)$$

Любая каноническая схема 1-го ранга удовлетворяет этим условиям при $m = 1$.

Каноническая схема 2-го ранга удовлетворяет условиям (20) при $m = 2$, если

$$A_1[s] = -0,5, \quad D[s] = 0, \quad R[s] = 0,5. \quad (21)$$

Нетрудно показать, что для любой симметричной схемы 2-го ранга условия (21) выполнены.

4. Разностная краевая задача

Прежде чем формулировать разностный аналог задачи (I), мы должны сформулировать разностные краевые условия, соответствующие условиям (2).

Рассмотрим граничный оператор

$$l^{(1)}u = k(0)u'(0) - \sigma_1 u(0)$$

и его разностный аналог

$$\bar{l}_h^{(1)}y = a_1 y_{x,0} - \sigma_1 y_0.$$

Нетрудно показать, что оператор $\bar{l}_h^{(1)}$ имеет только первый порядок аппроксимации. В самом деле, пусть $L_h^{(k)}$ — схема 2-го ранга, удовлетворяющая условиям (21) второго порядка аппроксимации, так что

$$a = k(x - 0,5h) + O(h^2) \quad \text{для} \quad k \in C^{(2)}.$$

Тогда будем иметь

$$a_1 = k(0) + 0,5hk'(0) + O(h^2),$$

$$u_{x,0} = u'(0) + 0,5hu''(0) + O(h^2),$$

$$\bar{l}_h^{(1)}u - l^{(1)}u = 0,5h(ku')'|_{x=0} + O(h^2) = 0,5h(q(0) - \lambda r(0))u(0) + O(h^2),$$

где $u(x)$ — решение уравнения (1).

Отсюда следует, что разностный оператор

$$l_h^{(1)}y = a_1y_{x,0} - \bar{\sigma}_1y + 0,5h\lambda r(0)y_0, \quad \text{где } \bar{\sigma}_1 = \sigma_1 + 0,5hq(0),$$

имеет второй порядок аппроксимации в классе решений уравнения (1). Этим же свойством обладает оператор

$$l_h^{(2)}y = a_Ny_{\bar{x},N} + \bar{\sigma}_2y_N - 0,5h\lambda r(1)y_N, \quad \text{где } \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 + 0,5hq(1),$$

соответствующий оператору

$$l^{(2)}u = k(1)u'(1) + \sigma_2u(1).$$

Разностную задачу Штурма–Лиувилля формулируем следующим образом.

Требуется найти такие значения параметра λ^h (собственные значения), которым соответствуют нетривиальные решения (собственные функции) однородного уравнения

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy + \lambda^h \rho y = 0 \quad \text{в точках } x = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (22)$$

с однородными краевыми условиями

$$a_1y_{x,0} - \bar{\sigma}_1y_0 + h\lambda^h \rho_0y_0 = 0, \quad a_Ny_{\bar{x},N} + \bar{\sigma}_2y_N - h\lambda^h \rho_Ny_N = 0, \quad (23)$$

где

$$\rho_0 = 0,5r(0), \quad \rho_N = 0,5r(1), \quad \bar{\sigma}_1 = \sigma_1 + 0,5hq(0), \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 + 0,5hq(1),$$

а также найти эти нетривиальные решения (собственные функции).

Коэффициенты задачи удовлетворяют условиям

$$0 < c_1 \leq a \leq c_2, \quad 0 < c_3 \leq \rho \leq c_4, \quad 0 \leq d \leq c_5, \quad \sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0, \\ \sigma_1 + \sigma_2 > 0. \quad (24)$$

Условия сопряжения, аналогичные условиям (4), в окрестности разрыва коэффициента k отсутствуют, так как мы рассматриваем однородные схемы, не предусматривающие явного выделения точек разрыва коэффициентов уравнения (1) (схемы сквозного счета).

Разностную краевую задачу (22)–(24) мы в дальнейшем называем задачей (II).

5. Разностная вариационная задача

Пусть y и λ^h — собственная функция и соответствующее собственное значение задачи (II). Полагая в формуле (17) $v = y$ и пользуясь условиями (23), находим

$$\lambda^h = \frac{D_N[y]}{H_N[y]}, \quad (25)$$

где

$$D_N[y] = [a, y_{\bar{x}}^2] + \bar{\sigma}_1 y_0^2 + \bar{\sigma}_2 y_N^2 \quad (y_{\bar{x}}^2 = (y_{\bar{x}})^2), \quad (26)$$

$$H_N[y] = [\rho, y^2], \quad \rho_0 = 0,5r(0), \quad \rho_N = 0,5r(1). \quad (27)$$

Пользуясь формулой Грина, нетрудно убедиться в том, что разностная краевая задача (II) эквивалентна вариационной задаче:

1) найти минимум функционала $D_N[\varphi]$ в классе сеточных функций φ , удовлетворяющих условиям

$$a_1 \varphi_{x,0} - \bar{\sigma}_1 \varphi_0 + h D_N[\varphi] \rho_0 \varphi_0 = 0,$$

$$a_N \varphi_{\bar{x},N} + \bar{\sigma}_2 \varphi_N - h D_N[\varphi] \rho_N \varphi_N = 0, \quad H_N[\varphi] = 1;$$

при этом

$$\lambda_1^h = D_N[y_1] = \min D_N[\varphi]$$

есть наименьшее собственное значение, а y_1 — соответствующая собственная функция задачи (II);

2) найти минимум $D_N[\varphi]$ в классе функций сравнения, удовлетворяющих условиям

$$H_N[\varphi] = 1, \quad H_N[\varphi, y_m] = [\rho \varphi, y_m] = 0 \quad \text{для } m = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$a_1 \varphi_{x,0} - \bar{\sigma}_1 \varphi_0 + h D_N[\varphi] \rho_0 \varphi_0 = 0,$$

$$a_N \varphi_{\bar{x},N} + \bar{\sigma}_2 \varphi_N - h D_N[\varphi] \rho_N \varphi_N = 0,$$

где y — собственная функция номера m ; при этом

$$\min D_N[\varphi] = D_N[y_n] = \lambda_n^h$$

есть n -е собственное значение, а $y_n(x)$ — его собственная функция.

6. Интегральное соотношение

Рассмотрим разностную функцию Грина $G^h(x, \xi)$, определяемую из условий:

$$(aG_{\bar{x}}^h)_x - dG^h = -\frac{\delta(r, \xi)}{h}, \quad \text{где } \delta(x, \xi) = \begin{cases} 1, & x = \xi, \\ 0, & x \neq \xi, \end{cases}$$

$$a_1 G_{x,0}^h - \bar{\sigma}_1 G_0^h = 0, \quad a_N G_{\bar{x},N}^h + \bar{\sigma}_2 G_N^h = 0.$$

Вводя функции α^h и β^h — решения однородного уравнения

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = 0,$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$a_1 \alpha_{x,0}^h = 1, \quad a_1 \alpha_{x,0}^h - \bar{\sigma}_1 \alpha_0^h = 0; \quad a_N \beta_{\bar{x},N}^h = -1, \quad a_N \beta_{\bar{x},N}^h + \bar{\sigma}_2 \beta_N^h = 0,$$

представим по аналогии с [4] функцию Грина в виде

$$G^h(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \alpha^h(x) \beta^h(\xi), & x < \xi, \\ \frac{1}{\Delta} \alpha^h(\xi) \beta^h(x), & x > \xi, \end{cases} \quad (28)$$

где

$$\Delta = \alpha_N^h + \frac{1}{\bar{\sigma}_2} [1 + (d, \alpha^h)] = \beta_0^h + \frac{1}{\bar{\sigma}_1} [1 + (d, \beta^h)] = \text{const.}$$

Отсюда сразу следует симметрия функции Грина

$$G^h(x, \xi) = G^h(\xi, x).$$

По аналогии с [4] нетрудно показать, что G^h и ее разностные производные $G_{\bar{x}}^h$ и $G_{\bar{\xi}}^h$ ограничены:

$$0 \leq G^h < M_1, \quad \|G_{\bar{x}}^h\|_0 \leq M_2, \quad \|G_{\bar{\xi}}^h\|_0 \leq M_2,$$

где M_1 и M_2 — положительные постоянные, не зависящие от h .

Если $d \equiv 0$, то α^h и β^h имеют вид

$$\alpha^h(x) = \frac{1}{\bar{\sigma}_1} + \sum_{x'=h}^{x'=x} \frac{h}{a(x')}, \quad \beta^h(x) = \frac{1}{\bar{\sigma}_2} + \sum_{x'=x+h}^{x'=1} \frac{h}{a(x')},$$

$$\Delta = \frac{1}{\bar{\sigma}_1} + \frac{1}{\bar{\sigma}_2} + \left(1, \frac{1}{a}\right).$$

Если при этом $\bar{\sigma}_1 = 0$, то $\alpha^h(x) \equiv 1$, $\Delta \equiv 1$.

В дальнейшем нам понадобится лемма.

Лемма 1. Пусть $G_0^h(x, \xi)$ — функция Грина разностного оператора $(ay_x)_x$ с краевыми условиями (23), а $G_0(x, \xi)$ — функция Грина дифференциального оператора $(ku')'$ с условиями (2). Если $k(x) \in Q^0$ и $\|a - k\|_1 = \rho(h)$, то $\|G_0^h - G_0\|_0 = \rho(h)$, где $\rho(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

В самом деле, замечая, что

$$\|\alpha^h - \alpha^0\|_0 = \rho(h), \quad \|\beta^h - \beta^0\|_0 = \rho(h),$$

где

$$\alpha^0(x) = \frac{1}{\sigma_1} + \int_0^x \frac{dt}{k(t)}, \quad \beta^0(x) = \frac{1}{\sigma_2} + \int_x^1 \frac{dt}{k(t)},$$

находим

$$\|G_0^h - G_0\|_0 \leq M \|a - k\|_1 = \rho(h),$$

так как G_0 определяется той же формулой (23), в которой α^h и β^h заменены функциями α^0 и β^0 .

Пользуясь второй формулой Грина (18), нетрудно убедиться в эквивалентности разностной задачи Штурма–Лиувилля разностному аналогу интегрального уравнения

$$y = \lambda^h [G^h, \rho y], \tag{29}$$

которое с помощью замены

$$\varphi(x) = \sqrt{\rho(x)} y(x), \quad K^h(x, \xi) = \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)} G^h(x, \xi)$$

сводится к уравнению

$$\varphi = \lambda^h [K^h, \varphi] \tag{30}$$

с симметричным ядром $K^h(x, \xi)$.

Если воспользоваться функцией Грина G_0^h оператора $L_h^{(k)}$, то вместо (30) получим уравнение

$$y = [G_0^h, (\lambda^h \rho - d)y], \quad (31)$$

где $d_0 = 0,5q(0)$, $d_N = 0,5q(1)$, $\rho_0 = 0,5r(0)$, $\rho_N = 0,5r(1)$.

7. Свойства собственных функций и собственных значений

Разностная задача Штурма–Лиувилля (II) является чисто алгебраической задачей. Поэтому не представляет труда доказательство следующих утверждений:

1) существует N вещественных собственных значений $\lambda_1^h, \lambda_2^h, \dots, \lambda_N^h$, которым соответствуют собственные функции y_1, y_2, \dots, y_N ;

2) каждому собственному значению соответствует только одна собственная функция (доказывается так же, как и для задачи (I) в п. 1), так что можно написать $\lambda_1^h < \lambda_2^h < \dots < \lambda_n^h < \dots < \lambda_N^h$;

3) все собственные значения положительны (это следует из (25));

4) собственные функции образуют ортогональную и нормированную с весом ρ систему:

$$H_N[y_m, y_n] = [\rho y_m, y_n] = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n; \end{cases}$$

$$5) \quad M_1 n^2 \leq \lambda_n^h \leq M_2 n^2 \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (32)$$

где M_1 и M_2 — положительные постоянные, не зависящие ни от h , ни от n .

Лемма 2. Пусть y_n, λ_n^h есть n -я нормированная собственная функция и n -е собственное значение задачи (II). Тогда функции y_n и $(y_n)_{\bar{x}}$ равномерно ограничены:

$$\|y_n\|_0 \leq M_1 n^{1/2}, \quad \|(y_n)_{\bar{x}}\|_0 \leq M_2 n^{3/2} \quad (33)$$

где M_1 и M_2 — постоянные, не зависящие от h и от n .

Пусть x и x' — любые две точки сетки ω_h . Рассмотрим два очевидных тождества:

$$y^2(x) - y^2(x') = \sum_{s=x'+h}^{s=x} (y^2(s))_{\bar{x}} \cdot h = \sum_{s=x'+h}^{s=x} [y(s) + y(s-h)] y_{\bar{x}}(s) \cdot h, \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
(a(x)y_{\bar{x}}(x))^2 - (a(x')y_{\bar{x}}(x'))^2 &= \sum_{s=x'}^{s=x-h} h[(a(s)y_{\bar{x}}(s))^2]_x = \\
&= \sum_{s=x'}^{s=x-h} (a(s)y_{\bar{x}}(s))_x \cdot [a(s)y_{\bar{x}}(s) + a(s+h)y_x(s)] \cdot h = \\
&= \sum_{s=x'}^{s=x-h} (d(s) - \lambda^h \rho(s)) [a(s)y_{\bar{x}}(s) + a(s+h)y_x(s)] y(s) \cdot h, \\
&\hspace{20em} (x > 0, x' > 0) \quad (35)
\end{aligned}$$

(индекс n пока опускаем).

Из условия нормировки $[\rho, y^2] = 1$ следует, что существует по крайней мере одна точка x' , в которой $\rho(x')y^2(x') \leq 1$ и, следовательно, $y^2(x') \leq 1/c_3$.

Применяя для преобразования правой части (34) неравенство Коши–Буняковского и учитывая (32), получим

$$y^2(x) \leq \frac{1}{c_3} + \frac{2}{\sqrt{c_1 c_3}} [\rho, y^2]^{1/2} \cdot (a, y_{\bar{x}}^2)^{1/2} \leq \frac{1}{c_3} + \frac{2\sqrt{\lambda_n^h}}{\sqrt{c_1 c_3}} \leq M_1^2 n. \quad (36)$$

Далее, из условия $(a, y_{\bar{x}}^2) \leq \lambda^h$ следует, что существует такая точка x' , в которой

$$a(x') y_{\bar{x}}^2(x') \leq \lambda^h,$$

т. е.

$$(a(x') y_{\bar{x}}(x'))^2 \leq c_2 \lambda^h.$$

Пользуясь затем неравенством Коши–Буняковского для преобразования правой части тождества (35) и учитывая (25) и (32), будем иметь

$$y_{\bar{x}}^2(x) \leq \frac{c_2}{c_1^2} \lambda^h + 2 \sqrt{\frac{c_5}{c_3}} \frac{c_5}{c_1^2} (\lambda^h)^{1/2} + \frac{2\sqrt{c_2 c_4}}{c_1^2} (\lambda^h)^{3/2} \leq M_2^2 n^3. \quad (37)$$

Из неравенств (36) и (37) в силу произвольности x следуют оценки (33).

Оценки (33) являются более грубыми по сравнению с оценками (7) для задачи (I). Однако, чтобы не усложнять изложение, мы не будем заниматься их уточнением, тем более что для наших целей в этом и нет необходимости.

Условие нормировки $H_N[y] = 1$ определяет собственную функцию y с точностью до знака. Для однозначного определения собственной функции надо ввести дополнительное условие выбора знака. В случае краевого

условия при $x = 0$ второго или третьего рода можно для этого потребовать, чтобы $y(0) > 0$, а в случае краевого условия первого рода ($y(0) = 0$) потребовать, чтобы $y_{x,0} > 0$. Аналогичный выбор знака может быть проведен и для собственных функций $u(x)$ исходной задачи (I). В дальнейшем изложении нормировка собственных функций наряду с условиями $H_N[y] = 1$ и $H[u] = 1$ будет включать и выбор знака указанным выше способом.

§ 2. Сходимость решений разностной задачи

Сходимость собственных значений и собственных функций разностной задачи (II) к собственным значениям и функциям исходной задачи Штурма–Лиувилля (I) при $N \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$) была доказана Курантом [1] для простейшей схемы $a = k(x-h)$, $d = q(x)$, $\rho = r(x)$ в классе гладких коэффициентов. В этом параграфе мы, пользуясь методом Куранта, докажем сходимость для задачи (II) в классе кусочно-непрерывных коэффициентов ($k, q, r \in Q^{(0)}$).

Нами будет доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если схема $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ имеет нулевой ранг, то решение $(\lambda_n^h, u_n(x))$ задачи (II) сходится на любой последовательности сеток при $h \rightarrow 0$ к соответствующему решению $(\lambda_n, u_n(x))$ задачи (I)

$$\lambda_n^h - \lambda_n = \rho(h), \quad \|y_n - u_n\|_0 = \rho(h)$$

для любых кусочно-непрерывных коэффициентов $k, q, r \in Q^{(0)}$, удовлетворяющих условию (3).

Рассмотрим сначала случай первого собственного значения ($n = 1$).

Пусть $\varphi(x)$ — любая кусочно-гладкая функция. Нетрудно заметить, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N[\varphi] = D[\varphi], \quad \lim_{N \rightarrow \infty} H_N[\varphi] = H[\varphi].$$

Отсюда следует, что $D_N[\varphi] \leq M$, где M — постоянная, не зависящая от N (от $h = 1/N$).

Пусть $y = y(x, h)$ — сеточная функция, реализующая минимум функционала $D_N[\varphi]$:

$$\lambda^h = D_N[y]$$

при условии нормировки $H_N[y] = 1$.

Рассмотрим последовательность сеточных функций $\{y(x, h)\}$ на некоторой последовательности сеток.

Лемма 3. *Последовательность функций $\{y(x, h)\}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена.*

Если x', x'' — точки сетки, то

$$y(x'', h) - y(x', h) = \sum_{s=x'}^{s=x''-h} h \cdot y_x(s, h).$$

Пользуясь затем неравенством Коши–Буняковского и ограниченностью $D_N[y]$, получим

$$|y(x'', h) - y(x', h)| \leq \sqrt{(1, y_x^2)} \cdot \sqrt{|x'' - x'|} \leq M \sqrt{|x'' - x'|}. \quad (38)$$

Из условия нормировки $H_N[y] = 1$ следует, что по крайней мере в одной точке $x = x'$ имеет место неравенство

$$\rho(x') y^2(x', h) \leq 1, \quad \text{т. е.} \quad |y(x', h)| \leq \frac{1}{\sqrt{c_3}}.$$

Отсюда и из (38) следует равномерная ограниченность последовательности $\{y(x, h)\}$:

$$|y(x'', h)| \leq |y(x'', h) - y(x', h)| + |y(x', h)| \leq M.$$

По теореме Арцела, примененной для последовательности сеточных функций, существует некоторая подпоследовательность $\{y(x, h_k)\}$, равномерно сходящаяся к некоторой функции $\tilde{u}(x)$, непрерывной на отрезке $[0, 1]$:

$$\|y(x, h_k) - \tilde{u}(x)\|_0 = \rho(h_k).$$

Будем предполагать, что последовательность $\{h_k\}$ такова, что числовая последовательность $\{\lambda^{h_k} = \lambda(h_k)\}$ сходится к некоторому пределу $\tilde{\lambda}$:

$$\lim_{h_k \rightarrow 0} \lambda(h_k) = \tilde{\lambda}.$$

В противном случае мы выбрали бы из нее сходящуюся подпоследовательность и ограничились бы рассмотрением только тех номеров k , которые соответствуют этой подпоследовательности.

Л е м м а 4. Если для некоторой последовательности

$$\lim_{h_k \rightarrow 0} \lambda(h_k) = \tilde{\lambda},$$

то $\tilde{\lambda} \leq \lambda$.

Пусть $u^*(x)$ — некоторая кусочно-гладкая функция, для которой

$$\lambda^* = \frac{D[u^*]}{H[u^*]} \leq \lambda + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

и пусть

$$\lambda^*(h_k) = \frac{D_{N_k}[u^*]}{H_{N_k}[u^*]} \quad (N_k = 1/h_k).$$

В силу принципа минимума $\lambda(h_k) \leq \lambda^*(h_k)$, причем $\lambda^*(h_k) \rightarrow \lambda^*$ при $h_k \rightarrow 0$. Переходя к пределу при $h_k \rightarrow 0$, получим

$$\tilde{\lambda} \leq \lambda^* \leq \lambda + \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности ε следует, что $\tilde{\lambda} \leq \lambda$.

Наша ближайшая цель — показать, что предельная функция удовлетворяет условиям (1) и (2) при $\lambda = \tilde{\lambda}$.

Разностная задача (II), как было показано в § 1, п. 6, эквивалентна уравнению

$$y = [G_0^h, (\lambda^h \rho - d)y], \quad (31)$$

где G_0^h — функция Грина оператора $(ay_{\bar{x}})_x$ при условиях (23). Совершим теперь предельный переход в (31) при $h_k \rightarrow 0$ и воспользуемся леммой 1. Тогда получим

$$\tilde{u}(x) = \int_0^1 G_0(x, \xi) (\tilde{\lambda} r(\xi) - q(\xi)) \tilde{u}(\xi) d\xi, \quad (39)$$

где $G_0(x, \xi)$ — функция Грина оператора $(ku')'$ при условиях (2).

Отсюда, по определению функции Грина, следует, что решение $\tilde{u}(x)$ интегрального уравнения (39) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L^{(k,q)} \tilde{u} + \tilde{\lambda} r \tilde{u} = 0$$

и краевым условиям

$$k(0) \tilde{u}'(0) - \sigma_1 \tilde{u}(0) = 0, \quad k(1) \tilde{u}'(1) + \sigma_2 \tilde{u}(1) = 0.$$

Так как всякому собственному значению задачи (I) соответствует только одна собственная функция $u_1(x)$, а $\lambda = \lambda_1$ есть наименьшее собственное значение, то

$$\tilde{\lambda} = \lambda_1 \quad \text{и} \quad \tilde{u}(x) \equiv u_1(x).$$

Из сказанного также следует, что вся последовательность $\{y(x, h)\}$ равномерно сходится к $u(x)$, а $\lambda_1^h = \lambda_1(h)$ сходится к λ_1 при $h \rightarrow 0$:

$$\|y_1 - u_1\|_0 = \rho(h), \quad \lambda_1^h - \lambda_1 = \rho(h).$$

Приведенные выше рассуждения относились к наименьшему собственному значению λ_1^h .

В случае других собственных значений λ_n^h для $n > 1$ все рассуждения сохраняют силу, если учесть, что λ_n^h и λ_n определяются как минимумы функционалов $D_N[\varphi]$ и, соответственно, $D[\varphi]$ при дополнительных условиях ортогональности $H_N[\varphi, y_m] = 0$ и $H[\varphi, u_m] = 0$ ($1 \leq m < n$). Тем самым теорема 1 доказана.

§ 3. О точности разностного метода

1. Уравнение для погрешности собственной функции

Пусть (λ^h, y) — решение разностной задачи (II), а (λ, u) — соответствующее решение исходной задачи Штурма–Лиувилля (I). Выясним вопрос об асимптотическом порядке при $h \rightarrow 0$ погрешности $z = y - u$ в норме $\|\cdot\|_0$, а также разности $\Delta\lambda = \lambda^h - \lambda$. Сформулируем прежде всего краевую задачу для z . Подставим $y = z + u$ в уравнение (22) и учтем уравнение (1) для u ; тогда получим для z неоднородное разностное уравнение

$$(az_{\bar{x}})_x - d \cdot z + \lambda^h \rho \cdot z = -\Psi, \quad (40)$$

где

$$\Psi = \psi + (\lambda^h - \lambda)\rho u, \quad (41)$$

$$\psi = L_h^{(k,q,\lambda r)} u - L^{(k,q,\lambda r)} u = [(au_{\bar{x}})_x - (ku')'] - (d-q)u + \lambda(\rho-r)u. \quad (42)$$

Функция ψ есть погрешность аппроксимации разностной схемы на решении уравнения (1).

Для функции z получаем неоднородные краевые условия

$$a_1 z_{x,0} - \bar{\sigma}_1 z_0 + h\lambda^h \rho_0 z_0 = \nu_1, \quad a_N z_{\bar{x},N} + \bar{\sigma}_2 z_0 - h\lambda^h \rho_N z_N = -\nu_2, \quad (43)$$

где

$$\nu_1 = h(\lambda^h - \lambda)\rho_0 u_0 + \bar{\nu}_1, \quad \nu_2 = h(\lambda^h - \lambda)\rho_N u_N + \bar{\nu}_2$$

$$(\rho_0 = 0,5r(0), \rho_N = 0,5r(1)), \quad (44)$$

$$\bar{\nu}_1 = (a_1 u_x(0) - \bar{\sigma}_1 u(0) + h\lambda\rho_0 u(0)) - (k(0)u'(0) - \sigma_1 u(0)), \quad (45)$$

$$\bar{\nu}_2 = (a_N u_{\bar{x}}(1) + \bar{\sigma}_2 u(1) - h\lambda\rho_N u(1)) - (k(1)u'(1) + \sigma_2 u(1)). \quad (46)$$

Таким образом, для выяснения точности решения разностной задачи мы должны оценить решение уравнения (40) с краевыми условиями (43). Эту задачу мы будем называть задачей (III).

2. Ф о р м у л а д л я $\Delta\lambda = \lambda^h - \lambda$

Параметр λ^h является собственным значением. Поэтому задача (III) разрешима только в том случае, когда собственная функция y задачи (II) ортогональна к правой части уравнения и краевых условий, точнее:

$$[\Psi, y] = [\psi, y] + (\lambda^h - \lambda)[\rho u, y] = 0, \quad (47)$$

где

$$[\psi, y] = (\psi, y) + \bar{\nu}_1 y_0 + \bar{\nu}_2 y_N,$$

$$h\psi_0 = \bar{\nu}_1, \quad h\psi_N = \bar{\nu}_2, \quad \rho_0 = 0,5r(0), \quad \rho_N = 0,5r(1).$$

Обозначим u и y нормированные функции:

$$H[u] = 1, \quad H_N[y] = 1.$$

В силу теоремы 1 $\|y - u\|_0 \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Поэтому при достаточно малом $h \leq h_0$ можно утверждать, что $[\rho u, y] \neq 0$. Собственному значению λ^h соответствует только одна собственная функция, определяемая с точностью до произвольного множителя. Выберем множитель C таким образом, чтобы функция $\bar{y} = Cy$ была ортогональна разности $\bar{z} = \bar{y} - u$:

$$[\rho\bar{y}, \bar{z}] = 0, \quad \text{где } \bar{z} = \bar{y} - u. \quad (48)$$

Отсюда следует, что

$$[\rho, yu] = [\rho, \bar{y}y] = C[\rho, y^2] = C,$$

$$[\rho, u^2] = [\rho, \bar{y}^2] + [\rho, \bar{z}^2] = C^2 + [\rho, \bar{z}u],$$

$$C^2 = [\rho, u^2] - [\rho, \bar{z}u]$$

или

$$1 - C^2 = [\rho, \bar{z}u] - (H_N[u] - H[u]). \quad (49)$$

В силу теоремы 1 ясно, что $C^2 \rightarrow 1$ при $h \rightarrow 0$. Будем предполагать, что $C > 0$, т. е. знаки u и y согласованы (см. § 1, п. 7). Формула (49) понадобится для оценки $|C^2 - 1|$.

Условие (47) используем для определения

$$\Delta\lambda = \lambda^h - \lambda = -\frac{[\psi, y]}{[\rho u, y]} = -\frac{[\psi, \bar{y}]}{C^2}. \quad (50)$$

Преобразуем правую часть. Введем функцию η при помощи условий

$$\eta_{\bar{x}} = \psi, \quad \eta_0 = h\psi_0 = \bar{v}_1, \quad \eta(x) = \sum_{x'=0}^{x'=x} h\psi(x').$$

Пользуясь формулой суммирования по частям (16)

$$[\psi, \bar{y}] = -[\eta, y_x] + y_N \eta_N,$$

а также леммой 2, получим

$$|[\psi, \bar{y}]| \leq M(n) \|\psi\|_4,$$

где

$$\|\psi\|_4 = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=1}^i h\psi_k \right| + \left| \sum_{i=0}^N h\psi_i \right| + h|\psi_0| + h|\psi_N|; \quad (14)$$

$M(n)$ — положительная постоянная, зависящая от номера n собственного значения.

Тем самым доказана

Лемма 5. Если выполнены условия теоремы 1, то

$$|\lambda_n^h - \lambda_n| \leq M(n) \|\psi\|_4, \quad (51)$$

где функция ψ определяется формулой (42).

3. Интегральное соотношение для $\bar{z} = \bar{y} - u$

Для оценки \bar{z} сведем задачу (III) к «интегральному» уравнению

$$\bar{z} = \lambda^h [G, \rho \bar{z}] + [G, \Psi], \quad (52)$$

где $G = G^h(x, \xi)$ — разностная функция Грина оператора

$$L_h^{(k,q)} y = (ay_{\bar{x}})_x - dy$$

с краевыми условиями (23).

Собственная функция \bar{y} задачи (II) удовлетворяет уравнению

$$\bar{y} = \lambda^h [G, \rho \bar{y}]. \quad (29')$$

Введем симметричное ядро

$$K(x, \xi) = \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)} G(x, \xi) \quad (x \in \omega_h, \xi \in \omega_h)$$

(зависимость G и K от h не будем указывать) и новые функции

$$v(x) = \sqrt{\rho(x)} \bar{z}(x), \quad \varphi(x) = \sqrt{\rho(x)} y(x) \quad (\rho \geq 0, 5c_3 > 0).$$

Тогда из (52) и (29') получим для сеточных функций $v(x)$ и $\varphi(x)$ уравнения

$$v = \lambda^h [K, v] + f, \quad f = [K, \bar{\Psi}], \quad \bar{\Psi} = \frac{\Psi}{\sqrt{\rho}}, \quad (53)$$

$$\varphi = \lambda^h [K, \varphi]. \quad (54)$$

Нетрудно заметить, что условие ортогональности φ к правой части f выполняется автоматически в силу условия (47) и уравнения (54):

$$\begin{aligned} [\varphi, f] &= [\varphi(x), [K(x, \xi), \bar{\Psi}(\xi)]] = [\bar{\Psi}(\xi), [K(\xi, x), \varphi(x)]] = \\ &= \frac{1}{\lambda^h} [\bar{\Psi}(\xi), \varphi(\xi)] = \frac{1}{\lambda^h} \left[\frac{\Psi}{\sqrt{\rho}}, y\sqrt{\rho} \right] = \frac{1}{\lambda^h} [\Psi, y] = 0. \end{aligned}$$

Пусть λ_n^h — собственное значение номера n , а $\varphi_n(x)$ — его нормированная собственная функция ($[\varphi_n, \varphi_n] = 1$).

Условие $[y, \rho \bar{z}] = 0$ запишется в виде

$$[\varphi_n, v] = 0. \quad (55)$$

Кроме того, имеем

$$[\varphi_n, f] = 0. \quad (56)$$

Найдем резольвенту $R(x, \xi; \lambda_n^h)$, с помощью которой решение уравнения (53) дается формулой

$$v = f + \lambda_n^h [R, f]. \quad (57)$$

Отсюда и из условий (55) и (56) следует ортогональность R к φ_n :

$$[R, \varphi_n] = 0. \quad (58)$$

Этим же свойством обладает ядро

$$K_1(x, \xi) = K(x, \xi) - \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^h} = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^N \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\xi)}{\lambda_k^h}.$$

Резольвента R определяется из уравнения

$$R(x, \xi; \lambda_n^h) = K_1(x, \xi) + \lambda_n^h [K_1(x, t), R(t, \xi; \lambda_n^h)]$$

и может быть записана в виде

$$R = K_1 + R_1,$$

где

$$R_1 = R_1(x, \xi; \lambda_n^h) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^N \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\xi)}{\lambda_k^h \left(\frac{\lambda_k^h}{\lambda_n^h} - 1 \right)}.$$

Ядро K_1 ограничено в силу ограниченности функции Грина и собственной функции $\varphi_n(x)$ (лемма 2). Поэтому будем иметь:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^N \frac{\varphi_k^2(x)}{(\lambda_k^h)^2} \leq [K_1^2(x, \xi), 1] \leq M,$$

$$\|R_1\|_2^2 = [R_1^2(x, \xi; \lambda_n^h), 1] = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^N \frac{\varphi_k^2(x)}{(\lambda_k^h)^2 \left(1 - \frac{\lambda_k^h}{\lambda_n^h} \right)^2} \leq M,$$

$$\|R\|_2 \leq \|K_1\|_2 + \|R_1\|_2 \leq M.$$

Обращаясь к формуле (57), получаем

$$\|v\|_0 \leq (1 + \lambda_n^h \|R\|_2) \|f\|_0. \quad (59)$$

4. Априорные оценки

Теорема 2. Пусть (λ_n^h, y_n) — собственное значение и нормированная собственная функция номера n задачи (II), а (λ_n, u_n) — собственное значение и нормированная собственная функция номера n задачи (I).

Если выполнены условия теоремы 1, то при достаточно малом $h \leq h_0$ имеют место неравенства

$$|\lambda_n^h - \lambda_n| \leq M_1(n) \|\psi\|_4, \quad (51)$$

$$\|y_n - u_n\|_0 \leq M_2(n) \|\psi\|_4 + M |H_N[u_n] - H[u]|, \quad (60)$$

где $M_1(n)$ и $M_2(n)$ — постоянные, зависящие от n и не зависящие от h .

Для доказательства теоремы достаточно установить лишь неравенство (60), так как оценка для $\lambda_n^h - \lambda_n$ уже получена в п. 2 (лемма 5).

Обратимся к неравенству (59) и рассмотрим $\|f\|_0$, где

$$f = [K, \bar{\psi}] + (\lambda^h - \lambda)[K, \sqrt{\rho}u], \quad \bar{\psi} = \psi/\sqrt{\rho}.$$

Второе слагаемое, взятое по норме $\|\cdot\|_0$, мажорируется величиной $M|\lambda^h - \lambda|$ или, согласно лемме 5, величиной $M_1(n)\|\psi\|_4$. Преобразуем теперь выражение

$$[K, \bar{\psi}] = \sqrt{\rho(x)} [G(x, \xi), \psi(\xi)].$$

Вводя функцию η с помощью условий

$$\eta_{\bar{x}} = \psi, \quad \eta_0 = h\bar{\psi}_0 = \bar{v}_1,$$

получим

$$[K, \bar{\psi}] = \sqrt{\rho(x)} \{ -[G_\xi(x, \xi), \eta(\xi)] + G(x, 1)\psi_N h - G(x, 1)\eta_{N-1} h \}.$$

Отсюда в силу ограниченности функции Грина и ее первых разностных производных (см. § 1, п. 6) следует

$$\|[K, \bar{\psi}]\|_0 \leq M\|\psi\|_4.$$

Таким образом,

$$\|f\|_0 \leq M(n)\|\psi\|_4$$

и, следовательно,

$$\|\bar{z}\|_0 \leq \frac{M(n)}{\sqrt{c_3}} (1 + \lambda_n^h \|R\|_2) \|\psi\|_4 \leq M(n)\|\psi\|_4. \quad (61)$$

Нас интересует разность

$$z = y - u,$$

которая выражается через \bar{z} :

$$z = \frac{\bar{z}}{C} + \frac{1 - C}{C} u,$$

$$\|z\|_0 \leq \frac{1}{C} \|\bar{z}\|_0 + \frac{1 - C^2}{C(1 + C)} \|u\|_0 \leq M(\|\bar{z}\|_0 + |1 - C^2|) \quad \text{при } h \leq h_0,$$

так как $C \rightarrow 1$ при $h \rightarrow 0$, а $\|u\|_0$ ограничена согласно (7).

Обращаясь теперь к формуле (49), находим

$$|1 - C^2| \leq M\|\bar{z}\|_0 + |H_N[u_n] - H[u]|$$

и, следовательно,

$$\|z\|_0 \leq M(n)\|\bar{z}\|_0 + M|H_N[u_n] - H[u]|.$$

Учитывая затем, оценку (61) для $\|\bar{z}\|_0$, получаем неравенство (60). Теорема 2 доказана.

5. Порядок точности в классе гладких коэффициентов

В силу теоремы 2 порядок точности решения разностной задачи (II) зависит от погрешности аппроксимации разностной схемы, включая граничные условия, а также от погрешности аппроксимации нормировочного функционала H_N , т. е. от величины

$$\chi = H_N[u_n] - H[u_n].$$

Оценка ψ по норме $\|\psi\|_4$ оказывается полезной даже в классе $C^{(m)}$, так как позволяет снизить на один порядок требование дифференцируемости функции $k(x)$, а также ранга шаблонного функционала $A[\bar{k}(s)]$. В самом деле, как показывают априорные оценки (51) и (60), для того чтобы разностная схема имела m -й ($m = 1, 2$) порядок точности, достаточно, чтобы выполнялось условие $\|\psi\|_4 = O(h^m)$. При этом схема может и не иметь m -го порядка аппроксимации, т. е. условие $\psi = O(h^m)$ не будет выполнено.

Ниже будет показано, что $\|\psi\|_4 = O(h^m)$ в классе $k, q, r \in C^{(m-1,1)}$, если схема имеет m -й ранг и удовлетворяет условиям (20) m -го порядка аппроксимации.

В § 1, п. 3, мы условились рассматривать только схемы стандартного типа. Напомним также, что $D[f]$ и $R[f]$ — линейные функционалы.

Теорема 3. *Если разностная схема $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ имеет 2-й ранг и удовлетворяет необходимым условиям (21) второго порядка аппроксимации, то решение задачи (II) для $k, q, r \in C^{(1,1)}$ имеет второй порядок точности:*

$$|\lambda_n^h - \lambda_n| \leq M(n)h^2, \quad \|y_n - u_n\|_0 \leq M(n)h^2.$$

Для доказательства теоремы достаточно оценить $\|\psi\|_4$ и χ и воспользоваться теоремой 2, условия которой выполнены.

Рассмотрим погрешность аппроксимации

$$\psi = \varphi - (d - q)u + \lambda(\rho - r)u$$

(индекс n опускаем), где

$$\varphi = (au_{\bar{x}})_x - (ku')' = L_h^{(k)}u - L^{(k)}u.$$

Если выполнены условия теоремы, то существуют производные u'' и $(ku')''$, удовлетворяющие условию Липшица. Поэтому будем иметь

$$(ku')' = (\overline{ku'})_x + O(h^2),$$

где черта сверху означает, что выражение берется в точке $\bar{x} = x - 0,5h$.

Рассмотрим сначала

$$\begin{aligned} \sum_{x'=h}^{x'=x-h} h\varphi(x') &= \sum_{x'=h}^{x'=x-h} \left(a(x')u_{\bar{x}}(x') - \overline{k(x')u'(x')} \right)_x h + O(h^2) = \\ &= a(x)u_{\bar{x}}(x) - k(\bar{x})u'(\bar{x}) - \left(a(x')u_{\bar{x}}(x') - k(\bar{x}')\bar{u}'(\bar{x}') \right) \Big|_{x'=h} + O(h^2). \end{aligned}$$

В силу условий (21) $a = \bar{k} + O(h^2)$. Учитывая затем, что

$$u_{\bar{x}} = \bar{u}' + O(h^2)$$

(так как u'' удовлетворяет условию Липшица), получаем

$$au_{\bar{x}} - \bar{k}\bar{u}' = O(h^2)$$

и, следовательно,

$$\sum_{x'=h}^{x'=x-h} h\varphi(x') = O(h^2), \quad \|\varphi\|_3 = O(h^2).$$

Разностные краевые условия (23), как мы видели в § 1, п. 4, имеют второй порядок аппроксимации в классе решений уравнения (1), т. е. $\bar{v}_1 = O(h^2)$ и $\bar{v}_2 = O(h^2)$. Отсюда следует, что

$$\|\varphi\|_4 = O(h^2), \quad \text{точнее, } \|\varphi\|_4 \leq M \cdot h^2.$$

Учитывая затем, что в силу условий (20)

$$d - q = O(h^2), \quad \rho - r = O(h^2),$$

будем иметь

$$\|\varphi\|_4 \leq M(n)h^2.$$

Замечая, что $H_N[u]$ представляет собой квадратурную формулу для $H[u]$ второго порядка точности в случае $r \in C^{(1,1)}$ и $u \in C^{(1,1)}$, находим

$$\chi = O(h^2).$$

Тем самым теорема 3 доказана.

6. Порядок точности в классе разрывных коэффициентов

Предположим теперь, что $k, q, r \in Q^{(1,1)}[0, 1]$; тогда $u' \in Q^{(1,1)}$, $(ku')' \in Q^{(1,1)}$. Обозначим

$$\xi_j = x_{n_j} + \theta_j h \quad (x_{n_j} = hn_j, \quad 0 \leq \theta_j \leq 1, \quad 0 < \xi_j < 1)$$

все точки разрыва функций $k(x), q(x)$ и $r(x)$. Число таких разрывов j_0 конечно: $j = 1, 2, \dots, j_0$.

При вычислении ψ в этом случае будем ссылаться на § 3 статьи [4]. Пусть $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ — схема 2-го ранга, удовлетворяющая условиям (21). Представим ψ в виде суммы

$$\psi = \bar{\psi} + \overline{\overline{\psi}},$$

где

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\psi}} &= \overline{\psi}_i = \psi_{n_j} \delta_{i,n_j} + \psi_{n_j+1} \delta_{i,n_j+1}, \\ j &= 1, 2, \dots, j_0, \quad \delta_{i,k} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases} \end{aligned}$$

Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 3, получаем

$$\|\bar{\psi}\|_4 = O(h^2), \quad \text{точнее,} \quad \|\bar{\psi}\|_4 \leq M(n)h^2. \quad (62)$$

Следует при этом иметь в виду, что

$$h\bar{\psi}_0 = \bar{v}_1, \quad h\bar{\psi}_N = \bar{v}_2.$$

Перейдем теперь к вычислению $\|\overline{\overline{\psi}}\|_4$. Отметим прежде всего, что для всякой схемы из указанного выше семейства выполняются условия

$$\begin{aligned} h\psi_{n_j} &= O(1), \quad h\psi_{n_j+1} = O(1), \quad h(\psi_{n_j} + \psi_{n_j+1}) = O(h), \\ j &= 1, 2, \dots, j_0. \end{aligned}$$

Для разностной схемы

$$L_h^{(k,q,\lambda r)} y = (ay_{\bar{x}})_x - d \cdot y + \lambda \cdot \rho y \quad (63)$$

с коэффициентами

$$a = \left[\int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x+sh)} \right]^{-1}, \quad d = \int_{-0,5}^{0,5} q(x+sh) ds, \quad \rho = \int_{-0,5}^{0,5} r(x+sh) ds \quad (64)$$

выполняются условия [4]:

$$h\psi_{n_j} = O(h), \quad h\psi_{n_j+1} = O(h), \quad h(\psi_{n_j} + \psi_{n_j+1}) = O(h^2), \quad j = 1, 2, \dots, j_0.$$

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \|\overline{\overline{\psi}}\|_3 &\leq \sum_{j=1}^{j_0} (h^2 |\psi_{n_j}| + h |\psi_{n_j} + \psi_{n_j+1}|), \\ \|\overline{\overline{\psi}}\|_4 &\leq \sum_{j=1}^{j_0} (h^2 |\psi_{n_j}| + 2h |\psi_{n_j} + \psi_{n_j+1}|). \end{aligned}$$

Л е м м а 6. Если

$$\rho = \rho_n = R_n[r(x + sh)] = \int_{-0,5}^{0,5} r(x + sh) ds,$$

то для $r(x) \in Q^{(0,1)}$, $u \in C^{(1)}$, $u' \in Q^{(1,1)}$ имеет место оценка

$$\chi = H_N[u] - H[u] = O(h^2).$$

Для упрощения записи, не нарушая общности, можно считать, что имеется только одна точка $\xi = x_n + \theta \cdot h$ разрыва функции $r(x)$. Представим χ в виде суммы:

$$\chi = \sum_{i=0}^N \Delta_i \cdot h,$$

где

$$\Delta_i = \int_{-0,5}^{0,5} r(x_i + sh)[u^2(x_i) - u^2(x_i + sh)] ds, \quad 0 < i < N,$$

$$\Delta_0 = 0,5hr(0)u^2(0) - \int_0^{0,5h} r(x)u^2(x) ds,$$

$$\Delta_N = 0,5hr(1)u^2(1) - \int_{1-0,5h}^1 r(x)u^2(x) ds.$$

Сразу видно, что $\Delta_0 = O(h^2)$, $\Delta_N = O(h^2)$. Если $i \neq n$, $i \neq n + 1$, то

$$\Delta_i = - \int_{-0,5}^{0,5} (r(x_i) + shr(x_i) + h\rho(h))((u^2)'_i sh + O(h^2)) ds = O(h^2).$$

Предположим теперь, что $0 \leq \theta \leq 0,5$. Тогда

$$\Delta_n = \int_{-0,5}^0 (r_n + O(h)) \cdot O(h) ds + \int_0^{0,5} (r_n + O(h)) \cdot O(h) ds = O(h),$$

$$r_n = r(\xi - 0), \quad r_n = r(\xi + 0), \quad \Delta_{n+1} = O(h^2).$$

Если же $0,5 \leq \theta \leq 1$, то

$$\Delta_n = O(h^2), \quad \Delta_{n+1} = O(h).$$

В обоих случаях $\Delta_n + \Delta_{n+1} = O(h)$. Отсюда следует, что

$$\chi = h(\Delta_n + \Delta_{n+1}) + O(h^2) = O(h^2).$$

С л е д с т в и е. Если $R[\bar{r}(s)]$ — произвольный функционал, то

$$\chi = [\rho - \rho_n, u^2] + O(h^2) \quad \text{для } r \in Q^{(0,1)}.$$

З а м е ч а н и е. Пользуясь представлением линейных функционалов в классе разрывных коэффициентов (см. § 1, п. 11 работы [4]), можно показать, что существует только один линейный канонический нормированный функционал, для которого $\chi = O(h^2)$ в классе $Q^{(m)}$ при любом $m \geq 1$.

Таким образом, нами доказаны следующие теоремы.

Т е о р е м а 4. Для любой разностной схемы второго ранга, удовлетворяющей условиям (21), в классе $Q^{(1,1)}$ ($k, q, r \in Q^{(1,1)}$) имеют место оценки

$$|\lambda_n^h - \lambda_n| \leq M(n)h, \quad \|y_n - u_n\|_0 \leq M(n) \cdot h,$$

где $\lambda_n, u_n(x)$ — n -е собственное значение и n -я нормированная собственная функция задачи (I), а λ_n^h, y_n — n -е собственное значение и n -я собственная функция разностной задачи Штурма–Лиувилля (II).

Т е о р е м а 5. Разностная схема (63)–(64) обеспечивает в классе коэффициентов $k, q, r \in Q^{(1,1)}$ второй порядок точности:

$$|\lambda_n^h - \lambda_n| \leq M(n)h^2, \quad \|y_n - u_n\|_0 \leq M(n)h^2.$$

В дальнейшем нами будут рассмотрены однородные разностные схемы, дающие любой порядок точности в классе кусочно-непрерывных коэффициентов уравнения (1).

Отдельно также будет рассмотрен вопрос о точности на неравномерных сетках.

Поступила в редакцию 14.05.1961

Список литературы

1. Courant R. Über Anwendung der Variationrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen und über neue Klassen von Funktionalgleichungen // Acta Math. — 1926. — V. 49. — P. 1–68.
2. Collatz L. Konvergenzbeweis und Fehlerabschätzung für das Differenzverfahren bei Eigenwertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen 2 und 4 Ordnung // Dtsch. Math. — 1937. — V. 2, № 2. — P. 189–215.
3. Bückner H. Über Konvergenzsätze, die sich bei der Anwendung eines Differenzverfahrens auf ein Sturm–Liouvillesches Eigenwertproblemen ergeben // Math. Z. — 1948. — V. 51, № 4. — P. 423–465.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 1. — С. 5–63.
5. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. I. — М.–Л.: Гостехиздат, 1951.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОГРЕШНОСТИ РАЗНОСТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Н. Тихонов, А. Д. Горбунов
(Москва)

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(a) = b, \quad (1)$$

где $y(x) = \{y^{(1)}(x), \dots, y^{(N)}(x)\}$ — искомая вектор-функция от x в пространстве N измерений, $f(x, y) = \{f^{(1)}(x, y), \dots, f^{(N)}(x, y)\}$ — заданная вектор-функция от x и $y = \{y^{(1)}, \dots, y^{(N)}\}$ в пространстве $N+1$ измерений.

Пусть для приближенного решения этой задачи применяется сходящаяся однородная разностная схема (см. [1, 2])

$$L(y_k) = \sum_{i=0}^m \alpha_i y_{k-i} - h \sum_{i=0}^n \beta_i f_{k+l-i}, \quad f_j = f(x_j, y_j) \quad (2)$$

($x_j = a + jh$, $h > 0$) при соответствующих начальных условиях.

Рассматриваются случаи, когда $l \leq 0$, $|l| \leq m$. Всякий приближенный разностный метод для решения класса задач, определяемых функциями f , приводит нас к некоторому (параметрическому по h) функционалу $V(f, h)$. В нашем случае таким функционалом является приближенное решение y_k задачи (1), определяемое как решение задачи (2).

Представляет несомненный интерес получение асимптотического разложения

$$V(f, h) = \overset{0}{V} + h \overset{1}{V} + \dots + h^r \overset{r}{V} + O(h^{r+1}). \quad (3)$$

В этом разложении

$$V^0 = \lim_{h \rightarrow 0} V(f, h)$$

является решением исходной задачи. Обычный прием сгущения узлов, являющийся проверкой того, что мы находимся в области асимптотических значений шага h , позволяет также, зная значения $V(f, h)$ и $V(f, h/2)$, получить значение V^0 с повышенной точностью:

$$V^0 = \left[\left(\frac{2}{h} \right)^\tau V\left(f, \frac{h}{2}\right) - \left(\frac{1}{h} \right)^\tau V(f, h) \right] \frac{h^\tau}{2^\tau - 1} + O(h^{\tau+1}), \quad (4)$$

если $V_i = 0$ при $i = 1, 2, \dots, r - 1$. Значение V^0 позволяет сравнивать значения h , при которых в различных методах главный член асимптотической погрешности одинаков.

В § 1 настоящей статьи дается асимптотическое разложение приближенного решения y_k по степеням h :

$$y_k = y^0(x_k) + h^s y^s(x_k) + \dots + h^{s+\gamma} y^{s+\gamma}(x_k) + O(h^{s+\gamma+1}), \quad (5)$$

где $y^0(x) = y(x)$ — точное решение задачи (1), s — степень разностного оператора $L(y_k)$, $\gamma \leq 2$ — натуральное число. При этом для функций $y^i(x)$ будут даны явные выражения через вектор-функцию $y(x)$ и ее производные. Такого рода разложения естественно называть априорными асимптотическими разложениями.

В § 2 дается апостериорное асимптотическое разложение для погрешности метода в виде

$$\delta_k = h^s \psi(x_k, h) + O(h^{2s}),$$

где функция ψ выражается через сеточную функцию y_k .

§ 1. Вывод априорного асимптотического разложения погрешности метода

В этом параграфе мы получим асимптотическое разложение погрешности метода в виде

$$\delta_k = y_k - y(x_k) = h^s y^s(x_k) + \dots + h^{s+\gamma} y^{s+\gamma}(x_k) + O(h^{s+\gamma+1}). \quad (5')$$

1. Для решения этой задачи потребуется следующая лемма.

Л е м м а. Пусть задана система разностных уравнений

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i z_{k-i} = h \sum_{i=0}^n \beta_i G_{k+l-i} z_{k+l-i} + O(h^{\sigma+1}), \quad l \leq 0, \quad (6)$$

где $z_k = \{z_k^{(1)}, \dots, z_k^{(N)}\}$ — искомая дискретная вектор-функция (N измерений) и G_k — заданная квадратная матрица порядка N с ограниченными элементами. Пусть корни характеристического уравнения разностного оператора $\sum_{i=0}^m \alpha_i z_{k-i}$ по модулю не превышают единицы, причем те из них, модуль которых равен единице, простые. Тогда:

а) для решения \tilde{z}_k уравнения (6), отвечающего нулевым начальным условиям, имеет место оценка

$$\tilde{z}_k = O(h^\sigma), \quad h \rightarrow 0; \quad (7)$$

б) для решения \hat{z}_k соответствующего (6) однородного уравнения с начальными значениями порядка $O(h^\sigma)$ имеет место оценка

$$\hat{z}_k = O(h^\sigma), \quad h \rightarrow 0. \quad (8)$$

Доказательство. Подставим в уравнение (6) функцию \tilde{z}_k и полученное запишем в координатной форме

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \tilde{z}_{k-i}^{(j)} = H_k^{(j)}, \quad (9)$$

где $H_k^{(j)}$ обозначают соответствующие правые части. Считая функцию $H_k^{(j)}$ известной, разрешим уравнение (9) относительно $\tilde{z}_k^{(j)}$ при нулевых начальных условиях:

$$\tilde{z}_k^{(j)} = 0, \quad k = 0, -1, \dots, -(m-1); \quad (10)$$

в результате этого получится

$$\tilde{z}_k^{(j)} = \sum_{\nu=0}^k \Phi_{k+1-\nu} H_\nu^{(j)}, \quad k \geq -(m-1), \quad (11)$$

где Φ_k — решение уравнения

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \Phi_{k-i} = \Omega_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 1, \\ 0 & \text{при } k > 0, \end{cases}$$

отвечающее нулевым начальным условиям (см. [3]). Следовательно, согласно (11), будем иметь

$$\tilde{z}_k^{(j)} = h \sum_{\nu=0}^k \Phi_{k+1-\nu} \left[\sum_{i=0}^n \beta_i \sum_{\alpha=1}^N G_{\nu+l-i}^{(j,\alpha)} \tilde{z}_{\nu+l-i}^{(\alpha)} + h^{\sigma+1} R_{\nu}^{(j)} \right].$$

Отсюда

$$|\tilde{z}_k^{(j)}| \leq h \Phi L \sum_{\nu=0}^k \sum_{i=0}^n |\beta_i| \sum_{\alpha=1}^N |\tilde{z}_{\nu+l-i}^{(\alpha)}| + h^{\sigma} R^{(j)}; \quad (12)$$

константы $\Phi, L, R^{(j)}$ выбираются под условиями

$$|\Phi_k| \leq \Phi < +\infty, \quad |G_k^{(j,\alpha)}| \leq L, \quad \Phi h \sum_{\nu=0}^k |R_{\nu}^{(j)}| \leq R^{(j)}.$$

Суммируя неравенства (12) по всем j , найдем

$$v_k \leq h \Phi L N \sum_{\nu=0}^k \sum_{i=0}^n |\beta_i| v_{\nu+l-i} + h^{\sigma} R, \quad (13)$$

где

$$v_k = \sum_{j=1}^N |\tilde{z}_k^{(j)}| \quad \text{и} \quad R = \sum_{j=1}^N R^{(j)} \quad (14)$$

суть нормы векторов \tilde{z}_k и $\{R^{(1)}, \dots, R^{(N)}\}$ соответственно.

Введем обозначение

$$u_k = \max_{\mu=0,1,\dots,k} v_{\mu}; \quad (15)$$

тогда неравенство (13) переписется в виде

$$u_k \leq P \sum_{\nu=0}^k u_{\nu+l} + Q,$$

где

$$P = h\Phi LN \sum_{i=0}^n |\beta_i|, \quad Q = h^\sigma R. \quad (16)$$

Отсюда получается

$$u_k \leq P' \sum_{\mu=0}^{k-1} u_\mu + Q, \quad (17)$$

причем

$$P' = \begin{cases} P & \text{при } l < 0, \\ P : (1 - P) & \text{при } l = 0 \end{cases} \quad (16')$$

(предполагается, что осуществлен такой выбор h , при котором $1 - P > 0$).

Из неравенства (17) методом полной индукции находим

$$u_k \leq Q(1 + P')^{k-1}. \quad (18)$$

Так как, согласно (16) и (16'),

$$\begin{aligned} (1 + P')^{k-1} &\leq (1 + hM)^{k-1} = \\ &= \left[\left(1 + \frac{x_{k-1} - a}{k-1} M \right)^{\frac{k-1}{x_{k-1} - a}} \right]^{(x_{k-1} - a)M} \leq \exp(x_{k-1} - a)M, \end{aligned}$$

где

$$M = \begin{cases} \Phi LN \sum_{i=0}^n |\beta_i| & \text{при } l < 0, \\ \Phi LN \sum_{i=0}^n |\beta_i| : (1 - P_0) & \text{при } l = 0 \end{cases}$$

$$\left(0 < h \leq h_0, \quad 1 - P_0 = 1 - h_0 \Phi LN \sum_{i=0}^n |\beta_i| > 0 \right),$$

то из неравенства (18) с учетом (16) вытекает, что $u_k = O(h^\sigma)$. Следовательно, согласно (14) и (15), имеет место оценка (7).

Далее подставим в однородное уравнение, соответствующее (6), его решение \hat{z}_k ; в результате этого получится

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \hat{z}_{k-1} = h \sum_{i=0}^n \beta_i G_{k+l-i} \hat{z}_{k+l-i}. \quad (19)$$

Если последнее тождество истолковать как уравнение относительно \widehat{z}_k , рассматривая правую его часть как известную функцию, то \widehat{z}_k можно будет представить в виде

$$\widehat{z}_k = u_k + v_k, \quad (20)$$

где u_k — решение уравнения

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i z_{k-1} = 0,$$

отвечающее начальным значениям порядка $O(h^\sigma)$, а v_k — решение неоднородного уравнения (19), отвечающее нулевым начальным условиям.

Так как в условиях леммы имеет место оценка

$$u_k = O(h^\sigma), \quad (21)$$

то функция v_k , согласно (19) и (20), удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i v_{k-i} = h \sum_{i=0}^n \beta_i G_{k+l-i} v_{k+l-i} + O(h^{\sigma+1}).$$

Следовательно, в силу первой части леммы, справедлива оценка

$$v_k = O(h^\sigma). \quad (22)$$

Из соотношений (20), (21) и (22) вытекает оценка (8).

Лемма доказана.

2. В качестве простого следствия предшествующей леммы получается

Т е о р е м а 1. *Если*

а) *разностный оператор $L(y_k)$ имеет степень $s \geq 1$,*

б) *корни характеристического уравнения разностного оператора*

$\sum_{i=0}^m \alpha_i y_{k-i}$ *по модулю не превышают единицы, причем те из них, модуль которых равен единице, являются простыми,*

в) *вектор-функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до порядка s включительно, то для погрешности метода имеет место оценка*

$$\delta_k = O(h^s). \quad (23)$$

Доказательство. Подставляя в уравнение (2) точное решение задачи (1), получим тождество

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i y(x_{k-i}) - h \sum_{i=0}^n \beta_i f(x_{k+l-i}, y(x_{k+l-i})) = -h^{s+1} \rho(y(x_k), h),$$

где $\rho(y(x_k), h)$ — вектор-функция, ограниченная по h и k . Вычитая отсюда тождество (2), получим уравнение относительно погрешности метода

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \delta_{k-i} = h \sum_{i=0}^n \beta_i F_{k+l-i} \delta_{k+l-i} + O(h^{s+1}), \quad (24)$$

причем матрица F_j определяется равенством

$$F_j = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_j \\ y=y(x_j)+\theta_j \times \delta_j}}, \quad (25)$$

где $\theta_j = \{\theta_j^{(1)}, \dots, \theta_j^{(N)}\}$ — вектор средних значений, $0 < \theta_j^{(\lambda)} < 1$, а символ \times обозначает прямое произведение двух векторов.

Так как элементы матрицы F_j очевидно ограничены по j , то условия леммы выполнены и из уравнения (25) вытекает оценка (23). Теорема доказана.

3. В настоящем пункте мы получим разложения вида (5').

Теорема 2. Если

а) разностный оператор $L(y_k)$ в случае $m = 1$ имеет степень $s \geq 1$,
 б) вектор-функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до порядка $(2s + \gamma)$, $\gamma = 1, 2$,
 то имеет место следующее асимптотическое разложение (погрешности метода):

$$\delta_k = h^s \psi(x_k, h) + O(h^{s+\gamma}), \quad (26)$$

причем функция $\psi(x, h)$ определяется как решение уравнения

$$\frac{d\psi}{dx} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y(x)} \cdot \psi + \sum_{j=1}^{\gamma} \kappa_j h^{j-1} \frac{d^{s+j} y(x)}{dx^{s+j}}, \quad (27)$$

отвечающее нулевому начальному значению. Коэффициенты $\kappa_1, \dots, \kappa_\gamma$, входящие в (27), находятся в результате решения уравнения $Bx = K$,

где

$$B = \begin{bmatrix} B_0 & \dots & 0 \\ B_1 B_0 & \dots & 0 \\ B_{\gamma-1} B_{\gamma-2} & \dots & B_0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$B_0 = \sum_{i=0}^n \beta_i \neq 0, \quad B_\lambda = \sum_{i=0}^n \beta_i \frac{(1+l-i)^\lambda}{\lambda!}, \quad \lambda = 1, \dots, \gamma-1,$$

$$\varkappa = \{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\gamma\}, \quad K = \{K_1, \dots, K_\gamma\},$$

$$K_j = \sum_{i=0}^1 \frac{(1-i)^{s+j}}{(s+j)!} \alpha_i - \sum_{i=0}^n \frac{(1+l-i)^{s+j-1}}{(s+j-1)!} \beta_i, \quad j = 1, \dots, \gamma. \quad (29)$$

Доказательство¹⁾. Перепишем уравнение (24) в несколько ином виде:

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \delta_{k-1} = h \sum_{i=0}^n \beta_i F_{k+l-i} \delta_{k+l-i} + h^{s+1} \rho(y(x_k), h). \quad (30)$$

Для вычисления функционала $\rho(y(x_k), h)$ подставим в уравнение (2) нужные разложения по формуле Тейлора для $y(x)$ и $dy(x)/dx$. Тогда, учитывая, что уравнение (2) имеет степень s , получим

$$\rho(y(x_k), h) = \sum_{j=1}^{\gamma} h^{j-1} K_j \left. \frac{d^{s+j} y(x)}{dx^{s+j}} \right|_{x=x_{k-m}} + O(h^\gamma), \quad (31)$$

причем коэффициент в выражении $O(h^\gamma)$ имеет вид

$$\sum_{i=0}^m \frac{(m-i)^{s+\gamma+1} \alpha_i}{(s+\gamma+1)!} \left. \frac{d^{s+\gamma+1} y(x)}{dx^{s+\gamma+1}} \right|_{x=\tilde{x}_{k-i}} - \sum_{i=0}^n \frac{(m+l-i)^{s+\gamma} \beta_i}{(s+\gamma)!} \left. \frac{d^{s+\gamma+1} y(x)}{dx^{s+\gamma+1}} \right|_{x=\tilde{x}_{k+l-i}}, \quad (32)$$

\tilde{x}_{k-i} , \tilde{x}_{k+l-i} — средние значения.

¹⁾Мы проводим это доказательство в общих обозначениях (не учитывая явно условие $m = 1$) в связи с тем, что следующая теорема доказывается аналогично.

Далее рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\frac{du}{dx} = \frac{df(x, y)}{dy} \Big|_{y=y(x)} \cdot u + h^s \sum_{j=1}^{\gamma} \kappa_j h^{j-1} \frac{d^{s+j}y(x)}{dx^{s+j}}, \quad (33)$$

где $u = \{u^{(1)}, \dots, u^{(N)}\}$ — искомая вектор-функция, κ_j — неопределенные коэффициенты. Решение этого уравнения, отвечающее нулевому начальному значению, записывается в виде

$$u(x) = h^s \sum_{j=1}^{\gamma} \kappa_j h^{j-1} \int_a^x \Omega(\xi, x) \frac{d^{s+j}y(\xi)}{d\xi^{s+j}} d\xi, \quad (34)$$

где Ω — матрицант матрицы $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=y(x)}$.

Отсюда вытекает, что

$$\frac{d^p u(x)}{dx^p} = O(h^s), \quad p = 1, 2, \dots, s+1. \quad (35)$$

Чтобы определить коэффициенты κ_j , запишем уравнение (2) в приложении к уравнению (33) и подставим в полученное уравнение функцию $u(x)$, определяемую равенством (34); тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \alpha_i u(x_{k-i}) &= h \sum_{i=0}^n \beta_i \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_{k+l-i} \\ y=y(x_{k+l-i})}} \cdot u(x_{k+l-i}) + \\ &+ h^{s+1} \sum_{j=1}^{\gamma} \kappa_j h^{j-1} \sum_{i=0}^n \beta_i \frac{d^{s+j}y(x)}{dx^{s+j}} \Big|_{x=x_{k+l-i}} + h^{s+1} \rho(u(x_k), h). \end{aligned} \quad (36)$$

Вычитая из тождества (30) последнее тождество, получим уравнение относительно разности $v_k = \delta_k - u(x_k)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \alpha_i v_{k-i} &= h \sum_{i=0}^n \beta_i \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_{k+l-i} \\ y=y(x_{k+l-i})}} \cdot v_{k+l-i} + \\ &+ h^{s+1} \left[\rho(y(x_k), h) - \sum_{j=1}^{\gamma} \kappa_j h^{j-1} \sum_{i=0}^n \beta_i \frac{d^{s+j}y(x)}{dx^{s+j}} \Big|_{x=x_{k+l-i}} \right] + \\ &+ h \sum_{i=0}^n \beta_i \left(F_{k+l-1} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_{k+l-i} \\ y=y(x_{k+l-i})}} \right) \delta_{k+l-i} - h^{s+1} \rho(u(x_k), h). \end{aligned} \quad (37)$$

Так как $\delta_k = O(h^s)$ и, согласно (35), $\rho(u(x_k), h) = O(h^s)$, то последние два слагаемых правой части равенства (37) имеют порядок $O(h^{2s+1})$ (см. равенство (25)). В связи с этим определим коэффициенты $\varkappa_1, \dots, \varkappa_\gamma$ так, чтобы свободный член в уравнении (37) имел порядок $O(h^{2s+\gamma+1})$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы сомножитель при h^{s+1} имел порядок $O(h^\gamma)$.

Покажем, что последнее требование определяет коэффициенты $\varkappa_1, \dots, \varkappa_\gamma$ однозначно. Действительно, учитывая равенство (32) и разлагая $\frac{d^{s+j}y(x)}{dx^{s+j}} \Big|_{x=x_{k+l-i}}$ по формуле Тейлора, перепишем названный сомножитель в виде

$$\sum_{j=1}^{\gamma} h^{j-1} K_j \frac{d^{s+j}y(x)}{dx^{s+j}} - \sum_{j=1}^{\gamma} \varkappa_j h^{j-1} \sum_{i=0}^n \beta_i \sum_{\lambda=0}^{\gamma-j} \frac{(m+l-i)^\lambda h^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{d^{s+j+\lambda}y(x)}{dx^{s+j+\lambda}} \Big|_{x=x_{k-m}} + O(h^\gamma).$$

Группируя члены с одинаковыми степенями h и приравнивая нулю возникающие при этом коэффициенты, получим систему уравнений

$$B\varkappa = K. \quad (38)$$

Из сходимости метода (2) вытекает, что $B_0 \neq 0$ (см. [2]). Следовательно (см. формулы (28) и (29)), система (38) однозначно разрешима относительно $\varkappa_1, \dots, \varkappa_\gamma$.

Таким образом, если в уравнении (34) в качестве $\varkappa_1, \dots, \varkappa_\gamma$ используется решение уравнения (38), то уравнение (37) принимает вид

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i v_{k-i} = h \sum_{i=0}^n \beta_i \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_{k+l-i} \\ y=y(x_{k+l-i})}} \cdot v_{k+l-i} + O(h^{s+\gamma+1}). \quad (39)$$

Следовательно, в силу леммы, решение \tilde{v}_k уравнения (39), отвечающее нулевым начальным условиям, имеет порядок $O(h^{s+\gamma})$. Обозначим через \hat{v}_k решение уравнения

$$\hat{v}_k - \hat{v}_{k-1} = h \sum_{i=0}^n \beta_i \frac{df(x, y)}{dy} \Big|_{\substack{x=x_{k+l-i} \\ y=y(x_{k+l-i})}} \cdot \hat{v}_{k+l-i}, \quad (39')$$

отвечающее начальным условиям

$$\widehat{v}_0 = v_0 = 0,$$

$$\widehat{v}_k = v_k = \delta_k - u(x_k) = -u(x_k) = O(h^{s+1}), \quad k = -1, \dots, -(s-1).$$

В результате непосредственного подсчета при помощи уравнения (39') можно убедиться, что имеет место оценка $\widehat{v}_k = O(h^{s+\gamma})$.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Таким образом, равенство (26) можно переписать в следующем виде:

$$\delta_k = h^s \sum_{j=1}^{\gamma} \kappa_j h^{j-1} \int_a^{x_k} \Omega(\xi, x_k) \frac{d^{s+j}y(\xi)}{d\xi^{s+j}} d\xi + O(h^{s+\gamma}), \quad (26')$$

где Ω — матрицант матрицы $\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y(x)}$.

Аналогично доказывается следующая

Т е о р е м а 3. Если

а) разностный оператор $L(y_k)$ имеет степень $s \geq 1$,

б) корни характеристического уравнения разностного оператора $\sum_{i=1}^m \alpha_i y_{k-i}$ по модулю не превышают единицы, причем те из них, модуль которых равен единице, простые,

в) вектор-функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $(2s + 1)$,

то для погрешности метода имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\delta_k = h^s \frac{K_1}{B_0} \int_a^{x_k} \Omega(\xi, x_k) \frac{d^{s+1}y(\xi)}{d\xi^{s+1}} d\xi + O(h^{s+1}). \quad (40)$$

Формула, аналогичная (40), приводится в статье [4], где она получается для схем специального вида в предположении об аналитичности правых частей уравнения (1) и при допущении о сходимости некоторых рядов, встречающихся в процессе доказательства.

4. Остановимся вкратце на вопросе о влиянии вычислительных погрешностей на асимптотические формулы (26) и (40). Пусть y_k^* обозначает

численное решение задачи (2), получаемое каким-либо определенным способом, и пусть η_k определяется равенством $\eta_k = L(y_k^*)$. Тогда, как легко видеть, уравнение относительно погрешности y_k^* запишется в виде

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i D_{k-1} = h \sum_{i=0}^n \beta_i F_{k+l-i}^* D_{k+l-i} + h^{s+1} \rho(y(x_k), h) + \eta_k, \quad (30')$$

где $D_k = y_k^* - y(x_k)$ — погрешность y_k^* , матрица F_j^* определяется равенством, подобным (25).

В связи с тем, что уравнение (30) почти совпадает с (30'), в результате почти буквального повторения доказательств теорем 2 и 3 получаются следующие предложения.

А. Если в условиях теоремы 2 при построении y_k^* начальные значения вычисляются с погрешностью порядка $O(h^{s+\gamma+1})$ и счет ведется так, что $\eta_k = O(h^{s+\gamma+1})$, то имеет место асимптотическое разложение

$$D_k = h^s \sum_{j=1}^{\gamma} \kappa_j h^{j-1} \int_a^{x_k} \Omega(\xi, x_k) \frac{d^{s+j} y(\xi)}{d\xi^{s+j}} d\xi + O(h^{s+\gamma}). \quad (26')$$

Б. Если в условиях теоремы 3 при построении y_k^* начальные значения считаются с погрешностью порядка $O(h^{s+1})$, а счет ведется с выполнением условия $\eta_k = O(h^{s+2})$, то имеет место асимптотическое разложение²⁾

$$D_k = h^s \frac{K_1}{B_0} \int_a^{x_k} \Omega(\xi, x_k) \frac{d^{s+1} y(\xi)}{d\xi^{s+1}} d\xi + O(h^{s+1}). \quad (40')$$

Эти результаты вполне согласуются с тем представлением (возникшим в процессе вычислительной практики), согласно которому счет можно вести так, чтобы вычислительные погрешности были несущественными по сравнению с погрешностями метода (см. также [5]).

²⁾Как нам стало известно в период оформления статьи, Н. П. Салиховым был получен аналогичный результат.

§ 2. Вывод апостериорного асимптотического представления погрешности метода

Если предполагается наличие точного решения y_k , $k = 0, 1, \dots$, задачи (2), то для построения асимптотического представления погрешности метода открывается другая возможность. Она состоит в эффективном построении континуального заполнения $\tilde{y}(x, h)$ дискретной функции y_k , $k = 0, 1, \dots$, и в использовании этого заполнения для получения эффективного асимптотического представления погрешности метода.

1. Континуальным заполнением дискретной функции y_k , $k = 0, 1, \dots$, мы будем называть такую функцию $\tilde{y}(x, h)$, которая определена на отрезке от крайнего левого до крайнего правого из узлов, где определена функция y_k , $k = 0, 1, \dots$, и удовлетворяет условиям

$$\tilde{y}(x, h) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (41)$$

Ясно, что для построения континуальных заполнений дискретных функций могут использоваться различные способы интерполирования.

Если уравнение (2) имеет степень s и вектор-функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до s -го порядка включительно, то для упомянутого решения y_k можно построить континуальное заполнение так, чтобы выполнялось условие

$$\delta(x, h) = \tilde{y}(x, h) - y_k = O(h^s). \quad (42)$$

Приведем одно из таких заполнений. Для этого разобьем узлы, в которых определена функция y_k , на группы по $(s + 1)$ подряд лежащих узлов, начиная с узла x_0 , и рассмотрим какую-либо из этих групп, начинающуюся узлом x_ν . По значениям функции y_k в этих узлах построим интерполяционный полином Ньютона:

$$\tilde{N}(x) = y_\nu + (x - x_\nu) \frac{\Delta y_\nu}{h} + \dots + (x - x_\nu) \dots (x - x_{\nu+s-1}) \frac{\Delta^s y_\nu}{s! h^s} \quad (43)$$

и положим $\tilde{y}(x, h)$ равной значению соответствующего полинома $\tilde{N}(x)$ в точке x . Для доказательства оценки (42) построим вспомогательный интерполяционный полином Ньютона $N(x)$ по значениям функции $y(x)$ в тех же узлах $x_\nu, x_{\nu+1}, \dots, x_{\nu+s}$. Далее оценим каждое слагаемое суммы

$$\delta(x, h) = [\tilde{N}(x) - N(x)] + [N(x) - y(x)]. \quad (44)$$

Выписывая остаточный член для интерполяционного полинома $N(x)$, получим

$$y(x) - N(x) = (x - x_\nu) \dots (x - x_{\nu+s}) y(x; x_0; \dots; x_{\nu+s}) = O(h^s). \quad (45)$$

Имея в виду равенство

$$\tilde{N}(x) - N(x) = \delta_\nu + (x - x_\nu) \frac{\Delta \delta_\nu}{h} + \dots + (x - x_\nu) \dots (x - x_{\nu+s-1}) \frac{\Delta^s \delta_\nu}{s! h^s}$$

и учитывая оценку $\delta_k = O(h^s)$, получаем

$$\tilde{N}(x) - N(x) = O(h^s). \quad (46)$$

Из соотношений (44), (45) и (46) вытекает оценка (42). Что и требовалось.

Ясно, что задача континуального заполнения дискретной функции решается неоднозначно.

2. Пусть для решения y_k , $k = 0, 1, \dots$, задачи (2) построено континуальное заполнение $\tilde{y}(x, h)$, реализующее оценку (42) и дифференцируемое всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда задачу построения апостериорного асимптотического представления погрешности метода решает следующая

Теорема 4. Если

а) разностное уравнение (2) имеет степень $s \geq 2$,

б) корни характеристического уравнения разностного оператора $\sum_{i=0}^m \alpha_i y_{k-i}$ по модулю не превышают единицы, причем те из них, модуль которых равен единице, простые,

в) вектор-функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до порядка s ,

то для погрешности метода справедливо следующее апостериорное асимптотическое разложение (см. [6]):

$$\delta_k = h^s \tilde{\psi}(x_k, h) + O(h^{2s}), \quad (47)$$

причем функция $\tilde{\psi}(x, h)$ находится как решение уравнения

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\tilde{y}(x, h)} \tilde{\psi} + \frac{\Theta(x, h)}{h^s}, \quad (48)$$

отвечающее нулевому начальному значению, где³⁾

$$\Theta(x, h) = \frac{d\tilde{y}(x, h)}{dx} - f(x, \tilde{y}(x, h)). \quad (49)$$

Доказательство. Подставим в уравнение (1) вектор-функцию $\tilde{y}(x, h)$; в результате этого получится тождество

$$\frac{d\tilde{y}(x, h)}{dx} = f(x, \tilde{y}(x, h)) + \Theta(x, h), \quad (50)$$

причем функция $\Theta(x, h)$ может быть эффективно вычислена по формуле (49). Вычитая из (50) тождество (1), получим

$$\frac{d\delta(x, h)}{dx} = F(x, h)\delta(x, h) + \Theta(x, h), \quad (51)$$

где

$$F(x, h) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=\tilde{y}(x, h)+\theta(x, h)\times\delta(x, h)}, \quad (52)$$

причем $\theta(x, h) = \{\theta^{(1)}(x, h), \dots, \theta^{(N)}(x, h)\}$ обозначает вектор средних значений $0 < \theta^{(i)}(x, h) < 1$.

Так как $\delta(a, h) = 0$, то из тождества (51) получается

$$\delta(x, h) = \int_a^x \Omega(\xi, x)\Theta(\xi, h) d\xi, \quad (53)$$

где Ω — матрицант матрицы $F(x, h)$.

Вводя в рассмотрение функцию

$$\eta(x, h) = \int_a^x \Theta(\zeta, h) d\zeta, \quad (54)$$

для которой, как вытекает из (42) и (51), имеет место оценка

$$\eta(x, h) = O(h^s), \quad (55)$$

³⁾В случае $s = 1$ теорема сохраняет силу при наличии у функции $f(x, y)$ ограниченных вторых частных производных.

перепишем правую часть равенства (53) в виде

$$\int_a^x \Omega(\xi, x) d\eta(\xi, h).$$

Отсюда в результате интегрирования по частям находим

$$\delta(x, h) = \eta(x, h) - \Omega(a, x)\eta(a, h) + \int_a^x F(\xi, h)\Omega(\xi, x)\eta(\xi, h) d\xi. \quad (56)$$

Учитывая оценку (42), из равенства (52) находим, что

$$F(x, h) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\tilde{y}(x, h)} + O(h^s) \quad (57)$$

и

$$\Omega(\xi, x) = \tilde{\Omega}(\xi, x) + O(h^s), \quad (58)$$

где $\tilde{\Omega}$ — матрицант матрицы $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\tilde{y}(x, h)}$.

После этого из (57) получается апостериорное представление для $\delta(x, h)$ в виде

$$\begin{aligned} \delta(x, h) = & \eta(x, h) - \tilde{\Omega}(a, x)\eta(a, h) + \\ & + \int_a^x \frac{\partial f(\xi, \tilde{y}(\xi, h))}{\partial y} \tilde{\Omega}(\xi, x)\eta(\xi, h) d\xi + O(h^{2s}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что функция $\tilde{\psi}(x, h)$ из выражения (47) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x, h) = & \hat{\eta}(x, h) - \tilde{\Omega}(a, x)\hat{\eta}(a, h) + \\ & + \int_a^x \frac{\partial f(\xi, \tilde{y}(\xi, h))}{\partial y} \tilde{\Omega}(\xi, x)\hat{\eta}(\xi, h) d\xi, \quad (59) \end{aligned}$$

где

$$\hat{\eta}(x, h) = \frac{1}{h^s} \int_a^x \left[\frac{d\tilde{y}(\xi, h)}{d\xi} - f(\xi, \tilde{y}(\xi, h)) \right] d\xi. \quad (60)$$

Поступила в редакцию 30.03.1962

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 1. — С. 5–63.
2. Горбунов А. Д., Будах Б. М. О сходимости некоторых конечно-разностных процессов для уравнений $y' = f(x, y)$ и $y'(x) = f(x, y(x), y(x - \tau(x)))$ // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 119, № 4. — С. 644–647.
Будах Б. М., Горбунов А. Д. О сходимости некоторых конечно-разностных процессов для уравнений $y' = f(x, y)$ и $y'(x) = f(x, y(x), y(x - \tau(x)))$ // Вестник МГУ. — 1958. — № 1. — С. 23–32.
3. Dahlquist G. Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations // Math. Skand. — 1956. — V. 4, № 1. — P. 33–53.
4. Ракитский Ю. В. О некоторых свойствах решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений методами численного интегрирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 6. — С. 947–962.
5. Будах Б. М., Горбунов А. Д. Об устойчивости вычислительных процессов, возникающих при решении многоточечными разностными методами задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 124, № 6. — С. 1191–1194.
Горбунов А. Д., Будах Б. М. Об устойчивости вычислительных процессов, возникающих при решении многоточечными разностными методами задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ // Вестник МГУ. — 1959. — № 2. — С. 15–23.
6. Schröder J. Fehlerabschätzung mit Rechenanlagen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung // Numer. Math. — 1961. — V. 3, № 1. — P. 39–61.

ОДНОРОДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский
(Москва)

При решении разностными методами различных дифференциальных уравнений широко используются неравномерные сетки. Однако вопрос о сходимости разностных схем на неравномерных сетках изучен мало.

Простейшие примеры показывают, что часто применяемый критерий для суждения о качестве разностных схем — равномерная оценка или оценка в среднем погрешности аппроксимации схемы — в случае неравномерных сеток оказывается несостоятельным и может дать неверное представление о порядке точности схемы.

Рассмотрим для дифференциального уравнения

$$Lu = u'' + f(x) = 0 \quad (0 < x < 1), \quad u(0) = u_1, \quad u(1) = u_2 \quad (1)$$

две разностные схемы на произвольной неравномерной сетке:

$$\omega_N = \{x_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = 1\}.$$

$$1. \quad \Lambda_1 y_i = \frac{1}{\tilde{h}_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) + f_i = 0, \quad y_0 = u_1, \quad y_N = u_2,$$

где $y_i = y(x_i)$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $\tilde{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$; погрешность аппроксимации этой схемы:

$$\psi_1 = \Lambda_1 u_i - Lu_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} u_i''' + O(h_i^2) + O(h_{i+1}^2),$$

т. е. схема имеет первый порядок аппроксимации. Однако в § 2 будет показано, что эта схема обеспечивает второй порядок точности на произвольной неравномерной сетке

$$\|y - u\|_0 = \max_{1 \leq i \leq N-1} |y_i - u(x_i)| \leq M \bar{h}^2, \quad (2)$$

где \bar{h} — средний квадратичный шаг сетки:

$$\bar{h} = \left(\sum_{i=1}^N h_i^2 h_i \right)^{1/2}.$$

2. Иногда применяется следующая схема:

$$\Lambda_2 y = \frac{1}{h_{i+1}} \left(\frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{\bar{h}_{i+1}} - \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}}{\bar{h}_i} \right) + f_i = 0, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2,$$

где

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad \bar{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1}), \quad \bar{y}_i = y(\bar{x}_i), \quad \bar{x}_i = 0,5(x_i + x_{i+1}).$$

Вычисления дают

$$\psi_i = \Lambda_2 \bar{u}_i - (Lu) \Big|_{x=\bar{x}_i} = \frac{h_{i+2} - 2h_{i+1} + h_i}{4h_{i+1}} u_i'' + O(h_i) + O(h_{i+1}) + O(h_{i+2}),$$

т. е. схема, вообще говоря, не аппроксимирует уравнение (1), если сетка произвольна. Однако в п. 5 § 2 показано, что

$$\|\bar{y} - u(\bar{x})\|_0 \leq M \|h\|_0^2, \quad \|h\|_0 = \max_i h_i \quad (\text{теорема 4}), \quad (3)$$

т. е. схема Λ_2 имеет второй порядок точности на произвольной сетке.

Нетрудно заметить, что в случае равномерной сетки $h_i = h = 1/N$ обе схемы совпадают.

Как было показано в [1], для однородных схем в случае дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u + f(x) = 0$$

с разрывными коэффициентами точность разностной схемы в конечном счете определяется не локальной, а интегральной погрешностью аппроксимации, характеризуемой нормой

$$\|\psi\|_3 = \sum_{i=1}^N h \left| \sum_{k=1}^i \psi_k h \right|. \quad (4)$$

Норма подобного типа, как выясняется в этой работе, является рациональной и для оценки точности однородных разностных схем на неравномерных сетках.

Изучение однородных разностных схем на неравномерных сетках мы проводим на примере краевой задачи

$$L^{(k,q,f)}u = (k(x)u')' - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \left. \begin{array}{l} \\ u(0) = u_1, \quad u(1) = u_2. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Мы рассматриваем семейство однородных консервативных трехточечных разностных схем стандартного типа, определяемых производящим функционалом:

$$\Lambda y = L_h^{(k,q,f)}y = (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi = 0,$$

$$(ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} = \frac{1}{\bar{h}} \left[\frac{a^{(+1)}(y^{(+1)} - y)}{h_{+1}} - \frac{a(y - y^{(-1)})}{h} \right], \quad \bar{h} = 0,5(h + h_{+1}).$$

Коэффициенты a, d, φ схемы определяются при помощи тех же шаблонных функционалов $A[\mu(s)]$ ($-1 \leq s \leq 0$), $D[\mu(s)]$, $F[\mu(s)]$, ($-0,5 \leq s \leq 0,5$), что и в случае равномерных сеток в [1]:

$$a = A[k(x + sh)], \quad d = D[q(x + (s + \Delta)h)],$$

$$\varphi = F[f(x + (s + \Delta)h)], \quad \Delta = \frac{h_{+1} - h}{4\bar{h}}.$$

В § 1 рассматривается семейство однородных разностных схем на неравномерных сетках, изучаются свойства разностной функции Грина и дается вывод необходимых для дальнейшего априорных оценок.

В § 2 изучается точность однородных разностных схем на произвольной последовательности неравномерных сеток. В классе гладких коэффициентов рациональной характеристикой неравномерной сетки является ее средний квадратичный шаг $\bar{h} = \|\bar{h}\|_2$; в этом случае наши схемы имеют второй порядок точности относительно \bar{h} , т. е. $\|y - u\|_0 \leq M\bar{h}^2$.

В п. 4 показано, что и в классе разрывных коэффициентов наши схемы имеют на неравномерных сетках тот же порядок точности, что и на равномерных сетках. Точнее, если $k(x), q(x)$ и $f(x)$ имеют разрывы 1 рода, в некоторой окрестности точки $\xi = x_n + \theta h_{n+1}$ ($0 \leq \theta \leq 1$), то справедлива оценка

$$\|y - u\|_0 \leq M\bar{h}^2 + M'(h_n^\times + h_{n+1}^\times + h_{n+2}^\times),$$

где $\varkappa = 1$ для произвольной схемы из рассматриваемого семейства, $\varkappa = 2$ для схемы, шаблонные функционалы A, D, F которой имеют вид

$$A[\mu(s)] = \left[\int_{-1}^0 \frac{ds}{\mu(s)} \right]^{-1}, \quad D[\mu(s)] = F[\mu(s)] = \int_{-0,5}^{0,5} \mu(s) ds.$$

Из этой оценки можно сделать выводы о выборе сетки вблизи фиксированных точек разрыва функций k, q, f .

Полученные в § 2 результаты позволяют освободиться от требования

$$0 < M_1 \leq \frac{h_{i+1}}{h_i} \leq M_2,$$

используемого в [2].

Аналогичные теоремы о точности однородных разностных схем на неравномерных сетках получаются для многомерного уравнения эллиптического типа

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x_1, \dots, x_p) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) - q(x_1, \dots, x_p)u + f(x_1, \dots, x_p) = 0.$$

В этом случае при построении соответствующих априорных оценок используется метод интегральных (энергетических) неравенств.

Следует отметить, что разностные схемы частного вида на неравномерных сетках рассматривались в ряде работ (см., например, [3]). Однако при оценке точности разностных схем на неравномерных сетках использовалась норма $\|\psi\|_0 = \max_i |\psi_i|$, которая не позволяет выяснить фактический порядок точности.

§ 1. Однородные разностные схемы на неравномерной сетке

1. Исходное семейство однородных схем

Рассмотрим первую краевую задачу для дифференциального уравнения

$$\left. \begin{aligned} L^{(k,q,f)}u &= \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= u_1, \quad u(1) = u_2, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $k(x) \geq c_1 > 0$, $q(x) \geq 0$, c_1 — постоянная.

Класс краевых задач (5) определен, если указаны семейства функций, которым принадлежат функции $k(x), q(x), f(x)$. Следуя [1], будем обозначать через $C^{(m)}[a, b]$ класс функций, имеющих на отрезке $a \leq x \leq b$ непрерывную m -ю производную; $Q^{(m)}[a, b]$ — класс функций, кусочно-непрерывных на $[a, b]$ вместе с производными до m -го порядка включительно; $C^{(m,1)}[a, b]$ — класс функций, у которых m -я производная удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица; $Q^{(m,1)}[a, b]$ — класс функций из $Q^{(m)}$, m -я производная которых на интервалах ее непрерывности удовлетворяет условию Липшица. Если в некоторой точке $\xi \in (0, 1)$ функция $k(x) \in Q^{(0)}[0, 1]$ имеет разрыв I рода ($k_{\text{л}} = k(\xi - 0) \neq k_{\text{п}} = k(\xi + 0)$), то в этой точке выполняются обычные условия сопряжения

$$[u] = u_{\text{п}} - u_{\text{л}} = 0, \quad \left[k \frac{du}{dx} \right] = 0 \quad \text{при} \quad x = \xi. \quad (6)$$

Разбивая отрезок $[0, 1]$ точками $x_0 = 0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_N = 1$ на N частей, получим разностную сетку $\omega_N = \{x_i\}$. Шаг сетки $h_i = x_i - x_{i-1}$ является, вообще говоря, произвольной сеточной функцией, удовлетворяющей лишь условию нормировки

$$\sum_{i=1}^N h_i = 1. \quad (7)$$

Если все $h_i = h = 1/N$ ($i = 1, 2, \dots, N$), то сетка $\omega_N = \omega_h$ равномерна. Пусть $y_i = y(x_i)$ — некоторая сеточная функция. В дальнейшем индекс i будем, как правило, опускать и писать

$$y = y(x) = y_i, \quad y^{(+)} = y_{i+1}, \quad y^{(-)} = y_{i-1} \quad (x \in \omega_N).$$

Введем обозначения для «разностных производных»

$$y_{\bar{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} = \frac{y^{(-)} - y}{h}, \quad y_x = \frac{y^{(+)} - y}{h_{+1}}, \quad y_{\hat{x}} = \frac{y^{(+)} - y}{\hat{h}} = \frac{h_{+1}}{\hat{h}} y_x,$$

где $\hat{h} = 0,5(h + h_{+1})$, $h = h_i$, $h_{+1} = h_{i+1}$. Тогда разностный оператор

$$\Delta y_i = \frac{1}{\hat{h}_i} \left[\frac{a_{i+1}(y_{i+1} - y_i)}{h_{i+1}} - \frac{a_i(y_i - y_{i-1})}{h_i} \right]$$

можно записать в удобной форме

$$\Delta y = (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}}.$$

На равномерной сетке $\Delta y = (ay_{\bar{x}})_x$.

Задача (5) неоднократно рассматривалась нами (см., например, [1]) для случая равномерных сеток. В работе [1] показано, что в семействе однородных схем стандартного типа только консервативные схемы

$$\Lambda y = L_h^{(k,q,f)} y = (ay_{\bar{x}})_x - dy + \varphi, \quad (8)$$

коэффициенты которых определяются при помощи шаблонных функционалов

$$A^h[\mu(s)] \quad (-1 \leq s \leq 0), \quad D^h[\mu(s)] \quad (-0,5 \leq s \leq 0,5), \\ F_h[\mu(s)] \quad (-0,5 \leq s \leq 0,5)$$

по формулам

$$a = a(x) = A^h[k(x + sh)], \quad d = D^h[q(x + sh)], \quad \varphi = F^h[f(x + sh)],$$

сходятся в классе разрывных коэффициентов¹⁾.

На неравномерной сетке мы будем рассматривать также только консервативные стандартные схемы (каждый коэффициент которых зависит только от одного коэффициента дифференциального уравнения):

$$\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_{\bar{x}} - dy + \varphi. \quad (9)$$

В силу консервативности схемы коэффициент $a(x_i)$ зависит только от значений $k(x)$ на отрезке $[x_i - h_i, x_i]$ сетки ω_N :

$$a_i = A^h[k(x_i + sh_i)] \quad \text{или} \quad a = A^h[k(x + sh)], \quad -1 \leq s \leq 0.$$

Коэффициент d (и φ) определяется значениями функции $q(x)$ ($f(x)$) на отрезке $[x - 0,5h, x + 0,5h_{+1}]$. Поэтому если мы хотим воспользоваться тем же шаблонным функционалом $D^h[\mu(s)]$, что и на равномерной сетке, то при выводе формулы для d нужно поместить центр $s = 0$ шаблона $-0,5 \leq s \leq 0,5$ в среднюю точку $\bar{x} = x + \frac{1}{4}(h_{+1} - h)$ отрезка $[x - 0,5h, x + 0,5h_{+1}]$, полагая

$$d = D^h[q(\bar{x} + sh)]. \quad (10)$$

¹⁾Однородная разностная схема, записанная в безындексной форме, представляет собой, по существу, производящий функционал (см. [1]).

При этом преобразование сдвига имеет вид

$$x' = \bar{x} + s\hbar = x + (\Delta + s)\hbar,$$

так что вместо (10) можно написать

$$d = D^h[q(x + (s + \Delta)\hbar)], \quad \Delta = \frac{h_{+1} - h}{4\hbar} \quad (10')$$

и, аналогично,

$$\varphi = F^h[f(x + (s + \Delta)\hbar)].$$

Индекс h указывает на зависимость шаблонных функционалов от сетки, т. е. в случае неравномерной сетки от двух параметров h, h_{+1} . Если шаблонные функционалы схемы не зависят от сетки, то мы будем их называть, по аналогии с [1], каноническими функционалами и обозначать через $A[\mu]$, $D[\mu]$, $F[\mu]$, а соответствующую схему Λy — канонической схемой. В дальнейшем все изложение проводится для канонических схем (9), у которых

$$a = A[k(x + sh)], \quad d = D[q(x + (s + \Delta)\hbar)], \quad \varphi = F[f(x + (s + \Delta)\hbar)].$$

Таким образом, мы будем рассматривать следующее семейство консервативных однородных разностных схем, определенных на неравномерных сетках:

$$\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_{\bar{x}} - dy + \varphi, \quad (11)$$

$$a = A[k(x + sh)] \quad (-1 \leq s \leq 0),$$

$$d = D[q(x + (s + \Delta)\hbar)], \quad \varphi = F[f(x + (s + \Delta)\hbar)] \quad (-0,5 \leq s \leq 0,5),$$

где

$$\Delta = \frac{h_{+1} - h}{4\hbar}.$$

Шаблонные функционалы определены на классе кусочно-непрерывных функций $\mu \in Q^{(0)}$ и удовлетворяют требованиям (см. [1]):

1) $A[\mu(s)]$ — неубывающий ($A[\mu_2] \geq A[\mu_1]$ при $\mu_2 \geq \mu_1$), нормированный ($A[1] = 1$) однородный функционал первой степени ($A[c\mu] = cA[\mu]$, $c = \text{const} > 0$), имеющий второй дифференциал;

2) $D[\mu(s)]$ и $F[\mu(s)]$ — линейные нормированные ($D[1] = 1$, $F[1] = 1$), неотрицательные функционалы ($D[\mu] \geq 0$, $F[\mu] \geq 0$ при $\mu \geq 0$);

3) выполнены необходимые условия 2-го порядка аппроксимации на равномерных сетках

$$A_1[s] = -0,5, \quad D[s] = F[s] = 0, \quad (12)$$

где $A_1[f] = A_1[1, f]$ — первый дифференциал функционала $A[\mu]$ в точке $\mu = 1$.

Эти условия определяют исходный класс однородных разностных схем (11), для которых в дальнейшем проводятся все исследования.

2. Разностные краевые задачи

Исходной задаче (5) ставим в соответствие следующую разностную задачу:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi = 0 \quad \text{при} \quad x = x_i, \quad 0 < i < N, \\ u(0) = u_1, \quad u(1) = u_2, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из условий $k \geq c_1 > 0$, $q \geq 0$ и свойств шаблонных функционалов следует

$$a \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0.$$

Чтобы выяснить вопрос о точности решения задачи (13) мы должны оценить сеточную функцию $z = y - u$ при неограниченном дроблении сетки, т. е. при $\|h\|_0 \rightarrow 0$. Функция z , очевидно, является решением задачи

$$\bar{\Lambda} z = (az_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dz = -\psi, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0, \quad (14)$$

где $\psi = \Lambda u - L^{(k,q,f)}u$ есть погрешность аппроксимации нашей схемы Λu , вычисленной для решения $u = u(x)$ дифференциального уравнения (5).

Для выяснения вопроса о сходимости и точности схемы (13) мы сначала вычислим погрешность аппроксимации ψ , а затем найдем оценку функции z через ψ (априорную оценку).

3. Погрешность аппроксимации на неравномерной сетке

Рассмотрим погрешность аппроксимации

$$\psi = \Lambda u - L^{(k,q,f)}u = [(au_{\bar{x}})_{\hat{x}} - (ku')'] - (d - q)u + \varphi - f. \quad (15)$$

Во введении мы указывали, что на неравномерной сетке порядок аппроксимации разностных схем, вообще говоря, понижается. В самом деле, рассмотрим частный случай $k = 1$, $d = q$, $\varphi = f$, так что $\psi = u_{\bar{x}\bar{x}} - u''$. Из формул

$$u^{(+1)} = u + h_{+1}u' + 0,5h_{+1}^2u'' + \frac{1}{6}h_{+1}^3u''' + O(h_{+1}^4),$$

$$u^{(-1)} = u - hu' + 0,5h^2u'' - \frac{1}{6}h^3u''' + O(h^4),$$

$$u_{\bar{x}} = u' - 0,5hu'' + \frac{1}{6}h^2u''' + O(h^3),$$

$$u_{\bar{x}\bar{x}} = u'' + \frac{h_{+1}^2 - h^2}{6\hbar}u''' + O(h^2) + O(h_{+1}^2)$$

следует, что

$$\psi = \frac{1}{3}(h_{+1} - h)u''' + O(h^2) + O(h_{+1}^2),$$

т. е. $\psi = O(h) + O(h_{+1})$ при $h \neq h_{+1}$ и $\psi = O(h^2)$ на равномерной сетке ($h = h_{+1}$).

В [1] было показано, что и в случае равномерной сетки схема, удовлетворяющая необходимым условиям второго порядка аппроксимации (12), имеет лишь первый порядок аппроксимации, если $k(x) \in C^{(1,1)}$, и тем не менее эта схема имеет второй порядок точности. Понижение порядка ψ на равномерной сетке может быть связано также с понижением ранга r_A (см. [1]) функционала $A[\mu(s)]$. Если ранг $r_A = 3$ и $k(x) \in C^{(2,1)}[0, 1]$, $q, f \in C^{(1,1)}[0, 1]$, то $\psi = O(h^2)$ на равномерной сетке. В случае неравномерной сетки даже при этих условиях $\psi = O(h) + O(h_{+1})$.

Найдем разложение сеточной функции (15) по степеням h и h_{+1} . Если $q, f \in C^{(1,1)}[0, 1]$, то в силу линейности функционалов D, F можно написать

$$\begin{aligned} d(x) &= D[q(x + (s + \Delta)\hbar)] = \\ &= q(x) + \hbar q'(x)(D[s] + \Delta) + O(h^2) + O(h_{+1}^2) = \\ &= q(x) + \frac{1}{4}(h_{+1} - h)q'(x) + O(h^2) + O(h_{+1}^2), \\ &\quad \left(D[s] = 0, \Delta = \frac{1}{4\hbar}(h_{+1} - h) \right), \quad (16) \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = F[f(x + (s + \Delta)\hbar)] = f(x) + \frac{1}{4}(h_{+1} - h)f'(x) + O(h^2) + O(h_{+1}^2). \quad (17)$$

Лемма 1. Погрешность аппроксимации любой схемы Λu из исходного класса для $k, q, f \in C^{(1,1)}$ и произвольной неравномерной сетки ω_N можно представить в виде

$$\psi = \Lambda u - L^{(k,q,f)}u = \mu_{\bar{x}} + \psi^*, \quad (18)$$

где

$$\mu = au_{\bar{x}} - \overline{ku'} + \frac{h^2}{8} qu', \quad \mu = O(h^2), \quad \psi^* = O(h^2) + O(h_{+1}^2), \quad (19)$$

$\overline{ku'} = ku'|_{x=\bar{x}}$, $\bar{x} = x - 0,5h$, $a u = u(x)$ есть решение дифференциального уравнения $L^{(k,q,f)}u = 0$.

Из уравнения $(ku')' = qu - f$ и условий $q, f \in C^{(1,1)}$ следует, что

$$(ku')'' = (qu - f)' \in C^{(0,1)}.$$

Поэтому можно написать

$$\overline{ku'} = ku' - 0,5h(ku')' + \frac{h^2}{8} (ku')'' + O(h^3),$$

$$\overline{(k^{(+1)}u')'} = ku' + 0,5h_{+1}(ku')' + \frac{1}{8} h_{+1}^2 (ku')'' + O(h_{+1}^3).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} (ku')' &= \overline{(ku')'}_{\bar{x}} - \frac{1}{8\bar{h}} (h_{+1}^2 - h^2)(ku')'' + O(h^2) + O(h_{+1}^2) = \\ &= \overline{(ku')'}_{\bar{x}} - \frac{1}{8} h^2 (ku')''_{\bar{x}} + O(h^2) + O(h_{+1}^2), \end{aligned} \quad (20)$$

так как

$$\frac{(h_{+1}^2 - h^2)(ku')''}{8\bar{h}} = \frac{1}{8} (h^2(ku')'')_{\bar{x}} + O(h_{+1}^2).$$

Пользуясь (16) и (17), аналогично преобразуем $-(d - q)u + \varphi - f$:

$$\begin{aligned} (d - q)u &= \frac{1}{4} (h_{+1} - h)q'u + O(h^2) + O(h_{+1}^2) = \\ &= \frac{1}{8} \frac{h_{+1}^2 - h^2}{\bar{h}} q'u + O(h^2) + O(h_{+1}^2) = \\ &= \frac{1}{8} (h^2 q'u)_{\bar{x}} + O(h^2) + O(h_{+1}^2), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\varphi - f = \frac{1}{8} (h^2 f')_{\bar{x}} + O(h^2) + O(h_{+1}^2). \quad (22)$$

Подставляя (20)–(22) в (15), получим (18), где

$$\mu = au_{\bar{x}} - \overline{ku'} + \frac{1}{8} h^2 [(ku')'' - q'u + f']. \quad (23)$$

Из дифференциального уравнения $L^{(k,q,f)}u = 0$ находим

$$(ku')'' - q'u + f' = qu'.$$

После подстановки этого выражения в (23) формула для μ принимает вид

$$\mu = au_{\bar{x}} - \overline{ku'} + \frac{1}{8} h^2 qu'. \quad (19)$$

Проведенное преобразование справедливо при любых a . Предположим теперь, что A имеет второй дифференциал (второй ранг) и удовлетворяет необходимым условиям второго порядка аппроксимации $A[s] = 1$, $A_1[s] = -0,5$.

Разлагая $a(x)$ по степеням h в окрестности точки $\bar{x} = x - 0,5h$ (см. [1])

$$\begin{aligned} a(x) &= A[k(\bar{x} + (s + 0,5)h)] = \\ &= k(\bar{x}) + hA_1[s + 0,5]k'(\bar{x}) + O(h^2) = k(\bar{x}) + O(h^2) \end{aligned}$$

и замечая, что $u_{\bar{x}} = u'(\bar{x}) + O(h^2)$, находим

$$au_{\bar{x}} - \overline{ku'} = (\bar{k} - O(h^2))(\bar{u}' + O(h^2)) - \overline{ku'} = O(h^2), \quad \text{т. е. } \mu = O(h^2).$$

Если $A[\bar{k}(s)]$ имеет третий ранг и $k(x) \in C^{(2,1)}$, где $m > 1$, то

$$\begin{aligned} a(x) &= \bar{k} + h^2 \left\{ \frac{\bar{k}''}{2} \left(A_1[s^2] - \frac{1}{4} \right) + \frac{(\bar{k}')^2}{\bar{k}} A_2[s] \right\} + O(h^3), \\ u_{\bar{x}} &= \bar{u}' + \frac{h^2}{24} \bar{u}''' + O(h^3), \\ \mu &= \left(\alpha_2 u' + \frac{1}{24} \overline{ku}''' + \frac{1}{8} qu' \right) h^2 + O(h^3) = \mu_1(\bar{x})h^2 + O(h^3), \end{aligned}$$

где

$$\alpha_2 = \frac{\bar{k}''}{2} \left(A_1[s^2] - \frac{1}{4} \right) + \frac{(\bar{k}')^2}{\bar{k}} A_2[s].$$

Отсюда следует, что

$$\psi = (h_{+1} - h)\mu_1(x) + O(h^2) + O(h_{+1}^2),$$

т. е. схема всегда имеет первый порядок аппроксимации, если сетка ω_N произвольна. При специальном выборе сетки, когда выполнено условие $h_{+1} - h = O(h^2)$, получаем $\psi = O(h^2)$.

4. Разностная функция Грина

Перейдем теперь к оценке решения задачи

$$\begin{aligned} \bar{L}z = (az_{\bar{x}})_{\bar{x}} - dz = -\psi, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0, \\ 0 < c_1 \leq a \leq c'_1, \quad 0 \leq d \leq c_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Нас будет интересовать случай, когда $\psi(x)$ имеет вид

$$\psi(x) = \mu_{\bar{x}} + \psi^*(x).$$

Для построения априорных оценок решения задачи (14), по аналогии с [1], используется разностная функция Грина.

Будем пользоваться следующими обозначениями для сумм и норм (см. [4]):

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h_i, \quad (y, v)^+ = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h_{i+1}, \quad (y, v)^* = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i \bar{h}_i,$$

$$(y, v] = \sum_{i=1}^N y_i v_i h_i, \quad \|y\|_0 = \max_i |y_i|,$$

$$\|y\|_\sigma = (1, |y|^\sigma)^{1/\sigma} \quad \text{или} \quad \|y\|_\sigma = (1, |y|^\sigma)^{+1/\sigma},$$

$$\|y_{\bar{x}}\|_\sigma = (1, |y_{\bar{x}}|^\sigma)^{1/\sigma}, \quad \sigma = 1, 2,$$

где $y = y(x)$, $v = v(x)$ — произвольные сеточные функции.

Приведем некоторые простейшие формулы (см. [4]):

1) формула суммирования по частям:

$$\begin{aligned} (y, v_{\bar{x}})^* = (y, v_x)^+ = -(v, y_{\bar{x}}) + \left. \frac{(-1)}{y} v \right|_{x=1} - y \left. \frac{(+1)}{v} \right|_{x=0} = \\ = -(v, y_{\bar{x}}] + yv \left. \right|_{x=1} - y \left. \frac{(+1)}{v} \right|_{x=0}; \end{aligned} \quad (24)$$

2) первая разностная формула Грина:

$$(y, (av_{\bar{x}})_{\bar{x}})^* = (y, (av_{\bar{x}})_x)^+ = -(a, y_{\bar{x}}v_{\bar{x}}] + ayv_{\bar{x}} \Big|_{x=1} - \overset{(+1)}{a} yv_x \Big|_{x=0}; \quad (25)$$

3) вторая разностная формула Грина:

$$(y, (av_{\bar{x}})_{\bar{x}})^* = (v, (ay_{\bar{x}})_{\bar{x}})^* + a(yv_{\bar{x}} - vy_{\bar{x}}) \Big|_{x=1} - \overset{(+1)}{a} (yv_x - vy_x) \Big|_{x=0} \quad (26)$$

или

$$(y, \bar{\Lambda}v)^* = (v, \bar{\Lambda}y)^* + a(yv_{\bar{x}} - vy_{\bar{x}}) \Big|_{x=1} - \overset{(+1)}{a} (yv_x - vy_x) \Big|_{x=0}. \quad (26')$$

Введем разностную функцию Грина $G(x, \xi)$ задачи (14) при помощи условий

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Lambda}G &= (a(x)G_{\bar{x}}(x, \xi))_{\bar{x}} - d(x)G(x, \xi) = -\frac{\delta(x, \xi)}{\bar{h}}, \\ G(0, \xi) &= 0, \quad G(1, \xi) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где $\delta(x, \xi) = 1$ при $x = \xi$, $\delta(x, \xi) = 0$ при $x \neq \xi$ (зависимость $G(x, \xi)$ от сетки явно не указывается). Полученное в [1] выражение

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\alpha(x)\beta(\xi)}{\alpha(1)} & \text{при } x \leq \xi, \\ \frac{\alpha(\xi)\beta(x)}{\alpha(1)} & \text{при } x \geq \xi \end{cases} \quad (28)$$

сохраняет силу и в случае неравномерной сетки, если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определить как решения следующих задач с начальными условиями:

$$\bar{\Lambda}\alpha = (a\alpha_{\bar{x}})_{\bar{x}} - d\alpha = 0, \quad \alpha(0) = 0, \quad \overset{(+1)}{a}\alpha_x \Big|_{x=0} = 1, \quad (29)$$

$$\bar{\Lambda}\beta = (a\beta_{\bar{x}})_{\bar{x}} - d\beta = 0, \quad \beta(1) = 0, \quad a\beta_{\bar{x}} \Big|_{x=1} = -1. \quad (30)$$

Полагая во второй формуле Грина $y = \alpha$, $v = \beta$, находим

$$\alpha(1) = \beta(0), \quad a(\beta\alpha_{\bar{x}} - \alpha\beta_{\bar{x}}) = \alpha(1) \quad \text{при } 0 < x \leq 1.$$

Из формулы (28) видно, что функция Грина симметрична:

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Положим в (26') $y(x) = G(x, \xi)$, $v(x) = z(x)$, где $z(x)$ — решение задачи (14). Обе функции удовлетворяют однородным граничным условиям, поэтому подстановки при $x = 0$ и $x = 1$ равны нулю. Учитывая уравнения (29), (30) и симметрию функции Грина, после замены x на ξ и ξ на x получим формулу

$$z(x) = (G(x, \xi), \psi(\xi))^* \quad \text{или} \quad z = (G, \psi)^*, \quad (31)$$

которая будет использована ниже для вывода априорных оценок решения задачи (14). Для этого нам понадобятся оценки функции Грина $G(x, \xi)$ и ее разностных производных $G_{\bar{x}}$, $G_{\bar{\xi}}$, $G_{\bar{x}\bar{\xi}}$.

Лемма 2. Для разностной функции Грина $G(x, \xi)$ задачи (14) и ее разностных производных $G_{\bar{x}}$, $G_{\bar{\xi}}$ справедливы оценки

$$0 \leq G(x, \xi) \leq M_1, \quad |G_{\bar{x}}(x, \xi)| \leq M_2, \quad |G_{\bar{\xi}}(x, \xi)| \leq M_2, \quad (32)$$

$$|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)| \leq M'_3 \quad \text{при} \quad \xi \neq x, \quad (33)$$

$$|hG_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, x)| \leq M''_3, \quad (|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)|, 1) \leq M_3,$$

где

$$M_1 = \frac{1}{c_1}, \quad M_2 = \frac{c_1 + c_2}{c_1^2}, \quad M'_3 = \frac{(c'_1 + c_2)(1 + c_2 c'_3)}{c_1^2},$$

$$c'_3 = \text{sh} \frac{\sqrt{c_2/c_1}}{\sqrt{c_1 c_2}}, \quad M''_3 = \frac{1 + c'_1 + c_2}{c_1}, \quad M_3 = M'_3 + M''_3.$$

Доказательство Оценки (32) получены в [1] для равномерной сетки. Пусть G^0 — функция Грина задачи (14) при $d = 0$. В этом случае

$$\alpha_i = \alpha_i^0 = \sum_{k=1}^i \frac{h_k}{a_k} \leq \frac{1}{c_1}, \quad \beta_i = \beta_i^0 = \sum_{k=i+1}^N \frac{h_k}{a_k} \leq \frac{1}{c_1}$$

и из (28) следует, что

$$G^0 \leq \frac{1}{c_1}, \quad |G_{\bar{\xi}}^0| \leq \frac{1}{c_1}, \quad |G_{\bar{x}}^0| \leq \frac{1}{c_1},$$

так как

$$\alpha^0(x) \leq \alpha^0(1) \leq \frac{1}{c_1}, \quad \beta^0(x) \leq \beta^0(0) \leq \frac{1}{c_1}.$$

Пользуясь затем неравенством $G \leq G^0$, а также формулами

$$G(x, \xi) = G^0(x, \xi) - (G^0(x, s), d(s), G(s, \xi))^*, \quad G_{\bar{x}} = G_{\bar{x}}^0 - (G_{\bar{x}}^0, dG)^*,$$

получаем (32). Для оценки $G_{\bar{x}\bar{\xi}}$ используется формула (28), а также оценки (см. [1]):

$$0 < \alpha(x) \leq \alpha(1) \quad \text{при} \quad 0 < x \leq 1,$$

$$0 < \beta(x) \leq \beta(0) = \alpha(1) \quad \text{при} \quad 0 \leq x < 1,$$

$$\frac{1}{c'_1} \leq \alpha(1) \leq c'_3 = \operatorname{sh} \frac{\sqrt{c_2/c_1}}{\sqrt{c_1 c_2}}, \quad \frac{\alpha_{\bar{x}}(x)}{\alpha(1)} \leq \frac{c'_1 + c_2}{c_1}.$$

Вычисления дают:

$$G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\alpha_{\bar{x}}(x)\beta_{\bar{\xi}}(\xi)}{\alpha(1)} & \text{при } x < \xi, \\ \frac{\alpha_{\bar{\xi}}(\xi)\beta_{\bar{x}}(x)}{\alpha(1)} & \text{при } x > \xi, \end{cases}$$

$$G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, x) = \frac{1}{a(x)h(x)} + \frac{\alpha(x)\beta_{\bar{x}}(x)}{\alpha(1)},$$

$$|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)| \leq \frac{(c'_1 + c_2)(1 + c_2 c'_3)}{c_1^2} = M'_3, \quad x \neq \xi,$$

$$h |G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, x)| \leq \frac{1 + h(c'_1 + c_2)}{c_1} \leq \frac{1 + c'_1 + c_2}{c_1} = M''_3,$$

$$(|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)|, 1) \leq M'_3 + M''_3 = M_3.$$

Лемма доказана.

5. Априорные оценки

Лемма 3. Если $\psi(x)$ имеет вид

$$\psi = \mu_{\hat{x}} + \psi^*, \tag{18}$$

то для решения задачи (14) справедливы оценки

$$\|z\|_0 \leq M_2(\|\mu\|_1 + \|\psi^*\|_3), \tag{34}$$

$$\|z\|_0 \leq M_1\|\psi^*\|_1 + M_2\|\mu\|_1, \tag{34'}$$

где

$$\|\psi^*\|_3 = \sum_{i=1}^{N-1} h_i \sum_{k=i}^{N-1} \psi_k^* \bar{h}_k, \quad \|\mu\|_1 = (1, |\mu|) = \sum_{i=1}^N |\mu_i| h_i.$$

Пользуясь формулой (31), находим

$$z = (G, \mu_{\bar{\xi}})^* + (G, \psi^*)^*. \quad (35)$$

Оценим каждое слагаемое отдельно. В силу (24) и (27) можно написать

$$(G, \mu_{\bar{\xi}})^* = (G, \mu_{\xi})^+ = -(G_{\bar{\xi}}, \mu],$$

так как подстановки при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ обращаются в нуль.

Учитывая затем (32), находим

$$|(G, \mu_{\bar{\xi}})^*| \leq M_2(1, |\mu|) = M_2 \|\mu\|_1. \quad (36)$$

Вводя функцию $\eta(x)$ при помощи условий

$$\eta_{\bar{\xi}} = \psi^*, \quad \eta_N = \eta(1) = 0,$$

найдем

$$(G, \psi^*)^* = (G, \eta_{\xi})^+ = -(G_{\bar{\xi}}(x, \xi), \eta(\xi))$$

и, следовательно,

$$|(G, \psi^*)^*| \leq M_2(1, |\eta|) \leq M_2 \|\eta\|_1 = M_2 \|\psi^*\|_3, \quad (37)$$

где

$$\eta(x) = \eta_i = - \sum_{k=i}^{N-1} \psi_k^* \bar{h}_k.$$

Из (35), (37) непосредственно следует оценка (34).

Лемма 4. Если $\psi = \mu_{\bar{x}} + \psi^$, то для разностной производной $z_{\bar{x}}$ решения задачи (14) справедливы оценки*

$$\|z_{\bar{x}}\|_0 \leq M_3 \|\mu\|_0 + M_2 \|\psi^*\|_1, \quad (38)$$

$$\|z_{\bar{x}}\|_1 \leq M_2(\|\mu\|_1 + \|\psi^*\|_3), \quad \|z_{\bar{x}}\|_2 \leq M_2(\|\mu\|_2 + \|\eta\|_2). \quad (39)$$

Учитывая полученное выше выражение

$$z = - (G_{\bar{\xi}}(x, \xi), \mu(\xi)) + (G, \psi^*)^*,$$

найдем

$$z_{\bar{x}} = - (G_{\bar{x}\bar{\xi}}, \mu) + (G_{\bar{x}}, \psi^*)^* = - (G_{\bar{x}\bar{\xi}}, \tilde{\mu}) = - (G_{\bar{x}\bar{\xi}}, \tilde{\mu})' - h G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, x) \tilde{\mu}(x),$$

где $\tilde{\mu} = \mu + \eta$, а штрих означает, что суммирование ведется по всем $\xi \neq x$. Пользуясь теперь оценками (33), получим

$$\begin{aligned} |z_{\bar{x}}(x)| &\leq M'_3 \|\mu\|_1 + M''_3 |\mu(x)| + M_2 \|\psi^*\|_1, \\ |z_{\bar{x}}(x)| &\leq M'_3 (\|\mu\|_1 + \|\eta\|_1) + M''_3 (|\mu(x)| + |\eta(x)|), \\ \|z_{\bar{x}}\|_0 &\leq M'_3 \|\mu\|_1 + M''_3 \|\mu\|_0 + M_2 \|\psi^*\|_1 \leq M_3 \|\mu\|_0 + M_2 \|\psi^*\|_1, \end{aligned} \quad (40)$$

так как $\|\mu\|_1 \leq \|\mu\|_0$. Вторая оценка (39) сразу следует из (40), если учесть, что

$$(1, |\mu|) = \|\mu\|_1, \quad (1, |\eta|) = (1, |\eta|) = \|\psi^*\|_3.$$

Лемма 5. Пусть $z = z(x)$ — решение задачи (14), причем $\psi(x)$ имеет вид

$$\psi(x) = \mu_{\bar{x}} + \psi^*(x)$$

во всех точках сетки ω_N , кроме точек $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$. Тогда для $z = z(x)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|z\|_0 &\leq M_2 \|\mu\|'_1 + M_1 (|\mu_n| + |\mu_{n+2}|) + \\ &+ M_1 (\|\psi^*\|'_1 + |\hbar_n \psi_n + \hbar_{n+1} \psi_{n+1}|) + M_2 h_{n+1} \hbar_n |\psi_n|, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$M_1 = \frac{1}{c_1}, \quad M_2 = \frac{c_1 + c_2}{c_1^2},$$

$$\|\mu\|'_1 = \sum_{i=1}^n |\mu_i| h_i + \sum_{i=n+2}^N |\mu_i| h_i,$$

$$\|\psi^*\|'_1 = \sum_{i=1}^{n-1} |\psi_i^*| \hbar_i + \sum_{i=n+2}^{N-1} |\psi_i^*| \hbar_i.$$

Пользуясь формулой (31), представим $z(x)$ в виде

$$z(x) = (G(x, \xi), \psi(\xi))^* = (G(x, \xi), \mu_{\hat{\xi}}(\xi) + \psi^*(\xi))^{**} + \bar{z}(x),$$

где

$$\bar{z}(x) = G(x, x_n)\psi_n\hbar_n + G(x, x_{n+1})\psi_{n+1}\hbar_{n+1},$$

а $(G, \mu_{\hat{\xi}} + \psi^*)^{**}$ означает сумму по

$$\xi = x_1, \dots, x_{n-1}, \quad x_{n+2}, \dots, x_{N-1} \quad (\xi \neq x_n, x_{n+1}).$$

Преобразуем сначала $\bar{z}(x)$:

$$\bar{z}(x) = G(x, x_{n+1})(\hbar_n\psi_n + \hbar_{n+1}\psi_{n+1}) - G_{\bar{\xi}}(x, x_{n+1})\hbar_{n+1}\hbar_n\psi_n,$$

и воспользуемся леммой 2; тогда получим оценку

$$\|\bar{z}\|_0 \leq M_1|\hbar_n\psi_n + \hbar_{n+1}\psi_{n+1}| + M_2\hbar_{n+1}\hbar_n|\psi_n|. \quad (42)$$

Формула суммирования по частям (24) дает

$$(G, \mu_{\hat{\xi}})^{**} = - \sum_{k=1}^n G_{\bar{\xi}}(x, x_k)\mu_k\hbar_k - \\ - \sum_{k=n+2}^N G_{\bar{\xi}}(x, x_k)\mu_k\hbar_k + G(x, x_n)\mu_n - G(x, x_{n+1})\mu_{n+2},$$

так что

$$|(G, \mu_{\hat{\xi}})^{**}| \leq M_2\|\mu\|'_1 + M_1(|\mu_n| + |\mu_{n+2}|). \quad (43)$$

Учитывая (42), (43), а также неравенство

$$|(G, \psi^*)^{**}| \leq M_1\|\psi^*\|''_1,$$

приходим к оценке (41).

Лемма 5 используется при оценке порядка точности в классе разрывных коэффициентов (см. § 2, п. 3).

Аналогичные априорные оценки получаются и для третьей краевой задачи

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}z &= (az_{\bar{x}})_{\bar{x}} - dz = -\psi, \\ \left. \begin{aligned} l_1z &= \overset{(+1)}{a} z_x - \sigma_1 z = -\nu_1 && \text{при } x = 0, \\ l_2z &= az_{\bar{x}} + \sigma_2 z = \nu_2 && \text{при } x = 1, \\ 0 < c_1 \leq a \leq c'_1, \quad 0 \leq d \leq c_2, \\ \sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geq c_3 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (44) \end{aligned}$$

В этом случае функция Грина задачи (44), определяемая как решение уравнения (14), удовлетворяющее краевым условиям $l_1G = 0$, $l_2G = 0$, имеет вид

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\alpha(x)\beta(\xi)}{\Delta} & \text{при } x \leq \xi, \\ \frac{\alpha(\xi)\beta(x)}{\Delta} & \text{при } x \geq \xi. \end{cases} \quad (45)$$

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определяются условиями

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}\alpha &= 0, \quad \overset{(+1)}{a} \alpha_x = 1, && l_1\alpha = 0 \quad \text{при } x = 0, \\ \bar{\Delta}\beta &= 0, \quad a\beta_{\bar{x}} = -1, && l_2\beta = 0 \quad \text{при } x = 1. \end{aligned}$$

Выражение для $\Delta = a(\beta\alpha_{\bar{x}} - \alpha\beta_{\bar{x}})$ находится при помощи формулы Грина (26') (см. [4]):

$$\Delta = \alpha(1) + \frac{1}{\sigma_2}(1 + (d, \beta)^*) = \beta(0) + \frac{1}{\sigma_1}(1 + (d, \alpha)^*),$$

причем $\alpha(x) > 0$, $\beta(x) > 0$. Если, например, $\sigma_1 = 0$, то $\alpha(x)$ определим из условий $\alpha(0) = 1$, $\alpha_x(0) = 0$. В этом случае

$$\Delta = 1 + (\alpha, \beta)^* = \alpha(1) + \frac{1}{\sigma_2}(1 + (d, \alpha)^*).$$

Решение задачи (44) можно представить в виде

$$z(x) = (G(x, \xi), \psi(\xi))^* + G(x, 0)\nu_1 + G(x, 1)\nu_2.$$

Для функции Грина G и ее разностных производных справедливы оценки

$$0 < G \leq M_1, \quad |G_{\bar{x}}| \leq M_2, \quad |G_{\bar{\xi}}| \leq M_2,$$

$$|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)| \leq M'_3 \quad \text{при } x \neq \xi,$$

$$|hG_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, x)| \leq M''_3, \quad (|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)|, 1) \leq M_3 = M'_3 + M''_3,$$

где M_1, M_2, M'_3, M''_3 — положительные постоянные, зависящие от c_1, c_2, c_3 и c'_1 . Лемма 3 обобщается на случай третьей краевой задачи (44).

Лемма 6. Если $\psi = \mu_{\bar{x}} + \psi^*$, то для решения задачи (44) справедливы априорные оценки

$$\|z\|_0 \leq M_2(\|\mu\|_1 + \|\psi^*\|_4) + M_1(|\nu_1| + |\nu_2| + |\mu(x_1)| + |\mu(1)|), \quad (46)$$

где

$$\|\psi^*\|_4 = \|\psi^*\|_3 + |(\psi^*, 1)^*|, \quad \|\psi^*\|_3 = \|\eta\|_1, \quad \eta_i = \sum_{k=i}^{N-1} \psi_k^* \bar{h}_k.$$

Доказательство этой леммы проводится по аналогии с доказательством леммы 3. Аналогично обобщаются на случай третьей краевой задачи леммы 4 и 5.

§ 2. О точности однородных разностных схем на неравномерных сетках

1. О точности в классе гладких коэффициентов

Используя представление (18) для $\psi(x)$ (лемма 1), а также лемму 2, нетрудно убедиться в том, что справедлива

Теорема 1. Пусть $\Delta y = (ay_{\bar{x}})_{\bar{x}} - dy + \varphi$ — любая однородная схема из исходного семейства. Если $k, q, f \in C^{(1,1)}[0, 1]$, то схема Δy имеет второй порядок точности на любой последовательности неравномерных сеток, точнее,

$$\|y - u\|_0 \leq M \bar{h}^2, \quad (47)$$

где y — решение разностной задачи (13), $u = u(x)$ — решение задачи (5), M — постоянная, не зависящая от сетки,

$$\bar{h} = \|h\|_2 = (1, h^2)^{1/2} \quad (48)$$

есть средний квадратичный шаг сетки.

Для доказательства теоремы надо оценить разность $z = y - u$, которая определяется из условий (14):

$$(az_{\bar{x}})_{\bar{x}} - dz = -\psi, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0, \quad 0 < c_1 \leq a, \quad 0 \leq d \leq c_2.$$

В силу леммы 1

$$\psi = \mu_{\bar{x}} + \psi^*, \quad \text{где} \quad \mu = O(h^2), \quad \psi^* = O(h^2) + O(h_{+1}^2). \quad (18)$$

Воспользуемся теперь оценкой (34) леммы 3:

$$\|z_0\| \leq M_2(\|\mu\|_1 + \|\psi^*\|_3).$$

Учитывая затем, что

$$\|\mu\|_1 = O(h^2), \quad \|\psi^*\|_3 \leq \|\psi^*\|_1 = O(\bar{h}^2),$$

получим $\|z\|_0 \leq M\bar{h}^2$.

Для практических целей часто оказывается важной не только точность, с которой определяется решение задачи (5), но и точность определения потока ku' , разностное выражение которого имеет вид $ay_{\bar{x}}$. Найдем теперь оценку для порядка точности, с которой определяется поток на неравномерной сетке при помощи рассматриваемых однородных разностных схем. Нас будет интересовать погрешность

$$v = ay_{\bar{x}} - \overline{ku'} = az_{\bar{x}} + \mu^*,$$

где $\mu^* = au_{\bar{x}} - \overline{ku'}$ — погрешность аппроксимации потока. Отсюда видно, что

$$\|v\|_0 \leq \|a\|_0 \|z_{\bar{x}}\|_0 + \|\mu^*\|_0, \quad \|v\|_1 \leq \|a\|_0 \|z_{\bar{x}}\|_1 + \|\mu^*\|_1,$$

т. е. оценка v сводится к оценке $\|z_{\bar{x}}\|$, так как, в силу леммы 1, $\mu^* = O(h^2)$ и, следовательно,

$$\|\mu^*\|_0 \leq M\|h\|_0^2, \quad \|\mu^*\|_1 \leq M\bar{h}^2,$$

где $\bar{h} = \|h\|_2$. В силу леммы 4

$$\begin{aligned} \|z_{\bar{x}}\|_0 &\leq M_3(\|\mu\|_0 + \|\psi^*\|_1) \leq M\|h\|_0^2, \\ \|z_{\bar{x}}\|_1 &\leq M_3(\|\mu\|_1 + \|\psi^*\|_3) \leq M\|h\|_2^2, \quad \|z_{\bar{x}}\|_2 \leq M\|h\|_2^2. \end{aligned} \quad (49)$$

В результате мы получаем для потока следующие оценки:

$$\|ay_{\bar{x}} - \overline{ku'}\|_0 \leq M\|h\|_0^2, \quad (50)$$

$$\|ay_{\bar{x}} - \overline{ku'}\|_1 \leq M\|h\|_2^2. \quad (51)$$

Из неравенства (50) видно, что схема (13) дает второй порядок точности и для потока, однако равномерная оценка для ошибки в определении потока содержит максимальное значение шага сетки, т. е. $\|h\|_0$, а не $\|h\|_2 = \bar{h}$, как это имеет место для ошибки в определении самой функции. Поэтому хорошую точность для потока можно получить не на любой последовательности неравномерных сеток. Для определения же решения пригодны любые сетки, у которых средний квадратичный шаг $\bar{h} = \|h\|_2$ достаточно мал. Иногда требуется высокая точность для потока лишь в отдельных фиксированных точках (например, на границах областей с различными физическими параметрами). В этом случае оценки для потоков могут быть уточнены. Опуская рассуждения, основанные на использовании лемм 1, 2 и 4, а также оценки (33), приведем лишь оценку для $|z_{\bar{x}}|$ в некоторой фиксированной точке $x^* = x_{i_0}$ сетки:

$$|(ay_{\bar{x}} - \overline{ku'})_{i_0}| \leq Mh_{i_0}^2 + M\bar{h}^2. \quad (52)$$

Выбирая сетку так, чтобы точка x^* была узловой точкой сетки ($x^* = x_{i_0}$), а $h_{i_0} = O(\bar{h})$, получим $|v(x^*)| \leq M\bar{h}^2$, где $v = ay_{\bar{x}} - \overline{ku'}$.

2. Третья краевая задача

Рассмотрим теперь третью краевую задачу

$$\left. \begin{aligned} L^{(k,q,f)}u &= (ku')' - qu + f = 0, \quad 0 < x < 1, \\ k(0)u'(0) - \sigma_1 u(0) &= u_1 \quad k(1)u'(1) + \sigma_2 u(1) = u_1, \\ k(x) &\geq c_1 > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geq c_3 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Соответствующая разностная задача ставится так:

$$\left. \begin{aligned} Ay &= (ay_{\bar{y}})_{\bar{x}} - dy + \varphi = 0, \quad 0 < x_i < 1, \\ {}^{(+1)}_a y_x - \bar{\sigma}_1 y &= \bar{u}_1 \quad \text{при } x = 0, \quad ay_{\bar{x}} + \bar{\sigma}_2 y = \bar{u}_2 \quad \text{при } x = 1, \\ \bar{\sigma}_1 &= \sigma_1 + 0,5h_1q(0), \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 + 0,5h_Nq(1), \\ \bar{u}_1 &= u_1 + 0,5h_1f(0), \quad \bar{u}_2 = u_2 + 0,5h_Nf(1). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Разностные краевые условия (54) имеют второй порядок аппроксимации

$$\nu_1 = {}^{(+1)}_a u_x - k(0)u'(0) + 0,5h_1(q(0)u(0) - f(0)) = O(h_1^2),$$

$$\nu_2 = au_{\bar{x}} - k(1)u'(1) - 0,5h_N(q(1)u(1) - f(1)) = O(h_N^2)$$

на решении $u = u(x)$ дифференциального уравнения.

Пусть $u(x)$ — решение задачи (53), а y — решение задачи (54). Тогда для их разности $z = y - u$ получим условия

$$\left. \begin{aligned} (az_{\bar{x}})_{\bar{x}} - dz &= -\psi, \\ {}^{(+1)}_a z_x - \bar{\sigma}_1 z &= -\nu_1 \quad \text{при } x = 0, \\ az_{\bar{x}} + \bar{\sigma}_2 z &= \nu_2 \quad \text{при } x = 1. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Здесь $\psi = \Lambda u - L^{(k,q,f)}u$ — погрешность аппроксимации схемы Λu , вычисленная в п. 4 § 1, а ν_1 и ν_2 — погрешности аппроксимации краевых условий. Для оценки z следует воспользоваться леммами 1 и 6. Повторяя затем рассуждения, проведенные в п. 1 при доказательстве теоремы 1, убеждаемся в том, что справедлива

Т е о р е м а 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то разностная задача (54) имеет второй порядок точности на любой последовательности сеток, точнее,*

$$\|y - u\|_0 \leq M \|h\|_2^2, \quad (56)$$

где

$$\|h\|_{\bar{2}} = \|h\|_2 + h_1 + h_N.$$

В этом случае в оценку для погрешности $z = y - u$ входят не только средний квадратичный шаг сетки $\bar{h} = \|h\|_2$, но и шаги h_1 и h_N вблизи границы. Отсюда следует, что для решения третьей краевой задачи (54) справедлива оценка

$$\|y - u\|_0 \leq M \|h\|_2^2 = M \bar{h}^2, \quad (57)$$

если

$$h_1 = O(\bar{h}), \quad h_N = O(\bar{h}),$$

т. е. порядок малости h_1 и h_N не ниже, чем \bar{h} (для первой краевой задачи оценка (57) верна, если даже

$$h_1 = O(\bar{h}^{2/3}), \quad h_N = O(\bar{h}^{2/3}).$$

3. Погрешность аппроксимации в окрестности точки разрыва коэффициентов

Вычислим погрешность аппроксимации

$$\psi = \Lambda u - L^{(k,q,f)}u$$

на неравномерной сетке в окрестности точки разрыва коэффициентов k, q, f дифференциального уравнения. Будем предполагать, что $k, q, f \in Q^{(1,1)}$. Пусть

$$\xi = x_n + \theta h_{n+1} \quad (0 \leq \theta \leq 1, \quad h_{n+1} = x_{n+1} - x_n)$$

— точка интервала $0 < x < 1$, в которой коэффициент $k(x)$ (а также $q(x)$ и $f(x)$) имеет разрыв I рода. Обозначим через

$$k_{\text{л}} = k(\xi - 0), \quad k_{\text{п}} = k(\xi + 0)$$

предельные значения $k(x)$ слева и справа в точке $x = \xi$. В этой точке решение $u = u(x)$ дифференциального уравнения

$$L^{(k,q,f)}u = 0$$

удовлетворяет условиям сопряжения

$$[u] = 0, \quad [ku'] = (ku')_{\text{п}} - (ku')_{\text{л}} = 0.$$

Будем предполагать для упрощения записи, что имеется только одна точка $x = \xi$, в которой разрывны k, q, f . Так как схема трехточечная, то во всех точках сетки, кроме $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$, функцию $\psi(x)$ можно, согласно лемме 2, представить в виде

$$\psi = \mu_{\hat{x}} + \psi^*,$$

$$\mu = au_{\bar{x}} - \overline{ku'} + \frac{1}{8} h^2 qu' \quad \text{при } x \neq x_n, \quad x \neq x_{n+1}, \quad (58)$$

$$\mu = O(h^2), \quad \psi^* = O(h^2) + O(h_{+1}^2).$$

Вычислим $\psi(x)$ при $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$. Представим ψ в виде суммы

$$\psi = \psi_a + \psi_d,$$

где

$$\psi_a = (au_{\bar{x}})_{\hat{x}} - (ku')', \quad \psi_d = -(d - q)u + \varphi - f.$$

Разлагая $k(x)$ и $u(x)$ в окрестности точки $x = \xi$, находим

$$a_n = a(x_n) = k_{\pi} - (0,5h_n + \theta h_{n+1})k'_{\pi} + O(h_n^2) + O(h_{n+1}^2),$$

$$a_{n+2} = k_{\pi} + (0,5h_{n+2} + (1 - \theta)h_{n+1})k'_{\pi} + O(h_{n+1}^2) + O(h_{n+2}^2),$$

$$u_{\bar{x},n} = u'_{\pi} - (0,5h_n + \theta h_{n+1})u''_{\pi} + 0,5(0,5h_n + \theta h_{n+1})^2 u'''_{\pi} + \\ + O(h_n^3) + O(h_{n+1}^3),$$

$$u_{x,n} = u'_{\pi} + (0,5h_{n+2} + (1 - \theta)h_{n+1})u''_{\pi} + 0,5(0,5h_{n+2} + \\ + (1 - \theta)h_{n+1})^2 u'''_{\pi} + O(h_{n+1}^3) + O(h_{n+2}^3),$$

$$u_{\bar{x},n+1} = u_{x,n} = \theta u'_{\pi} + (1 - \theta)u'_{\pi} + O(h_n) + O(h_{n+1}) = \\ = w \left(\frac{\theta}{k_{\pi}} + \frac{1 - \theta}{k_{\pi}} \right) + O(h_n) + O(h_{n+1}), \quad w = k_{\pi} u'_{\pi} = k_{\pi} u'_{\pi}.$$

Пользуясь этими выражениями, получим

$$\hbar_n \psi_{a,n} = \hbar_n \psi_a(x_n) = w \left[a_{n+1} \left(\frac{\theta}{k_{\pi}} + \frac{1 - \theta}{k_{\pi}} \right) - 1 \right] + a_{n+1} \frac{h_{n+1}}{2} \times \\ \times [(1 - \theta)^2 u''_{\pi} - \theta^2 u''_{\pi}] - (0,5 - \theta)h_{n+1}(ku')'_{\pi} + O(h_n^2) + O(h_{n+1}^2), \quad (59)$$

$$\hbar_n \psi_{a,n} + \hbar_{n+1} \psi_{a,n+1} = \\ (0,5 - \theta)[(ku')'_{\pi} - (ku')'_{\pi}] + O(h_n^2) + O(h_{n+1}^2) + O(h_{n+2}^2).$$

Рассмотрим теперь слагаемое

$$\psi_d = -(d - q)u + \varphi - f.$$

Если $D[\bar{q}(s)]$, $F[\bar{f}(s)]$ — произвольные функционалы из определенного в § 1 п. 1, семейства, то

$$\psi_{d,n} = O(1), \quad \psi_{d,n+1} = O(1).$$

Таким образом, для произвольной схемы из исходного семейства должны выполняться условия

$$\left. \begin{aligned} \hbar_n \psi_n &= O(1), \quad \hbar_{n+1} \psi_{n+1} = O(1), \\ \hbar_n \psi_n + \hbar_{n+1} \psi_{n+1} &= O(h_n) + O(h_{n+1}) + O(h_{n+2}), \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

аналогичным условиям, которые были получены в [1] для равномерной сетки.

Особую роль в нашей работе будет играть схема с шаблонными функционалами

$$A[\bar{k}(s)] = \left[\int_{-1}^0 \frac{ds}{\bar{k}(s)} \right]^{-1}, \quad D[\bar{f}(s)] = F[\bar{f}(s)] = \int_{-0,5}^{0,5} \bar{f}(s) ds, \quad (61)$$

для которой

$$a_i = \left[\frac{1}{\hbar_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1}, \quad d_i = \frac{1}{\hbar_i} \int_{x_i-0,5\hbar_i}^{x_i+0,5\hbar_i} q(x) dx, \quad \varphi_i = \frac{1}{\hbar_i} \int_{x_i-0,5\hbar_i}^{x_i+0,5\hbar_i} f(x) dx.$$

В этом случае вычисления дают:

$$a_{n+1} = \left(\frac{\theta}{k_{\text{л}}} + \frac{1-\theta}{k_{\text{п}}} \right)^{-1} + O(\hbar_{n+1}),$$

$$\hbar_n(d_n - q_n)u_n = (0,5 - \theta)(q_{\text{п}} - q_{\text{л}})u(\xi) + O(\hbar_n) + O(\hbar_{n+1}),$$

$$\hbar_{n+1}(d_{n+1} - q_{n+1})u_{n+1} = O(\hbar_{n+1}^3) + O(\hbar_{n+2}^3) \quad \text{при } \theta < 0,5,$$

$$\hbar_n(d_n - q_n)u_n = O(\hbar_n^3) + O(\hbar_{n+1}^3),$$

$$\hbar_{n+1}(d_{n+1} - q_{n+1})u_{n+1} =$$

$$= (0,5 - \theta)(q_{\text{п}} - q_{\text{л}})u(\xi) + O(\hbar_{n+1}) + O(\hbar_{n+2}) \quad \text{при } \theta > 0,5.$$

Аналогичные выражения получаются для $\hbar_n(\varphi_n - f_n)$, $\hbar_{n+1}(\varphi_{n+1} - f_{n+1})$. Отсюда и из (59) следует, что

$$\hbar_n\psi_n = O(\hbar_n) + O(\hbar_{n+1}), \quad \hbar_{n+1}\psi_{n+1} = O(\hbar_{n+1}) + O(\hbar_{n+2}). \quad (62)$$

Вместо (60) получим

$$\begin{aligned} \hbar_n\psi_n + \hbar_{n+1}\psi_{n+1} &= (0,5 - \theta)\hbar_{n+1} \left[(L^{(k,q,f)}u)_{\text{п}} - L^{(k,q,f)}u_{\text{л}} \right] + \\ &+ O(\hbar_n^2) + O(\hbar_{n+1}^2) + O(\hbar_{n+2}^2), \end{aligned}$$

т. е.

$$\hbar_n\psi_n + \hbar_{n+1}\psi_{n+1} = O(\hbar_n^2) + O(\hbar_{n+1}^2) + O(\hbar_{n+2}^2). \quad (62')$$

4. О точности в классе разрывных коэффициентов

Перейдем теперь к выяснению порядка точности наших однородных разностных схем в классе разрывных коэффициентов на произвольной последовательности неравномерных сеток ω_N . Будем предполагать, что $k(x), q(x), f(x) \in Q^{(1,1)}[0, 1]$. Достаточно рассмотреть случай одного разрыва в точке $\xi = x_n + \theta h_{n+1}$, $0 \leq \theta \leq 1$. В силу п. 3 § 2 и леммы 1, имеем

$$\begin{aligned} \psi &= \mu_{\bar{x}} + \psi^*, \quad \psi^* = O(h^2) + O(h_{n+1}^2) \quad \text{при } x \neq x_n, \quad x \neq x_{n+1}, \\ \mu &= a u_{\bar{x}} - \overline{ku'} + \frac{h^2}{8} qu' = O(h^2) \quad \text{при } x \neq x_{n+1}. \end{aligned}$$

Лемма 5 дает:

$$\|z\|_0 \leq M(\bar{h}^2 + h_n^2 + h_{n+2}^2) + M_1 |\bar{h}_n \psi_n + \bar{h}_{n+1} \psi_{n+1}| + M_2 h_{n+1} \bar{h}_n |\psi_n|, \quad (63)$$

где $z = y - u$ — решение задачи (14). Отсюда и из (62) следует, что для любой схемы из исходного семейства справедлива оценка

$$\|z\|_0 \leq M(\bar{h}^2 + h_n + h_{n+1} + h_{n+2}), \quad (64)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от сетки.

Для схемы (61), согласно (62)–(62'), справедливы оценки

$$|\bar{h}_n \psi_n + \bar{h}_{n+1} \psi_{n+1}| + h_{n+1} \bar{h}_n |\psi_n| \leq M(h_n^2 + h_{n+1}^2 + h_{n+2}^2), \quad (65)$$

$$\|z\|_0 \leq M\bar{h}^2 + M(h_n^2 + h_{n+1}^2 + h_{n+2}^2).$$

Если k, q, f имеют разрывы I рода в точках

$$\xi_j = x_{n_j} + h_{n_j+1} \theta_j, \quad 0 \leq \theta_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, j_0,$$

то вместо (63) и (64) получим

$$\|z\|_0 \leq M\bar{h}^2 + M' \sum_{j=1}^{j_0} (h_{n_j}^{\varkappa} + h_{n_j+1}^{\varkappa} + h_{n_j+2}^{\varkappa}),$$

где $\varkappa = 2$ для схемы (61), $\varkappa = 1$ для всего семейства схем.

Тем самым доказана следующая

Теорема 3. *Однородная разностная схема (13) равномерно сходится в классе разрывных коэффициентов на любой последовательности неравномерных сеток ω_N . Если $k, q, f \in Q^{(1,1)}[0, 1]$, то имеет место следующая оценка:*

$$\|y - u\|_0 \leq M \bar{h}^2 + M' \sum_{j=1}^{j_0} (h_{n_j}^x + h_{n_{j+1}}^x + h_{n_{j+2}}^x), \quad (66)$$

где y — решение задачи (13), u — решение исходной задачи (5), M и M' — положительные постоянные, не зависящие от сеток, j_0 — число всех точек $\xi_j = x_{n_j} + \theta_j h_{n_{j+1}}$ интервала $0 < x < 1$, в которых разрывен по крайней мере один из коэффициентов $k(x), q(x), f(x)$, $\kappa = 2$ для схемы (61), $\kappa = 1$ для всего исходного семейства однородных разностных схем.

Замечание 1. В отличие от случая гладких коэффициентов погрешность $z = y - u$ зависит не только от среднего квадратичного шага $\bar{h} = \|h\|_2$, являющегося интегральной характеристикой сетки, но и от шагов сетки в окрестности точки разрыва $\xi_j = x_{n_j} + \theta_j h_{n_{j+1}}$ коэффициентов дифференциального уравнения. Отсюда следует, в частности, что если заранее известно положение точек ξ_j разрыва фиксированных $k(x), q(x)$ и $f(x)$, то, выбирая более мелкую сетку в окрестности точек ξ_j , можно повысить порядок точности схемы. Так, например, выбирая

$$h_{n_j} = O(\bar{h}^2), \quad h_{n_{j+1}} = O(\bar{h}^2), \quad h_{n_{j+2}} = O(\bar{h}^2),$$

мы получим

$$\|y - u\|_0 \leq M \bar{h}^2, \quad \bar{h}^2 = \|h\|_2^2,$$

т. е. на таких сетках любая исходная схема будет иметь второй порядок точности.

Замечание 2. Если точка разрыва $\xi_j = x_{n_j}$ является узловой точкой сетки ($\theta_j = 0$), то нетрудно показать, что

$$\bar{h}_{n_j} \psi_{n_j} = O(h_{n_j}^2) + O(h_{n_{j+1}}^2), \quad \bar{h}_{n_{j+1}} \psi_{n_{j+1}} = O(h_{n_{j+1}}^2) + O(h_{n_{j+2}}^2).$$

В этом случае вместо (66), очевидно, получим

$$\|y - u\|_0 \leq M \bar{h}^2 + M' \sum_{j=1}^{j_0} (h_{n_j}^2 + h_{n_{j+1}}^2), \quad (67)$$

т. е. любая исходная схема имеет второй порядок точности на такой последовательности сеток, для которой точки разрыва фиксированных коэффициентов k, q, f являются узловыми точками. Если k, q, f известны, то, очевидно, всегда можно изменить сетку вблизи точек разрыва ξ_j и добиться того, что все ξ_j будут являться узловыми точками сетки. Полученные таким образом сетки уже не являются произвольными, а зависят от конкретных функций k, q, f . Такие сетки целесообразно употреблять на практике в тех случаях, когда положение разрывов коэффициентов дифференциального уравнения заранее известно. Следует подчеркнуть, что мы до сих пор проводили исследования для всего класса разрывных коэффициентов и для любых последовательностей сеток ω_N , получающихся при произвольном разбиении отрезка $0 \leq x \leq 1$ на N частей точками $x_0 = 0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_N = 1$.

5. Однородные разностные схемы второго типа

Однородные разностные схемы, рассматривавшиеся выше, можно получить при помощи интегро-интерполяционного метода (см. [1]), если написать уравнение баланса для интервала ($\bar{x}_{i-1} \leq x \leq \bar{x}_i = 0,5(x_i + x_{i+1})$). Если же написать уравнение баланса для ($x_i \leq x \leq x_{i+1}$) и относить значения функции y к точке \bar{x}_i , полагая $\bar{y}_i = y(\bar{x}_i)$, то можно получить однородные разностные схемы второго типа

$$\Lambda \bar{y} = (a \bar{y}_{\bar{x}})_x - d \bar{y} + \varphi = 0, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2, \quad (68)$$

где

$$\bar{y}_{\bar{x}} = (\bar{y} - \bar{y}^{-1}) \bar{h}, \quad \bar{h} = 0,5(h + h_{+1}), \quad h = h_i = x_i - x_{i-1},$$

$$(a \bar{y}_{\bar{x}})_{x,i} = \frac{1}{h_{i+1}} \left[a_{i+1} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{\bar{h}_{i+1}} - a_i \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}}{\bar{h}_i} \right].$$

Значения функции \bar{y} относятся к точкам $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{N-1}$, т. е. имеется N внутренних точек, а не $N - 1$.

Коэффициенты a, d, φ определяются при помощи тех же шаблонных функционалов A, D и F , что и в п. 1 § 1, по формулам

$$a = A[k(\bar{x} + s\bar{h})], \quad d = D[q(\bar{x} + sh_{+1})], \quad \varphi = F[f(\bar{x} + sh_{+1})] \quad (\bar{x} = x + 0,5h_{+1}).$$

Уравнения (68) в точках $\bar{x}_0 = 0,5h_1, \bar{x}_{N-1} = x_N - 0,5h_N$ получаются, если формально положить

$$h_0 = h_{N+1} = 0, \quad \bar{y}_N = y(1), \quad \bar{y}_{-1} = y(0), \quad \text{так что } \bar{h}_0 = 0,5h_1, \quad \bar{h}_N = 0,5h_N.$$

Полагая $\bar{y} = z + u(\bar{x})$, получим для z условия

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}z &= (az_{\bar{x}})_x - dz = -\psi, \quad z(0) = z(1) = 0, \\ (0 < c_1 \leq a \leq c'_1, \quad 0 \leq d \leq c_2),\end{aligned}\tag{69}$$

где $\psi = \Lambda\bar{u} - (L^{(k,q,f)}u)_{x=\bar{x}}$ — погрешность аппроксимации схемы (68).

Предположим, что $k, q, f \in C^{(1,1)}$ и, следовательно, $u(x) \in C^{(3,1)}$; рассуждая по аналогии с п. 3 § 1 и учитывая, что

$$(\overline{ku'})' = (ku')_x + O(h_{+1}^2), \quad d = \bar{q} + O(h_{+1}^2), \quad \varphi = \bar{f} + O(h_{+1}^2),$$

найдем

$$\begin{aligned}\psi &= \mu_x + \psi^*, \quad \mu = au_{\bar{x}} - ku', \\ \psi^* &= O(h^2) + O(h_{+1}^2) + O(h_{+2}^2).\end{aligned}\tag{70}$$

Из разложений

$$\begin{aligned}u_{\bar{x}} &= u' + \frac{1}{4}(h_{+1} - h)u'' + O(h^2) + O(h_{+1}^2), \\ a &= k + \frac{1}{4}(h_{+1} - h)k' + O(h^2) + O(h_{+1}^2)\end{aligned}$$

следует

$$\begin{aligned}\mu &= \eta_{\bar{x}} + \mu^*, \quad \eta = \frac{1}{8}h_{+1}^{(+)2}(ku')' = \frac{1}{8}h_{+1}^{(+)2}(qu - f), \\ \mu^* &= O(h^2) + O(h_{+1}^2).\end{aligned}\tag{71}$$

Таким образом, формула (70) принимает вид

$$\psi = \mu_x^* + \psi^* + \eta_{\bar{x}},\tag{72}$$

где μ^*, η и ψ^* — второго порядка относительно $\|h\|_0 = \max_{(i)} h_i$.

Решение задачи (69) дается формулой

$$\begin{aligned}z(x) &= (G(x, \xi), \psi(\xi))^+ = \bar{z} + v, \quad \bar{z} = (G, \mu_x^* + \psi^*)^+, \quad v = (G, \eta_{\xi\xi})^+, \\ \left((y, v)^+ = \sum_{i=0}^{N-1} \bar{y}_i \bar{v}_i h_{i+1}, \quad (y, v) = \sum_{i=0}^{N-1} \bar{y}_i \bar{v}_i h_i \text{ и т. д.} \right),\end{aligned}\tag{73}$$

где $G(x, \xi)$ — разностная функция Грина, определяемая условиями

$$(aG_{\bar{x}}(x, \xi))_x - d(x)G(x, \xi) = -\frac{\delta(x, \xi)}{h_{+1}}, \quad G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0. \quad (74)$$

Для $G(x, \xi)$ верны оценки леммы 2. Поэтому справедлива лемма 3, так что

$$\|\bar{z}\|_0 \leq M_2(\|\mu^*\|_1 + \|\psi^*\|_3). \quad (75)$$

Вторая формула Грина (26) дает

$$v(x) = (G(x, \xi), \eta_{\xi\xi}(\xi))^+ = (G_{\xi\xi}(x, \xi), \eta(\xi))^+ + G_{\xi\eta}|_{\xi=x_N} - \eta G_{\xi}|_{\xi=0}.$$

Подставим сюда найденное из уравнения (74) выражение для $G_{\xi\xi}$:

$$v(x) = -\frac{\eta(x)}{a(x)} - \left(\frac{a_\xi(\xi)}{a(\xi)} G_{\hat{\xi}}(x, \xi) - \frac{d(\xi)}{a(\xi)} G(x, \xi), \eta(\xi) \right)^+ + G_{\xi\eta}|_{\xi=x_N} - \eta G_{\xi}|_{\xi=0}.$$

Если $k(x) \in C^{(0,1)}$, то $|a_x| \leq c_4$ (c_4 — постоянная, не зависящая от сетки) и

$$\|v\|_0 \leq M\|\eta\|_0 \quad (M = M(c_1, c_2, c_4)). \quad (76)$$

Пусть $k(x) \in Q^{(0,1)}$ ($0 < c_1 \leq a \leq c'_1$) и $\xi = \bar{x}_n + \theta h_n$ — точка разрыва функции $k(x)$. Тогда $|a_x| \leq c_4$ при $x \neq \bar{x}_n$ и $x \neq \bar{x}_{n+1}$. Из формулы

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_\xi}{a} G_{\hat{\xi}}, \eta \right)^+ &= \frac{1}{a_n} (a_{n+1} - a_n) G_{\hat{\xi}}(x, x_n) + \frac{1}{a_{n+1}} (a_{n+2} - a_{n+1}) G_{\hat{\xi}}(x, x_{n+1}) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{a_i} a_{x,i} G_{\hat{\xi}}(x, \bar{x}_i) h_{i+1} + \sum_{i=n+2}^{N-1} \frac{1}{a_i} a_x(\bar{x}_i) G_{\hat{\xi}}(x, \bar{x}_i) h_{i+1} \end{aligned}$$

видно, что оценка (76) сохраняет силу. В этом случае $M = M(c_1, c'_1, c_2, c_4)$.

Тем самым доказана

Лемма 7. Если $0 < c_1 \leq a \leq c'_1$, $0 \leq d \leq c_2$ и $|a_x| \leq c_4$ всюду, кроме конечного (при любом N) числа точек сетки, а $\psi(x)$ имеет вид (72), то для решения задачи (69) справедлива оценка

$$\|z\|_0 \leq M_2(\|\mu^*\|_1 + \|\psi^*\|_3) + M_4\|\eta\|_0, \quad M_2 = \frac{c_1 + c_2}{c_1^2},$$

где $M_4 > 0$ — постоянная, зависящая только от c_1, c'_1, c_2, c_4 .

Теорема 4. Если $k, q, f \in C^{(1,1)}[0, 1]$, то любая однородная разностная схема (68) имеет второй порядок точности на произвольной последовательности сеток ω_N :

$$\|\bar{y} - u(\bar{x})\|_0 \leq M \|h\|_0^2, \quad (77)$$

где \bar{y} — решение задачи (68), $u(x)$ — решение исходной задачи (5), $M > 0$ есть постоянная, не зависящая от сетки. Если $k, q, f \in Q^{(1,1)}[0, 1]$, то справедлива оценка

$$\|\bar{y} - u(\bar{x})\|_0 \leq M \|h\|_0^\kappa, \quad (78)$$

где $\kappa = 1$ для всего семейства схем (68), $\kappa = 2$ для схемы (61).

Оценка (77) следует из леммы 7 и оценок для μ^* , η , ψ^* . При $q = f = 0$ вместо (77) получим

$$\|\bar{y} - u(\bar{x})\|_0 \leq M \|h\|_2^2.$$

Вывод оценки (78) основан на использовании аналога леммы 6.

Поступила в редакцию 6.06.1962

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 1. — С. 5–63.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 3. — С. 425–440.
3. Саулъев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. — М.: Физматгиз, 1960.
4. Самарский А. А. Априорные оценки для разностных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 6. — С. 972–1000.

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ НЕЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ТИПА АДАМСА

А. Н. Тихонов, А. Д. Горбунов
(Москва)

1. Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(a) = b, \quad (1)$$

где $y(x) = \{y^{(1)}(x), \dots, y^{(N)}(x)\}$ — искомая вектор-функция от x ,
 $f(x, y) = \{f^{(1)}(x, y), \dots, f^{(N)}(x, y)\}$ — заданная вектор-функция от x и
 $y = \{y^{(1)}, \dots, y^{(N)}\}$.

Пусть для приближенного решения этой задачи применяется устойчивая неявная разностная схема типа Адамса, использующая $n + 1$ точку (n — четное):

$$L(y_k) = \sum_{i=0}^n \alpha_i y_{k-i} - h \sum_{i=0}^n \beta_i f_{k-i} = 0, \quad f_j = f(x_j, y_j) \quad (2)$$

($x_j = a + jh$, $h > 0$) при соответствующих начальных условиях.

Известно [1], что для погрешности метода, определяемого формулой (2), при достаточной гладкости вектор-функции f имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\delta_k = y_k - y(x_k) = h^s \frac{K_1}{B_0} \int_a^{x_k} \Omega(\xi, x_k) \frac{d^{s+1}y(\xi)}{d\xi^{s+1}} d\xi + O(h^{s+1}); \quad (3)$$

где

$y(x)$ — точное решение задачи (1),

Ω — матрицант матрицы $\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y(x)}$,

y_k — точное решение уравнения (2) при соответствующих начальных условиях, s — степень оператора $L(y_k)$, константы B_0 и K_1 определяются формулами

$$B_0 = \sum_{i=0}^n \beta_i, \quad K_1 = \sum_{i=0}^n \left[\frac{(n-i)^{s+1} \alpha_i}{(s+1)!} - \frac{(n-i)^s \beta_i}{s!} \right]. \quad (4)$$

Таким образом, величина главного члена (относительно h) разложения (3) при фиксированном h для данного решения $y(x)$ целиком определяется величиной коэффициента K_1/B_0 .

Известно также [2], что при соответствующем выборе коэффициентов α_i и β_i получается неявная схема вида (2) максимальной степени $s = n + 2$. При этом, вообще говоря, определяются не все $2n + 2$ коэффициента α_i и β_i , входящие в уравнение (2); некоторые из них остаются относительно свободными. Возникает вопрос, нельзя ли при соответствующем выборе этих свободных коэффициентов получить такую устойчивую схему вида (2) наивысшей степени, для которой отношение K_1/B_0 принимало бы минимальное значение. Рассмотрению последней задачи и посвящается настоящая заметка.

2. Прямой путь решения рассматриваемой задачи состоит в отыскании относительного минимума выражения K_1/B_0 , если рассматривать его как функцию коэффициентов α_i и β_i при условиях, что последние удовлетворяют требованиям устойчивости и соответствующей степени аппроксимации. Однако упомянутый путь сопряжен, как всегда, с большими вычислительными трудностями. В связи с этим рассматриваемая задача будет решаться более коротким способом.

Наряду с формулой (4) величина K_1 вполне характеризуется тождеством (см. [1])

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i y(x_{k-i}) - h \sum_{i=0}^n \beta_i \frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=x_{k-i}} = -h^{s+1} K_1 \frac{d^{s+1}y(x)}{dx^{s+1}} \Big|_{x=x_{k-n}} + O(h^{s+2}), \quad (5)$$

где $y(x)$ — произвольная достаточно гладкая функция.

Произведем в этом тождестве замену переменного индекса k по формуле $\varkappa = k - n$, где \varkappa — новый переменный индекс; тогда (5) примет вид

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i y(x_{\varkappa+n-i}) - h \sum_{i=0}^n \beta_i \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=x_{\varkappa+n-i}} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} - h^{s+1} K_1 \left. \frac{d^{s+1}y(x)}{dx^{s+1}} \right|_{x=x_{\varkappa}}. \quad (6)$$

Последнее соотношение мы подвергнем ряду преобразований, указанных в работе [2].

Введем в рассмотрение оператор сдвига E , определяемый для произвольной вектор-функции $\varphi(x)$ равенством $E\varphi(x) = \varphi(x + h)$, и перепишем (6) в виде

$$\rho(E)y(x_{\varkappa}) - h \sigma(E) \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=x_{\varkappa}} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} - h^{s+1} K_1 \left. \frac{d^{s+1}y(x)}{dx^{s+1}} \right|_{x=x_{\varkappa}}, \quad (7)$$

где

$$\rho(E) = \sum_{i=0}^n \alpha_i E^{n-i}, \quad \sigma(E) = \sum_{i=1}^n \beta_i E^{n-i}$$

суть характеристические полиномы, соответственно, разностных операторов

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i y(x_{\varkappa+n-i}), \quad \sum_{i=0}^n \beta_i \varphi(x_{\varkappa+n-i}).$$

Отметим, что в условиях рассматриваемой задачи полиномы $\rho(E), \sigma(E)$ и величины K_1 и B_0 столь взаимообусловлены, что задание, например, полинома $\rho(E)$ вполне определяет полином $\sigma(E)$ и величины K_1 и B_0 . Имея в виду это, преобразуем соотношение (7) так, чтобы для величины K_1/B_0 получилось выражение, для которого легко находится нижняя грань на совокупности допустимых полиномов $\rho(E)$.

Так как полиномы $\rho(E), \sigma(E)$ и величина K_1 не зависят от конкретных свойств вектор-функции $y(x)$, то соотношение (7) достаточно рассмотреть для какой-либо более или менее простой функции. Положим, например, $y(x) = e^x$, $e^h = \xi$, тогда $Ee^{x_{\varkappa}} = e^{x_{\varkappa}+h} = e^h e^{x_{\varkappa}} = \xi e^{x_{\varkappa}}$ и соотношение (7) преобразуется к виду

$$\rho(\xi) - \log \xi \sigma(\xi) \underset{\xi \rightarrow 1}{\sim} -(\xi - 1)^{s+1} K_1; \quad (8)$$

$\log \xi$ обозначает ту из ветвей, для которой $\log 1 = 0$.

Далее, преобразуем рассматриваемую нами комплексную ξ -плоскость с разрезом вдоль отрицательного луча действительной оси при помощи преобразования

$$\xi = \frac{z+1}{z-1}, \quad z = \frac{\xi+1}{\xi-1};$$

при этом вводятся в рассмотрение так называемые ассоциированные многочлены оператора L :

$$R(z) = \left[\frac{1}{2}(z-1) \right]^n \rho(\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j, \quad (9)$$

$$S(z) = \left[\frac{1}{2}(z-1) \right]^n \sigma(\xi) = \sum_{j=0}^n b_j z^j \quad (10)$$

($a_n = 0$ вследствие того, что $\rho(1) = 0$). В результате этого соотношение (9) преобразуется к виду

$$R(z) - \log \frac{z+1}{z-1} S(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} - \left(\frac{2}{z} \right)^{s-n+1} K_1. \quad (11)$$

Комплексная z -плоскость рассматривается с разрезом по отрезку от -1 до $+1$ действительной оси. Это соответствует тому, что $\log \frac{z+1}{z-1}$ определяется однозначно из условия обращения в нуль этой ветви при $z = \infty$.

Наконец, перепишем (11) в виде

$$R(z) \left[\log \frac{z+1}{z-1} \right]^{-1} - S(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} - \left(\frac{2}{z} \right)^{s-n} K_1. \quad (12)$$

Отсюда вытекает, что при заданном $R(z)$ полином $S(z)$ нужно полагать равным главной части функции

$$R(z) \left[\log \frac{z+1}{z-1} \right]^{-1},$$

ибо только при этом условии имеет место соотношение

$$R(z) \left[\log \frac{z+1}{z-1} \right]^{-1} - S(z) = O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Заметив это и учитывая разложение

$$\left[\log \frac{z+1}{z-1} \right]^{-1} = \frac{z}{2} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu_{2\nu+1} z^{-(2\nu+1)},$$

получим нужное нам равенство

$$R(z) \left[\log \frac{z+1}{z-1} \right]^{-1} - S(z) = - \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu} z^{-\nu}, \quad (13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_{2\lambda} &= \sum_{\nu} \mu_{2\nu+1} a_{2\nu-2\lambda+1}, \\ C_{2\lambda+1} &= \sum_{\nu} \mu_{2\nu+1} a_{2\nu-2\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Так как в условиях рассматриваемой задачи $C_1 = 0$ (ибо $a_0 = a_2 = \dots = a_{n-2} = 0$), то согласно (12) и (13) получается

$$4K_1 = C_2 = \mu_3 a_1 + \mu_5 a_3 + \dots + \mu_{n+1} a_{n-1}. \quad (15)$$

Если полиномы $R(z)$ выбирать так, чтобы $a_{n-1} = 1$, то будут справедливы неравенства $a_{2\nu+1} > 0$, $\nu = 0, 1, \dots, n/2 - 1$. Учитывая, кроме того, что $\mu_{2\nu+1} > 0$ (см. [2]) при $a_1 = a_3 = \dots = a_{n-3} = 0$, получим из (15)

$$\inf K_1 = \frac{\mu_{n+1}}{4}. \quad (16)$$

Таким образом, нижняя грань K_1 отвечает полиному $R(z) = z^{n-1}$ или соответствующему полиному $\rho(\xi) = (\xi-1)(\xi+1)^{n-1}$. Разностная схема вида (2), отвечающая последнему полиному, очевидно неустойчива.

Далее вычислим B_0 . Имеем

$$B_0 = \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{d\rho(\xi)}{d\xi} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{R(z)}{[(z-1)/2]^n} \right\} = 2^{n-1} a_{n-1} = 2^{n-1}.$$

После этого с учетом (16) получим

$$\inf \frac{K_1}{B_0} = \frac{\inf K_1}{2^{n-1}} = \frac{\mu_{n+1}}{2^{n+1}}. \quad (17)$$

Тем самым, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Среди устойчивых схем вида (2) (n — четное) наивысшей степени $s = n + 2$ не существует схемы, для которой величина K_1/B_0 достигала бы минимума.

Теорема 2. Для всякой устойчивой схемы вида (2) (n — четное) наивысшей степени $s = n + 2$ имеет место неравенство

$$\frac{K_1}{B_0} > \frac{\mu_{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Теорема 3. Для всякого произвольного положительного числа ε можно построить устойчивую схему вида (2) (n — четное) наивысшей степени $s = n + 2$ такую, что

$$\frac{K_1}{B_0} < \frac{\mu_{n+1}}{2^{n+1}} + \varepsilon.$$

Поступила в редакцию 9.06.1962

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Горбунов А. Д. Асимптотические разложения погрешности разностного метода решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1962. — Т. 2, № 4. — С. 537–548.
2. Dahlquist G. Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations // Math. Skand. — 1956. — V. 4, № 1. — P. 33–53.

К ТЕОРИИ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

§ 1. Однородные разностные схемы для одномерных задач

1. Разностные методы являются эффективным средством для отыскания решения дифференциальных уравнений. Простейшие разностные схемы уже давно используются для доказательства теорем существования; эти схемы зачастую оказываются неудобными для численного решения уравнений.

Появление вычислительных машин стимулировало развитие численных методов. Проведившиеся исследования отдельных схем выявили, что для одного и того же уравнения можно указать ряд схем, обладающих различными качествами в смысле устойчивости, сходимости, точности и простоты. Большая часть этих исследований относится к уравнениям с постоянными коэффициентами, которые трактовались как математические модели уравнений с переменными коэффициентами, применявшихся на практике.

2. Естественно возникает задача о создании общей теории разностных схем, пригодных для решения не только отдельных задач, но и классов задач, характеризующихся, например, типом уравнений и заданием функционального семейства, к которому принадлежат коэффициенты задачи.

Термин «разностная схема» следует трактовать как закон написания разностных уравнений. Требование единообразия или однородности вычислительного алгоритма приводит к введенному в [1] понятию однородных разностных схем. Цель теории однородных разностных схем — выделить семейство разностных схем, пригодных для решения возможно более широкого класса задач (например, для уравнений с разрывными коэффициентами, для краевых условий общего вида, для произвольных областей — в случае нескольких переменных и т. д.). При срав-

нении различных схем учитываются такие их свойства, как устойчивость, сходимость и точность, простота и экономичность (в смысле объема вычислений).

3. Первый цикл работ по теории однородных разностных схем связан с изучением однородных схем для класса дифференциальных уравнений:

$$L^{(k,q,f)}u = (k(x)u')' - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

где $k(x), q(x), f(x)$ — кусочно-непрерывные и кусочно-дифференцируемые функции.

Пусть $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = 1/N\}$ — разностная сетка, а $y = y_i$ — определенная на ω_h сеточная функция. В [1] были изучены трехточечные однородные разностные схемы стандартного типа $L_h^{(k,q,f)}$:

$$L_h^{(k,q,f)}y = \frac{by_x - ay_{\bar{x}}}{h} - dy + \varphi = 0,$$

$$y_x = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y_{\bar{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}. \quad (2)$$

Коэффициенты a, b, d, φ схемы выражаются через k, q, f при помощи некоторых функционалов $A[\bar{k}(s)], B[\bar{k}(s)], D[\bar{q}(s)], F[\bar{f}(s)]$, так что

$$a = A[k(x + sh)], \quad b = B[k(x + sh)] \quad \text{и т. д.}$$

Эти функционалы удовлетворяют некоторым требованиям, обеспечивающим второй порядок аппроксимации схемы $L_h^{(k,q,f)}$ и разрешимость разностных уравнений.

Рассматриваются только стандартные схемы, каждый из коэффициентов которых зависит только от одного коэффициента дифференциального уравнения. Примером нестандартной схемы может служить точная схема [1], для которой, например, φ является весьма сложным функционалом не только f , но и k, q . Практическое использование нестандартных схем затруднительно. Поэтому и следует выделять более простые семейства стандартных схем.

4. В [1] доказано, что для того, чтобы схема (2) имела в классе гладких коэффициентов k, q, f n -й порядок точности ($n = 1, 2$), необходимо и достаточно, чтобы она имела тот же порядок аппроксимации.

Это утверждение теряет силу в случае разрывных коэффициентов. В [1] приведен пример схемы, имеющей в классе гладких коэффициентов второй порядок точности и расходящейся в классе разрывных коэффициентов.

Усиленное требование сходимости — требование устойчивости схемы (2) относительно возмущения коэффициентов — позволяет выделить из (2) семейство схем, сходящихся в классе разрывных коэффициентов. Это — так называемые консервативные схемы:

$$L_h^{(k,q,f)} y = (ay_{\bar{x}})_x - dy + \varphi = 0. \quad (3)$$

Для получения консервативных схем можно пользоваться общим методом баланса или интегро-интерполяционным методом, сформулированным в [1].

Вопрос о точности схем (3) в различных классах коэффициентов на произвольных последовательностях сеток ω_h исследован в [1–3].

5. Простейшие примеры показывают, что часто применяемый критерий для априорного суждения о качестве разностных схем — равномерная оценка (по норме $\|\psi\|_0$) или оценка в среднем (по норме $\|\psi\|_2$) погрешности аппроксимации ψ схемы — в случае неравномерных сеток (так же, как и в случае разрывных коэффициентов) оказывается несостоятельным и может дать неверное представление о порядке точности. Пусть дана задача

$$Lu = u'' + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Рассмотрим на произвольной неравномерной сетке

$$\omega_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = 1\}$$

разностную схему

$$\Lambda y_i = \frac{1}{\bar{h}_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) + f_i = 0,$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad \bar{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1}).$$

Погрешность аппроксимации

$$\psi_i = \Lambda u_i - (Lu)_i = \frac{1}{3}(h_{i+1} - h_i)u_i''' + O(\bar{h}_i^2).$$

Схема Λ_u имеет первый порядок аппроксимации в смысле норм

$$\|\psi\|_0 = \max_{\omega_h} |\psi_i|, \quad \|\psi\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \psi_i^2 \bar{h}_i \right)^{1/2},$$

и второй порядок по норме

$$\|\psi\|_3 = \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left| \sum_{k=1}^i \psi_k \bar{h}_k \right|. \quad (4)$$

6. В [2] рассматривается семейство однородных консервативных схем на неравномерных сетках, совпадающих со схемами [1] на равномерных сетках ($h_i = h = 1/N$). Любая из схем данного семейства на произвольной последовательности неравномерных сеток имеет тот же порядок точности, что и на равномерных сетках как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов. Этот результат следует из априорной оценки $\|y - u\|_0 \leq M \|\psi\|_3$, так как $\|\psi\|_3$ имеет для указанных схем один и тот же порядок на равномерной и неравномерной сетках. Отметим, что точность схемы оценивается через средний квадратичный шаг $\|h\|_2$ сетки ω_h .

В [4] введено другое семейство однородных схем на неравномерных сетках и показано, что на специальных последовательностях сеток $\omega_h(k)$, зависящих от выбора коэффициентов k, q, f , любая из схем этого семейства имеет второй порядок точности в классе разрывных коэффициентов.

7. Аналогичные теоремы о точности однородных разностных схем на неравномерных сетках получаются для эллиптических уравнений с несколькими переменными в области G с границей Γ :

$$L^{(k,q,f)}u = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u - q(x)u + f(x) = 0, \quad u|_\Gamma = \mu(x), \quad x = (x_1, \dots, x_p),$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) \quad (k_\alpha \geq C_1 = \text{const} > 0, \quad q(x) \geq 0).$$

Если ω_h — произвольная неравномерная сетка, граница которой $\gamma \subset \Gamma^h$ (краевые условия на γ задаются без сноса), то однородная схема $L_h^{(k,q,f)}$ (см. [12]) сходится в среднем со скоростью $O(h^2)$ и равномерно со скоростью

$$O \left(h^2 \ln^\delta \frac{1}{H_*} \right), \quad \text{где } \delta > 1, \quad H_* = \min_{\omega_h} H, \quad H = \prod_{\alpha=1}^p \bar{h}_\alpha$$

— объем ячейки разностной сетки, h^2 — среднее квадратичное значение

$$|h|^2 = \sum_{\alpha=1}^p h_{\alpha}^2,$$

h_{α} — шаг сетки ω_h по направлению x_{α} .

8. В [5] исследована сходимость и точность однородных разностных схем для задачи Штурма–Лиувилля

$$(ku')' - qu + \lambda ru = 0, \quad u'(0) - \sigma_1 u(0) = 0, \quad u'(1) + \sigma_2 u(1) = 0. \quad (5)$$

Схемы высокого порядка точности [6] и [3] позволяют построить для задачи (5) схемы, имеющие 4-й и более высокий порядок точности относительно собственных значений и собственных функций в классе разрывных коэффициентов.

§ 2. Однородные разностные схемы для уравнений параболического типа и систем уравнений

Естественным развитием теории однородных разностных схем для простейшего уравнения (1) является теория однородных схем для уравнений параболического типа.

Отметим, что схемам частного вида для уравнений с гладкими коэффициентами посвящен ряд работ других авторов. Список литературы дан в книгах Р. Рихтмайера и В. К. Саульева, а также в [7–10].

1. Рассмотрим в прямоугольнике $D = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ первую краевую задачу (см. [7]) для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L^{(k,q,f)}u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x,t)u + f(x,t). \quad (6)$$

Коэффициенты k, q, f могут иметь разрывы первого рода на конечном числе кривых $x = \xi_{\nu}(t)$, $\nu = 1, 2, \dots, \nu_0$, на которых выполняются естественные условия сопряжения.

Введем разностную сетку

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_{\tau} = \{(x_i, t_j) \in \bar{D}\},$$

где

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad 0 \leq i \leq N, \quad h = 1/N\},$$

$$\bar{\omega}_{\tau} = \{t_j = j\tau, \quad 0 \leq j \leq K, \quad \tau = T/K\}.$$

Пусть $L_h^{(k,q,f)}$ — однородная разностная схема второго порядка аппроксимации

$$L_h^{(k,q,f)}y = (a(x,t)y_{\bar{x}})_x - d(x,t)y + \varphi(x,t) \quad (t = t_{j+1}, y = y_{j+1}), \quad (7)$$

соответствующая $L^{(k,q,f)}$. Классу дифференциальных уравнений (6), определяемому заданием класса функций k, q, f , ставится в соответствие семейство однородных разностных схем

$$y_{\bar{t}} = (L_h^{(k,q,f)}y)^\alpha = \alpha L_h^{(k,q,f)}y + (1 - \alpha)L_h^{(\bar{k},\bar{q},\bar{f})}\tilde{y}, \quad (8)$$

$$(\tilde{y} = y_j, y_{\bar{t}} = (y - \tilde{y})/\tau, 0 \leq \alpha \leq 1),$$

которое определяется заданием семейства схем $L_h^{(k,q,f)}$ и параметра α . Однородные схемы (8) являются схемами сквозного счета, так как они не меняются при переходе от гладких коэффициентов к разрывным коэффициентам дифференциального уравнения и не используют явно условий сопряжения на линиях разрыва $x = \xi_\nu(t)$.

2. Исследован вопрос об устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности ([4], [7]). Показано, что из устойчивости схемы для уравнения с постоянными коэффициентами не следует ее устойчивость для уравнения с разрывными коэффициентами. Соответствующим примером является неконсервативная схема [11].

3. Вопрос о сходимости и точности схемы (8) сводится к оценке решения уравнения

$$z_{\bar{t}} = (L_h^{(k,q)}z)^\alpha + \Psi, \quad L_h^{(k,q)}z = (az_{\bar{x}})_x - dz \quad (9)$$

с однородными условиями $z = 0$ при $x = 0, x = 1, t = 0$. Здесь Ψ — погрешность аппроксимации схемы. Следует различать два случая:

1) линии разрыва $x = \xi_\nu, \nu = 1, 2, \dots, \nu_0$, являются прямыми, параллельными оси t в плоскости (x, t) , т. е. $\xi'_\nu(t) \equiv 0$ для всех $\nu = 1, 2, \dots, \nu_0$ («неподвижные разрывы»);

2) по крайней мере для одного ν $\xi'_\nu(t) \not\equiv 0$ («движущиеся или косые разрывы»). Для каждого из этих случаев требуются свои априорные оценки, учитывающие тот факт, что в классе разрывных коэффициентов схемы (8)

сохраняют свойство аппроксимации в норме

$$\|\Psi\|_3 = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h \left(\sum_{k=1}^i \Psi_k h \right)^2 \right]^{1/2}$$

и не имеют аппроксимации в норме $\|\Psi\|_0 = \max_{\omega_h} |\Psi|$ и даже в норме $\|\Psi\|_2$.

Для равномерной оценки погрешности $z = y - u$ через $\|\Psi\|_3$ в [4, 8, 9] получены априорные оценки двух типов, соответствующие случаям неподвижных и движущихся разрывов; эти оценки используются для выяснения порядка точности наших схем.

4. Изучены абсолютно устойчивые однородные разностные схемы для нелинейного и квазилинейного уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (11)$$

5. Рассматриваются однородные разностные схемы на неравномерных сетках для линейных и квазилинейных уравнений и исследуется вопрос о точности этих схем в различных классах коэффициентов (см. [4]).

6. Все результаты обобщаются на случай краевых условий более общего вида, например,

$$C \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma u + \nu(t) \quad \text{при} \quad x = 0,$$

а также на случай нелинейных краевых условий.

7. Изучались однородные схемы для системы параболических уравнений ([4, 9]). Рассмотрим, в качестве примера, систему

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x, t) \frac{\partial U}{\partial x} \right) = L^{(K)}U, \quad (12)$$

где $U = \{u^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, r\}$ — вектор-функция, $K = (k_{\lambda\rho}(x, t))$ положительно определенная симметричная матрица. Оператору $L^{(K)}U$ ставится в соответствие однородная схема 2-го порядка аппроксимации

$$\Lambda Y = (A(x, t) Y_{\bar{x}})_x, \quad (13)$$

где $Y = \{y^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, r\}$ — сеточная вектор-функция, $A(x, t)$ — симметричная положительно определенная матрица-функционал. По аналогии с (8) пишутся однородные схемы для (12) и доказывается их устойчивость и сходимость при помощи априорных оценок [9].

8. Указанные выше (п. 7) схемы являются неявными, и при нахождении вектора Y приходится решать многомерную систему разностных уравнений, например, при помощи матричной прогонки, что сопряжено с большим объемом вычислений. Поэтому важное значение приобретает задача построения экономичных схем.

Укажем две абсолютно устойчивые сходящиеся экономичные схемы для системы (12). Для этого матрицу A представим в виде суммы двух треугольных положительно определенных матриц:

$$A = A^- + A^+.$$

Первая экономичная схема

$$Y_{\bar{t}} = \Lambda^- Y + \Lambda^+ \check{Y}, \quad \text{где } \Lambda^\pm Y = (A^\pm Y_{\bar{x}})_x.$$

Для определения вектор-функции Y требуется r -кратное последовательное применение формул одномерной прогонки.

Вторая экономичная схема

$$\frac{Y^* - Y^j}{\tau} = \Lambda^- Y^*, \quad \frac{Y^{j+1} - Y^*}{\tau} = \Lambda^+ Y^{j+1}.$$

Эта схема используется при построении экономичной схемы для системы многомерных уравнений.

9. Для уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

изучались абсолютно устойчивые однородные разностные схемы, являющиеся естественным обобщением схем для уравнения с постоянными коэффициентами. Полученные в [9] априорные оценки позволяют доказать сходимость этих схем в классе непрерывных и разрывных коэффициентов. Изучались однородные разностные схемы на неравномерных сетках ω_h и ω_τ .

Для системы уравнений гиперболического типа, по аналогии с п. 8, построены абсолютно устойчивые экономичные схемы.

Поступила в редакцию 13 VI 1963

Список литературы

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 1. — С. 5–63.
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Однородные разностные схемы на неравномерных сетках // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1962. — Т. 2, № 5. — С. 812–832.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах высокого порядка точности на неравномерных сетках // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1963. — Т. 3, № 1. — С. 99–108.
4. *Самарский А. А.* Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1963. — Т. 3, № 2. — С. 266–298.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Разностная задача Штурма – Лиувилля // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 5. — С. 784–805.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 3. — С. 425–440.
7. *Самарский А. А., Фрязинов И. В.*, О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 5. — С. 806–824.
8. *Самарский А. А.* Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 3. — С. 441–460.
9. *Самарский А. А.* Априорные оценки для разностных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 6. — С. 972–1000.
10. *Самарский А. А.* Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1962. — Т. 2, № 1. — С. 25–56.
11. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об устойчивости разностных схем // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 149, № 3. — С. 529–531.
12. *Самарский А. А.* Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1963. — Т. 3, № 3. — С. 431–466.

ОБ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский
(Москва)

1. В [1], [2] для задачи

$$L^{(p,q,f)}u = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right) - q(x)u + f(x) = 0, \quad (1)$$
$$0 < x < 1, \quad u(0) = u_1, \quad u(1) = u_2,$$

$$0 < c'_1 \leq p(x) \leq c_1, \quad 0 \leq q(x) \leq c_2, \quad |f(x)| \leq c_3,$$

была построена однородная трехточечная разностная схема, дающая точное решение задачи (1) на произвольной неравномерной сетке

$$\omega_N = \{x = 0, \quad x_1, \dots, \quad x_i, \dots, \quad x_N = 1\}$$

в классе кусочно-непрерывных коэффициентов $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ ($p, q, f \in Q^{(0)}$). Там же рассматривались усеченные схемы m -го ранга, которые обеспечивают точность

$$O(\|h\|_0^{2m+2}), \quad \text{где} \quad \|h\|_0 = \max_{\omega_N} h_i, \quad h_i = x_i - x_{i-1}$$

при дополнительных условиях

$$0 < M_1 \leq \frac{h_{i+1}}{h_i} \leq M_2, \quad \|h\|_0 \leq h_0, \quad (2)$$

где M_1, M_2, h_0 — положительные постоянные, не зависящие от выбора сетки.

Данная заметка является развитием статьи [1]. Показано, что основные оценки работы [1] сохраняют силу без дополнительных условий (2).

В случае схемы нулевого ранга характеристикой точности схемы является средний квадратичный шаг сетки

$$\|h\|_2 = (1, h^2)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^N h_i^2 h_i \right)^{1/2}$$

Показано, что схема нулевого ранга всегда имеет точность $O(\|h\|_2^2)$ в классе $p, q, f \in Q^{(0)}$. В [3] был исследован вопрос о точности стандартных схем на неравномерных сетках. Выбирая усеченную схему нулевого ранга в качестве эталонной схемы и пользуясь теоремой 3 о сравнении решений разностных краевых задач, удается усилить результаты работы [3]. При этом мы не пользуемся проведенным в [3] детальным изучением структуры погрешности аппроксимации.

2. Итак, пусть $\omega_N = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_N = 1\}$ — произвольное разбиение отрезка $0 \leq x \leq 1$ на N частей, $h_i = x_i - x_{i-1}$ — шаг сетки, y_i — сеточная функция, заданная на ω_N . Введем обозначения (см. [3])

$$y = y(x) = y_i, \quad \begin{matrix} (+1) \\ y \end{matrix} = y_{i\pm 1}, \quad h = h_i, \quad h_{+1} = h_{i+1}, \quad \bar{h} = 0,5(h + h_{+1}),$$

$$y_{\bar{x}} = \frac{y - \begin{matrix} (-1) \\ y \end{matrix}}{h}, \quad y_x = \frac{\begin{matrix} (+1) \\ y \end{matrix} - y}{h_{+1}}, \quad y_{\bar{x}} = \frac{\begin{matrix} (+1) \\ y \end{matrix} - y}{\bar{h}},$$

$$(y, v)^* = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i \bar{h}_i, \quad (y, v) = \sum_{i=1}^N y_i v_i h_i, \quad \|y\|_0 = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i|,$$

$$\|y\|_1 = (1, |y|), \quad \|y\|_1^* = (1, |y|)^*, \quad \|y\|_2 = \sqrt{(1, y^2)}.$$

Отметим, что шаг h_i разностной сетки является произвольной сеточной функцией, удовлетворяющей лишь естественному условию нормировки

$$\sum_{i=1}^N h_i = 1.$$

3. Точная схема является консервативной схемой вида:

$$L_h^{T(p,q,f)} y = (a_T y_{\bar{x}})_{\bar{x}} - d_T y + \varphi_T = 0, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2. \quad (3)$$

Ее коэффициенты a_T, d_T, φ_T суть функционалы коэффициентов дифференциального уравнения (1).

При построении схемы (3) в [1] проводится преобразование сдвига

$$x = x_i + (s - \Delta_i)\hbar_i = \bar{x}_i + s\hbar_i, \quad -1 \leq s \leq 1,$$

где

$$\Delta_i = -\frac{h_{i+1} - h_i}{2\hbar_i}, \quad \bar{x}_i = x_i - \Delta_i\hbar_i,$$

так что $s = -1$ при $x = x_{i-1}$, $s = \Delta$ при $x = x_i$, $s = 1$ при $x = x_{i+1}$.

Функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ рассматриваются в местной системе координат с началом в точке x_i как функции s :

$$\bar{p}(s) = p(\bar{x} + s\hbar), \quad \bar{q}(s) = q(\bar{x} + s\hbar), \quad \bar{f}(s) = f(\bar{x} + s\hbar), \quad x \in \omega_N.$$

Коэффициенты a_T , d_T , φ_T определяются по формулам (19)–(21) работы [1]:

$$a_T = \frac{\hbar}{h} v_1(\Delta, \hbar), \quad a_T^{(+1)} = \frac{\hbar}{h_{+1}} v_2(\Delta, \hbar), \quad (4)$$

$$d_T = \frac{\hbar}{ha_T} \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s) v_1(s, \hbar) ds + \frac{\hbar}{h_{+1} a_T^{(+1)}} \int_{\Delta}^1 \bar{q}(s) v_2(s, \hbar) ds, \quad (5)$$

$$\varphi_T = \left(\hbar d + \frac{1}{ha_T} + \frac{1}{h_{+1} a_T^{(+1)}} \right) \hbar v_3(\Delta, \hbar). \quad (6)$$

4. Здесь $v_j(s, \hbar)$ ($j = 1, 2, 3$) — так называемые шаблонные функции, для отыскания которых надо решить задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\bar{p}(s)} \frac{dv_j}{ds} \right) - \hbar^2 \bar{q}(s) v_j &= 0, \quad -1 < s < 1, \quad j = 1, 2, \\ v_1(-1, \hbar) &= 0, \quad \frac{1}{\bar{p}(-1)} \frac{dv_1}{ds}(-1, \hbar) = 1; \\ v_2(1, \hbar) &= 0, \quad \frac{1}{\bar{p}(1)} \frac{dv_2}{ds}(1, \hbar) = 1; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\bar{p}(s)} \frac{dv_3}{ds} \right) - \hbar^2 \bar{q}(s) v_3 = -\bar{f}(s), \quad -1 < s < 1, \quad v_3(\pm 1, \hbar) = 0. \quad (8)$$

Для функций $v_1(s, \hbar)$ и $v_2(s, \hbar)$ в [1] были установлены тождества

$$v_1(1, \hbar) = v_2(-1, \hbar),$$

$$\begin{aligned} v_1(1, \hbar) - v_1(\Delta, \hbar) - v_2(\Delta, \hbar) = \\ = \hbar^2 \left\{ v_2(\Delta, \hbar) \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s) v_1(s, \hbar) ds + v_1(\Delta, \hbar) \int_{\Delta}^1 \bar{q}(s) v_2(s, \hbar) ds \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая (4), перепишем формулу (5) в виде

$$d = \frac{1}{v_1(\Delta, \hbar)} \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s) v_1(s, \hbar) ds + \frac{1}{v_2(\Delta, \hbar)} \int_{\Delta}^1 \bar{q}(s) v_2(s, \hbar) ds. \quad (10)$$

Отсюда видно, что тождество (9) можно записать следующим образом:

$$v_1(1, \hbar) = v_1(\Delta, \hbar) + v_2(\Delta, \hbar) + \hbar^2 d v_1(\Delta, \hbar) v_2(\Delta, \hbar). \quad (11)$$

5. Покажем теперь, что φ_T вычисляется по формуле

$$\varphi_T = \frac{1}{v_1(\Delta, \hbar)} \int_{-1}^{\Delta} \bar{f}(s) v_1(s; \hbar) ds + \frac{1}{v_2(\Delta, \hbar)} \int_{\Delta}^1 \bar{f}(s) v_2(s; \hbar) ds, \quad (12)$$

или

$$\varphi_T = F[p(\bar{x} + s\hbar), q(\bar{x} + s\hbar); f(\bar{x} + s\hbar)].$$

Отсюда и из (11) будет следовать

$$d_T = F[p(\bar{x} + s\hbar), q(\bar{x} + s\hbar); q(\bar{x} + s\hbar)].$$

Вводя функцию Грина задачи (8)

$$G(s, t) = \begin{cases} \frac{v_1(s, \hbar) v_2(t, \hbar)}{v_1(1, \hbar)}, & s \leq t, \\ \frac{v_2(s, \hbar) v_1(t, \hbar)}{v_1(1, \hbar)}, & s \geq t, \end{cases} \quad (13)$$

найдем

$$v_3(\Delta, \hbar) = \frac{v_2(\Delta, \hbar)}{v_1(1, \hbar)} \int_{-1}^{\Delta} v_1(s, \hbar) \bar{f}(s) ds + \frac{v_1(\Delta, \hbar)}{v_1(1, \hbar)} \int_{\Delta}^1 v_2(s, \hbar) \bar{f}(s) ds. \quad (14)$$

Обратимся теперь к формуле (6). Из (14) и (11) видно, что

$$\left(\hbar d_T + \frac{1}{\hbar a_T} + \frac{1}{\hbar_{+1} a_T^{(+1)}} \right) \hbar = \\ = \hbar^2 d_T + \frac{1}{v_1(\Delta, \hbar)} + \frac{1}{v_2(\Delta, \hbar)} = \frac{v_1(1, \hbar)}{v_1(\Delta, \hbar)v_2(\Delta, \hbar)}. \quad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в (6), приходим к формуле (12).

6. Преобразуем формулы для a_T, d_T, φ_T к более удобному для исследования виду. Введем новую переменную s' , полагая

$$\bar{x} + s\hbar = x + s'h \quad \text{при } s \leq \Delta,$$

$$\bar{x} + s\hbar = x + s'h_{+1} \quad \text{при } s \geq \Delta$$

и требуя, чтобы $s' = -1$ при $s = -1$, $s' = 1$ при $s = 1$. Тогда получим

$$s = \Delta + \frac{\hbar}{h} s' \quad \text{при } s \leq \Delta \quad (s' \leq 0); \quad s = \Delta + \frac{\hbar_{+1}}{\hbar} s' \quad \text{при } s \geq \Delta \quad (s' \geq 0).$$

Введем новые шаблонные функции

$$\alpha(s') = \frac{\hbar}{h} v_1(s, \hbar), \quad \beta(s') = \frac{\hbar}{\hbar_{+1}} v_2(s, \hbar).$$

Они определяются условиями (вместо s' снова пишем s):

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{p^*(s)} \frac{d\alpha}{ds} \right) - h^2 q^*(s) \alpha(s) = 0, \quad -1 < s < 0, \quad \alpha(-1) = 0, \\ \frac{1}{p^*(-1)} \frac{d\alpha}{ds} (-1) = 1, \quad (16)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{p^*(s)} \frac{d\beta}{ds} \right) - h_{+1}^2 q^*(s) \beta(s) = 0, \quad 0 < s < 1, \quad \beta(1) = 0, \\ \frac{1}{p^*(1)} \frac{d\beta}{ds} (1) = -1, \quad (17)$$

где

$$p^*(s) = \begin{cases} p(x + sh), & s < 0; \\ p(x + sh_{+1}), & s > 0; \end{cases} \quad q^*(s) = \begin{cases} q(x + sh), & s < 0; \\ q(x + sh_{+1}), & s > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим каждое из слагаемых в формуле (12):

$$\frac{1}{v_1(\Delta, \hbar)} \int_{-1}^{\Delta} v_1(s, \hbar) \bar{f}(s) ds = \frac{1}{\alpha(0)} \int_{-1}^0 \alpha(s) f^*(s) ds \frac{h}{\hbar},$$

$$\frac{1}{v_2(\Delta, \hbar)} \int_{\Delta}^1 v_1(s, \hbar) \bar{f}(s) ds = \frac{1}{\beta(0)} \int_0^1 \beta(s) f^*(s) ds \frac{h_{+1}}{\hbar}.$$

В результате мы приходим к следующим формулам для коэффициентов точной схемы:

$$a_T = \alpha(0), \quad a_T^{(+1)} = \beta(0), \quad (18)$$

$$\hbar d_T = \frac{h}{\alpha(0)} \int_{-1}^0 \alpha(s) q^*(s) ds + \frac{h_{+1}}{\beta(0)} \int_0^1 \beta(s) q^*(s) ds, \quad (19)$$

$$\hbar \varphi_T = \frac{h}{\alpha(0)} \int_{-1}^0 \alpha(s) f^*(s) ds + \frac{h_{+1}}{\beta(0)} \int_0^1 \beta(s) f^*(s) ds. \quad (20)$$

7. В [2] были изучены функции типа $\alpha(s)$ и $\beta(s)$. Для них справедливы оценки

$$c'_1(1+s) \leq \alpha(s) \leq \alpha(0), \quad \alpha(s) \leq c_1 \frac{\text{sh } \varkappa h(1+s)}{\varkappa h},$$

$$\varkappa = \sqrt{c_1 c_2}, \quad -1 < s < 0, \quad (21)$$

$$c'_1(1-s) \leq \beta(s) \leq \beta(0), \quad \beta(s) \leq c_1 \frac{\text{sh } \varkappa h(1-s)}{\varkappa h}, \quad 0 < s < 1.$$

Отсюда и из формул (18)–(20) следует, что

$$0 < c'_1 \leq a_T \leq c_4, \quad 0 \leq d_T \leq 2c_2, \quad |\varphi_T| \leq 2c_3, \quad \text{если } |f| \leq c_3, \quad (22)$$

где c_4 — положительная постоянная, зависящая только от c_1 и c_2 .

По аналогии с [1] будем искать $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ в виде рядов:

$$\alpha(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(s) h^{2k}, \quad \beta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(s) h_{+1}^{2k}.$$

Функции $\alpha_k(s)$ и $\beta_k(s)$, не зависящие от h и h_{+1} , определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_k(s) = \int_{-1}^s p^*(t) \left[\int_{-1}^t q^*(\lambda) \alpha_{k-1}(\lambda) d\lambda \right] dt, \quad k > 0, \quad \alpha_0(s) = \int_{-1}^s p^*(t) dt, \quad (23)$$

$$\beta_k(s) = \int_s^1 p^*(t) \left[\int_t^1 q^*(\lambda) \beta_{k-1}(\lambda) d\lambda \right] dt, \quad k > 0, \quad \beta_0(s) = \int_s^1 p^*(t) dt. \quad (24)$$

8. Представим $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ в виде:

$$\alpha(s) = \Pi_1^{(m)}(s, h) + h^{2m+2} \omega_1^{(m+1)}(s, h); \quad (25)$$

$$\beta(s) = \Pi_2^{(m)}(s, h_{+1}) + h_{+1}^{2m+2} \omega_2^{(m+1)}(s, h_{+1}),$$

где

$$\Pi_1^{(m)}(s, h) = \sum_{k=0}^m \alpha_k(s) h^{2k}, \quad \Pi_2^{(m)}(s, h_{+1}) = \sum_{k=0}^m \beta_k(s) h_{+1}^{2k}. \quad (26)$$

Заменяя $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ полиномами $\Pi_1^{(m)}$ и $\Pi_2^{(m)}$, получим усеченную схему m -го ранга:

$$L_h^{(p,q,f)} y = (\bar{a} y_{\bar{x}})_{\bar{x}} - \bar{d} y + \bar{\varphi} = 0, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2, \quad (27)$$

коэффициенты которой \bar{a} , \bar{d} , $\bar{\varphi}$ вычисляются по тем же формулам (18)–(20) с заменой $\alpha(s)$ на $\Pi_1^{(m)}$, а $\beta(s)$ — на $\Pi_2^{(m)}$.

Пусть \bar{y} — решение задачи (27). Для погрешности $z = \bar{y} - u$ получаем задачу

$$\Lambda z = (\bar{a} z_{\bar{x}})_{\bar{x}} - \bar{d} z = -\psi, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0, \quad (28)$$

где

$$\psi = ((\bar{a} - a_T) u_{\bar{x}})_{\bar{x}} - (\bar{d} - d_T) u + \bar{\varphi} - \varphi_T. \quad (28')$$

Вводя, как обычно, разностную функцию Грина $G(x, \xi)$ и пользуясь формулой Грина, а также ограниченностью G , G_ξ , $G_{\bar{x}}$, u , $u_{\bar{x}}$, получаем

$$\|\bar{y} - u\|_0 \leq M \{ \|a_T - \bar{a}\|_1 + \|d_T - \bar{d}\|_1^* + \|\varphi_T - \bar{\varphi}\|_1^* \}, \quad (29)$$

где M — положительная постоянная, зависящая только от c_1, c_2, c_3 .

9. Перейдем теперь к оценке разностей $a_T - \overset{m}{a}$, $d_T - \overset{m}{d}$, $\varphi_T - \overset{m}{\varphi}$. Из (25) и (18)–(20) следует:

$$\begin{aligned} a_T - \overset{m}{a} &= h^{2m+2} \omega_1^{(m+1)}(0), \quad \hbar(d_T - \overset{m}{d}) = \\ &= h^{2m+3} \left\{ \frac{1}{\alpha(0)} \int_{-1}^0 \omega_1^{(m+1)}(s) q^*(s) ds - \frac{\omega_1^{(m+1)}(0)}{\alpha(0)} \int_{-1}^0 \frac{\alpha_m(s)}{\alpha_m(0)} q^*(s) ds \right\} + \\ &+ h_{+1}^{2m+3} \left\{ \frac{1}{\beta(0)} \int_0^1 \omega_2^{(m+1)}(s) q^*(s) ds - \frac{\omega_2^{(m+1)}(0)}{\beta(0)} \int_0^1 \frac{\beta_m(s)}{\beta_m(0)} q^*(s) ds \right\} \end{aligned}$$

и аналогичная формула для $\hbar(\varphi_T - \overset{m}{\varphi})$.

Для $\omega_j^{(m+1)}(s)$ имеют место рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \omega_1^{(m+1)}(s) &= \int_{-1}^s p^*(t) \left[\int_{-1}^t q^*(\lambda) \omega_1^{(m)}(\lambda) d\lambda \right] dt, \\ \omega_2^{(m+1)}(s) &= \int_s^1 p^*(t) \left[\int_t^1 q^*(\lambda) \omega_2^{(m)}(\lambda) d\lambda \right] dt. \end{aligned}$$

По аналогии с [1] получаем оценки

$$0 \leq \omega_1^{(m)}(s) \leq M \frac{[\varkappa(1+s)]^{2m+1}}{(2m+1)!} \leq M',$$

$$0 \leq \omega_2^{(m)}(s) \leq M \frac{[\varkappa(1-s)]^{2m+1}}{(2m+1)!} \leq M'',$$

$$\frac{\omega_1^{(m)}(s)}{\alpha(0)} \leq M'', \quad \frac{\omega_2^{(m)}(s)}{\beta(0)} \leq M'',$$

$$\frac{\alpha_m(s)}{\alpha_m(0)} \leq 1 \quad (-1 < s \leq 0), \quad \frac{\beta_m(s)}{\beta_m(0)} \leq 1 \quad (s \geq 0),$$

где $\varkappa = \sqrt{c_1 c_2}$, M, M', M'' – положительные постоянные, зависящие только от c_1 и c_2 . Учитывая эти неравенства, найдем

$$\|a_T - \overset{m}{a}\|_1 = O(\|h^{2m+2}\|_1), \quad \|d_T - \overset{m}{d}\|_1^* = O(\|h^{2m+2}\|_1),$$

$$\|\varphi_T - \overset{m}{\varphi}\|_1 = O(\|h^{2m+2}\|_1).$$

Обращаясь теперь к (29), убеждаемся в том, что справедлива

Теорема 1. Усеченная разностная схема m -го ранга ($m \geq 0$) имеет $(2m + 2)$ -й порядок точности в классе кусочно-непрерывных функций $p(x), q(x), f(x) \in Q^{(0)}$ на любой последовательности неравномерных сеток, так что всегда выполняется неравенство:

$$\| \overset{m}{y} - u \|_0 \leq M \| h^{2m+2} \|_1 \leq M \| h \|_0^{2m+2}, \quad (30)$$

где $M = M(c_1, c_2, c_3)$ — положительная постоянная, зависящая только от c_1, c_2, c_3 .

Сравнение этой теоремы с соответствующей теоремой, доказанной в п. 4 § 2 работы [1] показывает, что требование

$$0 < M_1 \leq \frac{h_{i+1}}{h_i} \leq M_2,$$

фигурирующее в [1], является лишним и что оценка (30) справедлива при любых $\| h \|_0$.

10. Простейшей усеченной схемой является схема нулевого ранга $L_h^{(p,q,f)}$ ($m = 0$). Ее коэффициенты имеют вид:

$$\overset{0}{a} = \alpha_0(0), \quad \overset{0}{d} = \frac{h}{\hbar a} \int_{-1}^0 \alpha_0(s) q^*(s) ds + \frac{h_{+1}}{\hbar a^{(+)}} \int_0^1 \beta_0(s) q^*(s) ds, \quad (31)$$

$$\overset{0}{\varphi} = \frac{h}{\hbar a} \int_{-1}^0 \alpha_0(s) f^*(s) ds + \frac{h_{+1}}{\hbar a^{(+)}} \int_0^1 \beta_0(s) f^*(s) ds.$$

Для усеченной схемы нулевого ранга теорема 1 может быть усилена.

Теорема 2. Усеченная схема нулевого ранга в классе кусочно-непрерывных функций $p(x), q(x), f(x) \in Q^{(0)}$ и на любой последовательности сеток ω_N имеет второй порядок точности относительно среднего квадратичного шага сетки $\| h \|_2$, так что при любых значениях $\| h \|_0$ справедлива оценка

$$\| \overset{0}{y} - u \|_0 \leq M \| h \|_2^2, \quad (32)$$

где $\overset{0}{y}$ — решение задачи

$$L_h^{(p,q,f)} y = (ay_{\bar{x}})_{\bar{x}} - dy + \overset{0}{\varphi} = 0, \quad \overset{0}{y}(0) = u_1, \quad \overset{0}{y}(1) = u_2, \quad (33)$$

а M — положительная постоянная, зависящая только от c_1, c_2, c_3 .

Для доказательства теоремы используется представление разности $z = \overset{0}{y} - u$ в виде

$$\overset{0}{y} - u = (G, \overset{0}{\psi}), \quad (34)$$

где $\overset{0}{\psi}$ определяется по формуле (28') при $m = 0$, а $G = G(x, \xi)$ функция Грина задачи (33). Пользуясь первой формулой Грина и ограниченностью $G, G_\xi, G_{\bar{x}}, u, u_{\bar{x}}$, а также оценкой (29) при $m = 0$, получаем оценку (32).

11. Схему нулевого ранга можно использовать в качестве эталона при изучении порядка точности любых других схем $L_h^{(p,q,f)}$, например, консервативных стандартных схем, рассматриваемых в [3]. Пусть y — решение задачи

$$L_h^{(p,q,f)} y = (ay_{\bar{x}})_{\bar{x}} - dy + \varphi = 0, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2, \quad (35)$$

$$0 < c'_1 \leq a \leq c_1, \quad 0 \leq d \leq c_2, \quad |\varphi| \leq c_3.$$

Из неравенства $\|y - u\|_0 \leq \|y - \overset{0}{y}\|_0 + \|\overset{0}{y} - u\|_0$ и теоремы 2 следует, что для оценки $\|y - u\|_0$ достаточно найти оценку для $\|y - \overset{0}{y}\|_0$.

Для этой цели нам в дальнейшем понадобится

Лемма 1. Коэффициенты усеченной схемы всегда можно представить в виде

$$\overset{0}{a} = a^* = \int_0^1 p(x + sh) ds, \quad (36)$$

$$\overset{0}{d} = d^* + (hd_*)_{\bar{x}}, \quad d^* = \frac{1}{\hbar} \int_{x-0,5h}^{x+0,5h+1} q(x') dx' = \int_{-0,5}^{0,5} q(x + (s + \delta)\hbar) ds, \quad (37)$$

$$\delta = \frac{h_{+1} - h}{4\hbar}, \quad d_* = \int_{-1}^0 p(x + sh) \left[\int_{-0,5}^s q(x + th) dt \right] ds,$$

$$\overset{0}{\varphi} = \varphi^* + (h\varphi_*)_{\bar{x}}, \quad \varphi^* = \int_{-0,5}^{0,5} f(x + (s + \delta)\hbar) ds, \quad (38)$$

$$\varphi_* = \int_{-1}^0 p(x + sh) \left[\int_{-0,5}^s f(x + th) dt \right] ds.$$

В самом деле, меняя порядок интегрирования, находим

$$\int_{-1}^0 q^*(s) \alpha_0(s) ds = \int_{-1}^0 p^*(s) \left[\int_s^0 q^*(t) dt \right] ds = a^* \int_{-0,5}^0 q^*(t) dt - \\ - \int_{-1}^0 p^*(s) \left[\int_{-0,5}^s q^*(t) dt \right] ds,$$

$$\int_0^1 q^*(s) \beta_0(s) ds = \int_0^1 p^*(s) \left[\int_0^s q^*(t) dt \right] ds = a^{(+1)} \int_0^{0,5} q^*(t) dt + \\ + \int_0^1 p^*(s) \left[\int_{0,5}^s q^*(t) dt \right] ds.$$

Подставим эти выражения в (31) и учтем, что

$$p^*(s) = p(x + sh), \quad q^*(s) = q(x + sh) \quad \text{при } -1 < s < 0, \\ p^*(s) = p(x + sh_{+1}), \quad q^*(s) = q(x + sh_{+1}) \quad \text{при } 0 < s < 1.$$

В результате получим формулу $\overset{0}{d} = d^* + (hd_*)_{\hat{x}}$. Аналогично устанавливается формула $\overset{0}{\varphi} = \varphi^* + (h\varphi_*)_{\hat{x}}$.

12. Пусть y — решение задачи (35), а \tilde{y} — решение той же задачи с коэффициентами \tilde{a} , \tilde{d} , $\tilde{\varphi}$. В [1] было показано, что

$$\|\tilde{y} - y\|_0 \leq M \left\{ \|\tilde{a} - a\|_1 + \|\tilde{d} - d\|_1^* + \|\tilde{\varphi} - \varphi\|_1^* \right\}. \quad (39)$$

Рассмотрим разность $z = y - \tilde{y}$. Для нее получим задачу (28) с правой частью

$$\overset{0}{\psi} = ((a - \tilde{a}) \overset{0}{y}_{\bar{x}})_{\hat{x}} - (d - \tilde{d}) \overset{0}{y} + \varphi - \tilde{\varphi}.$$

Представляя z в виде $z = (G, \overset{0}{\psi})$, пользуясь леммой 1 и учитывая, что

$$(G, (hd_*)_{\hat{x}})^* = -(G_{\bar{x}}(x, \xi), h(\xi)d_*(\xi)], \quad (G, (h\varphi_*)_{\hat{x}})^* = -(G_{\bar{x}}, h\varphi_*],$$

видим, что справедлива

Теорема 3. Пусть y — решение задачи (35) при $p, q, f \in Q^{(0)}$; тогда выполняется неравенство

$$\|y - \overset{0}{y}\|_0 \leq M(\|a - a^*\|_1 + \|d - d^*\|_1^* + \|\varphi - \varphi^*\|_1 + \|hd_*\|_1 + \|h\varphi_*\|_1) \quad (40)$$

на любой сетке ω_N .

Следствие. Если y^* — решение задачи (35) с коэффициентами

$$\begin{aligned} a^* &= \int_{-1}^0 p(x + sh) ds, & d^* &= \int_{-0,5}^{0,5} q(x + (s + \delta)\hbar) ds, \\ \varphi^* &= \int_{-0,5}^{0,5} f(x + (s + \delta)\hbar) ds, & \delta &= \frac{h_{+1} - h}{4\hbar}, \end{aligned} \quad (41)$$

то справедлива оценка

$$\|y^* - \overset{0}{y}\|_0 \leq M(\|hd_*\|_1 + \|h\varphi_*\|_1). \quad (42)$$

Пусть \tilde{y} обозначает решение задачи (33) с коэффициентами $\tilde{a}, \tilde{d}, \tilde{\varphi}$, соответствующими коэффициентам $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{f} \in Q^{(0)}$ дифференциального уравнения (1). Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|\tilde{y} - \overset{0}{y}\|_0 &\leq M(\|\tilde{a}^* - a^*\|_1 + \|\tilde{d}^* - d^*\|_1^* + \|\tilde{\varphi}^* - \varphi^*\|_1^* + \\ &+ \|h(\tilde{d}_* - d_*)\|_1 + \|h(\tilde{\varphi}_* - \varphi_*)\|_1). \end{aligned} \quad (43)$$

Это утверждение доказывается так же, как и теорема 3.

13. Полученные выше оценки для разности $y - \overset{0}{y}$ можно использовать для уточнения теорем 1 и 2 работы [3]. Пусть $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi$ однородная трехточечная каноническая консервативная схема стандартного типа, принадлежащая исходному семейству схем, определенному в [3], а $y = y(x)$ — решение соответствующей задачи (35) для этой схемы.

Предположим, что коэффициенты $p, q, f \in C^{(1,1)}$ и удовлетворяют условиям

$$0 < c'_1 \leq p(x) \leq c_1, \quad 0 \leq q(x) \leq c_2, \quad |f(x)| \leq c_3,$$

где c'_1, c_1, c_2, c_3 — постоянные.

Оценим слагаемые, входящие в правую часть неравенства (43). Так как схема Λy удовлетворяет необходимым условиям второго порядка аппроксимации

$$A[1] = D[1] = F[1] = 1, \quad A_1[s] = -0,5, \quad D[s] = F[s] = 0,$$

то

$$a = p(x) - 0,5hp'(x) + O(h^2), \quad a - a^* = O(h^2), \\ d - d^* = O(h^2) + O(h_{+1}^2), \quad \varphi - \varphi^* = O(h^2) + O(h_{+1}^2).$$

Отсюда следует, что

$$\|a - a^*\|_1 = O(\|h\|_2^2), \quad \|d - d^*\|_1^* = O(\|h\|_2^2), \quad \|\varphi - \varphi^*\|_1^* = O(\|h\|_2^2).$$

Учитывая неравенство

$$\|y - u\|_0 \leq \|y - \overset{0}{y}\|_0 + \|\overset{0}{y} - u\|_0$$

и теорему 3, а также оценки $d_* = O(h)$, $\varphi_* = O(h)$, убеждаемся в справедливости теоремы 1 работы [3]:

$$\|y - u\|_0 \leq M\|h\|_2^2, \quad (44)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от сетки.

Для схемы $\Lambda^* y = (a^* y_{\bar{x}})_{\bar{x}} - d^* y + \varphi^*$ эта теорема может быть усилена.

Теорема 4. *Разностная схема $\Lambda^* y$, определяемая шаблонными функционалами (41), для любых $p, q, f \in C^{(0,1)}$ на произвольной последовательности неравномерных сеток имеет второй порядок точности:*

$$\|y^* - u\|_0 \leq M\|h\|_2^2. \quad (45)$$

В самом деле, если $p, q, f \in C^{(0,1)}$, то

$$d_* = O(h), \quad \varphi_* = O(h), \quad \|hd_*\|_1 = O(\|h\|_2^2), \quad \|h\varphi_*\|_1 = O(\|h\|_2^2).$$

Отсюда и из оценки

$$\|y^* - \overset{0}{y}\|_0 \leq M(\|hd_*\|_1 + \|h\varphi_*\|_1)$$

следует неравенство (45).

З а м е ч а н и е. Оценка (45) является равномерной в классе $C^{(0,1)}$ функций p, q, f , имеющих одну и ту же постоянную Липшица c_4 , причем M в (45) зависит только от c'_1, c_1, c_2, c_3 и c_4 .

14. Пусть $p, q, f \in Q^{(0,1)}$, $\xi = x_n + \theta h_{n+1}$ ($0 \leq \theta \leq 1$) — точка разрыва p, q, f . Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} d_*(x) &= O(h) && \text{при } x \neq x_n, \\ d_*(x_n) &= O(1) && \text{при } \theta < 0,5, \\ d_*(x) &= O(h) && \text{при } x \neq x_{n+1}, \\ d_*(x_{n+1}) &= O(1) && \text{при } \theta > 0,5. \end{aligned}$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\|hd_*\|_1 \leq M(\|h\|_2^2 + h_n^2 + h_{n+1}^2).$$

Аналогично оценивается $\|h\varphi_*\|_1$.

Теорема 5. Разностная схема Λ^*y в классе $Q^{(0,1)}$ коэффициентов p, q, f уравнения (1) имеет второй порядок точности, так что

$$\|y^* - u\|_0 \leq M \left[\|h\|_2^2 + \sum_{j=1}^{j_0} (h_{n_j}^2 + h_{n_j+1}^2) \right], \quad (46)$$

если $\xi_{n_j} = x_{n_j} + \theta_j h_{n_j+1}$ ($0 \leq \theta_j \leq 1$), $j = 1, 2, \dots, j_0$ — точки разрыва функций p, q, f .

Рассмотрим теперь произвольную стандартную схему, принадлежащую исходному семейству схем. Если $p, q, f \in Q^{(0,1)}$, то

$$\begin{aligned} \|a - a^*\|_1 &= O(\|h\|_2) + O(h_{n+1}), \quad \|d - d^*\|_1^* = O(\|h\|_2) + O(\bar{h}_n) + O(\bar{h}_{n+1}), \\ \|\varphi - \varphi^*\|_1^* &= O(\|h\|_2) + O(\bar{h}_n) + O(\bar{h}_{n+1}), \\ \|hd_*\|_1 &= O(\|h\|_2) + O(h_{n+1}), \quad \|h\varphi_*\|_1 = O(\|h\|_2) + O(h_{n+1}). \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы 3 следует

Теорема 6. Для произвольной исходной схемы $\Lambda y = L^{(p,q,f)}y$ стандартного типа справедливы оценки:

$$\|y - u\|_0 \leq M \left[\|h\|_2 + \sum_{j=1}^{j_0} (h_{n_j} + h_{n_j+1} + h_{n_j+2}) \right] \quad \text{при } p, q, f \in Q^{(0,1)}, \quad (47)$$

$$\|y - u\|_0 \leq M \left[\|h\|_2^2 + \sum_{j=1}^{j_0} (h_{n_j} + h_{n_j+1} + h_{n_j+2}) \right] \quad \text{при } p, q, f \in Q^{(1,1)}, \quad (48)$$

если $\xi_j = x_{n_j} + \theta_j h_{n_j+1}$ ($j = 1, 2, \dots, j_0$) — точки разрыва p, q, f .

Подчеркнем еще раз, что полученные выше оценки справедливы на любой последовательности разностных сеток для любых N . При этом M — положительные постоянные, не зависящие от выбора сеток ω_N .

Поступила в редакцию 29.09.1962

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 3. — С. 425–440.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 1. — С. 5–63.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1962. — Т. 2, № 5. — С. 812–832.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ТИПА РУНГЕ–КУТТА

А. Н. Тихонов, А. Д. Горбунов
(Москва)

1. Пусть для системы обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1)$$

где $y(x) = \{y^{(1)}(x), \dots, y^{(N)}(x)\}$ — искомая вектор-функция N измерений, $f(x, y) = \{f^{(1)}(x, y), \dots, f^{(N)}(x, y)\}$ — заданная вектор-функция от $N + 1$ переменных $x, y^{(1)}, \dots, y^{(N)}$, непрерывная и достаточно гладкая в некоторой замкнутой области \bar{G} пространства $\{x, y^{(1)}, \dots, y^{(N)}\}$, $(x_0, y_0) \in G$.

Пусть эта задача приближенно решается при помощи формулы типа Рунге–Кутта [1]. Построим уравнение погрешности метода, определяемого какой-либо формулой типа Рунге–Кутта, и с его помощью выведем мажорантные и асимптотические оценки погрешности этого метода.

2. Как известно [1], формулы типа Рунге–Кутта строятся так, что для каждой из них имеет место равенство

$$\Delta y(x_0) - \Delta y_0 = y(x_1) - y_1 = O(h^{s+1}), \quad (2)$$

где $\Delta y(x_0) = y(x_1) - y(x_0)$, $y(x)$ — точное решение задачи (1), $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ (y_1 — значение искомого приближенного решения задачи (1) в точке $x_1 = x_0 + h$, $h > 0$), s — степень метода (т. е. наибольшее натуральное число, удовлетворяющее равенству (2)).

Так как, кроме того, формулы типа Рунге–Кутта применяются рекуррентно, то при переходе от узла x_{k-1} к узлу x_k ($x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \dots$) соотношение (2) переписывается в следующем виде:

$$z_{k-1}(x_k) - z_{k-1}(x_{k-1}) - \Delta y_{k-1} = O(h^{s+1}), \quad k = 1, 2, \dots; \quad (3)$$

где $z_{k-1}(x)$ — точное решение задачи Коши,

$$z' = f(x, z), \quad z(x_{k-1}) = y_{k-1} \quad (4)$$

и $\Delta y_{k-1} = y_k - y_{k-1}$ (y_k — значение искомого приближенного решения, отвечающее узлу x_k). При этом, как легко видеть, имеет место равенство

$$z_{k-1}(x_k) - z_{k-1}(x_{k-1}) - \Delta y_{k-1} = z_{k-1}(x_k) - y_k. \quad (5)$$

Изложенное дает возможность построить разностное уравнение относительно погрешности метода, определяемого любой из формул типа Рунге-Кутты. Действительно, имеем:

$$\delta_k = y(x_k) - y_k = y(x_k) - z_{k-1}(x_k) + z_{k-1}(x_k) - y_k. \quad (6)$$

Согласно (3) и (5), последнее равенство переписывается в виде:

$$\delta_k = y(x_k) - z_{k-1}(x_k) + O(h^{s+1}). \quad (7)$$

Далее, выразим разность $y(x_k) - z_{k-1}(x_k)$ через δ_{k-1} . Для этого из тождества (1) вычтем тождество

$$z'_{k-1}(x) = f(x, z_{k-1}(x)).$$

Тогда по теореме о среднем получится

$$v'(x) = F(x) \cdot v(x), \quad (8)$$

где

$$v(x) = y(x) - z_{k-1}(x)$$

и

$$F(x) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{z=y(x)+\theta(x)v(x)}, \quad (9)$$

$\theta(x)$ — вектор средних значений, $0 < \theta(x) < 1$. Из уравнения (8) вследствие интегрирования при начальном условии

$$v(x_{k-1}) = \delta_{k-1}$$

находим:

$$v(x) = y(x) - z_{k-1}(x) = \widehat{\Omega}(x_{k-1}, x) \delta_{k-1}, \quad (10)$$

где $\widehat{\Omega}$ — матрицант матрицы F .

Внося в соотношение (6) выражение разности $y(x_k) - z_{k-1}(x_k)$, вытекающее из (10), получим разностное уравнение для погрешности метода в следующем виде:

$$\delta_k = \widehat{\Omega}(x_{k-1}, x_k)\delta_{k-1} + O(h^{s+1}). \quad (11)$$

3. Для получения мажорантной оценки погрешности метода в соотношении (11) перейдем к первой норме; тогда получится:

$$\|\delta_k\|_1 \leq \|\widehat{\Omega}(x_{k-1}, x_k)\|_1 \|\delta_{k-1}\|_1 + O(h^{s+1}). \quad (12)$$

Если через L обозначить константу Липшица для системы (1), то получится оценка

$$\|\widehat{\Omega}(x_{k-1}, x_k)\|_1 \leq \exp(hNL).$$

После чего неравенство (12) переписется в виде

$$\|\delta_k\|_1 \leq \exp(hNL) \cdot \|\delta_{k-1}\|_1 + O(h^{s+1}). \quad (13)$$

Учитывая, что $\|\delta_0\|_1 = 0$, и суммируя последнее разностное неравенство, найдем

$$\|\delta_k\|_1 \leq O(h^{s+1}) \sum_{j=0}^{k-1} \exp(jhNL). \quad (14)$$

Отсюда с учетом очевидного асимптотического равенства

$$h \sum_{j=0}^{k-1} \exp(jhNL) = \int_0^{x_k - x_0} \exp(\xi NL) d\xi + O(h) \quad (15)$$

получается нужная оценка

$$\|\delta_k\|_1 \leq O(h^s) \left[\int_0^{x_k - x_0} \exp(\xi NL) d\xi + O(h) \right]. \quad (16)$$

Тем самым доказана следующая

Теорема 1. *Если вектор-функция f по всем аргументам обладает первыми s непрерывными частными производными, то для погрешности метода, определяемого одной из формул типа Рунге-Кутты s -й степени, имеет место оценка (16).*

4. Перейдем к получению асимптотического разложения погрешности метода. Для этого перепишем формулу (2) в следующем виде:

$$\Delta y(x_0) - \Delta y_0 = h^{s+1} \cdot C \cdot \Psi(x_0, y_0) + O(h^{s+2}), \quad (17)$$

где Ψ — вполне определенный оператор от f , а C зависит только от рассматриваемой формулы типа Рунге-Кутты. В соответствии с этим равенство (3) переписывается так:

$$z_{k-1}(x_k) - z_{k-1}(x_{k-1}) - \Delta y_{k-1} = h^{s+1} \Psi(x_{k-1}, y_{k-1}) + O(h^{s+2}) \quad (18)$$

и, следовательно, уравнение погрешности метода (11) принимает вид

$$\delta_k = \widehat{\Omega}(x_{k-1}, x_k) \delta_{k-1} + h^{s+1} \cdot C \cdot \Psi(x_{k-1}, y_{k-1}) + O(h^{s+2}). \quad (19)$$

Суммирование последнего разностного уравнения приводит к формуле

$$\delta_k = h^{s+1} \cdot C \sum_{j=0}^{k-1} \widehat{\Omega}(x_{j+1}, x_k) \Psi(x_j, y_j) + O(h^{s+2}). \quad (20)$$

Так как неравенство (16) равносильно формуле

$$y_j - y(x_j) = O(h^s),$$

то справедливы разложения

$$\Psi(x_j, y_j) = \Psi(x_j, y(x_j)) + O(h^s),$$

$$\widehat{\Omega}(x_{j+1}, x_k) = \Omega(x_{j+1}, x_k) + O(h^s),$$

где Ω — матрицант матрицы $\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y(x)}$.

После этого (20) можно переписать так:

$$\delta_k = h^{s+1} \cdot C \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \Omega(x_{j+1}, x_k) \Psi(x_j, y(x_j)) + O(h^{s+2}). \quad (20')$$

Учитывая очевидную формулу

$$h \sum_{j=0}^{k-1} \Omega(x_{j+1}, x_k) \Psi(x_j, y(x_j)) = \int_{x_0}^{x_k} \Omega(\xi, x_k) \Psi(\xi, y(\xi)) d\xi + O(h), \quad (21)$$

из (20') получим разложение

$$\delta_k = h^s \cdot C \cdot \int_{x_0}^{x_k} \Omega(\xi, x_k) \Psi(\xi, y(\xi)) d\xi + O(h^{s+1}). \quad (22)$$

Таким образом доказана следующая

Теорема 2. *Если вектор-функция f по всем аргументам обладает первой $s + 1$ непрерывной частной производной, то для погрешности метода, определяемого одной из формул типа Рунге–Кутты, s -й степени, имеет место асимптотическое разложение (22).*

Эту теорему можно сформулировать несколько по-иному:

Теорема 3. *Если вектор-функция f по всем аргументам обладает первой $s + 1$ непрерывной частной производной, то погрешность метода, определяемого одной из формул типа Рунге–Кутты, s -й степени, может быть найдена в виде решения системы уравнений*

$$\frac{du}{dx} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y(x)} \cdot u + h^s \cdot C \Psi(x, y(x)) + O(h^{s+1}),$$

отвечающего нулевым начальным условиям.

Сравните с аналогичной теоремой из [2]).

5. Результаты, полученные в предшествующих пунктах, имеют также силу для любого метода, определяемого каждой из двусторонних формул типа Рунге–Кутты.

Поступила в редакцию 9.04.1962

Список литературы

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. — М.: Физматгиз, 1959.
2. Тихонов А. Н., Горбунов А. Д. Асимптотические разложения погрешности разностного метода решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1962. — Т. 2, № 4. — С. 537–548.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Член-корреспондент АН СССР А. Н. Тихонов, А. А. Самарский

Неоднократно высказывалась гипотеза, что если разностная схема устойчива в классе постоянных коэффициентов, то она устойчива и в классе переменных коэффициентов. В данной заметке приводится пример, показывающий, что эта гипотеза неверна, если в качестве класса переменных коэффициентов брать кусочно-непрерывные и кусочно-дифференцируемые функции¹⁾

1. Рассмотрим неявную разностную схему:

$$\frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau} = \frac{1}{h^2} [b_i(y_{i+1}^j - y_i^j) - a_i(y_i^j - y_{i-1}^j)] = L_h y_i^j, \quad (1)$$

$$0 < i < N, \quad j > 0,$$

и первую краевую задачу, ей соответствующую:

$$y_0^j = y_N^j = 0, \quad j \geq 0; \quad (2)$$

$$y_i^0 = \varphi_i, \quad 0 < i < N, \quad (3)$$

где φ_i — заданные начальные значения, причем

$$a_i = k_i - \frac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1}), \quad b_i = k_i + \frac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1}), \quad (4)$$

h и τ — шаги разностной сетки ($x_i = ih$, $t_j = j\tau$, $i = 0, 1, \dots, N$; $j = 0, \dots, m$; $h = 1/N$, $\tau = T/m$).

Эта схема соответствует уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad k(x) > 0, \quad (5)$$

в чем легко убедиться, если переписать ее в виде

$$\frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau} = k_i \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h}.$$

Разностная схема (1) с условиями (2) и (3) устойчива в классе непрерывных коэффициентов при достаточно малом h и любых τ , так как в этом случае $a_i > 0$, $b_i > 0$ и справедлив принцип максимального значения, откуда и следует равномерная по h корректность.

2. Будем искать решение разностных уравнений (1) с условиями (2) в виде $y_i^j = s^j v_i$. Для функции v_i получаем задачу на собственные значения

$$L_h v_i = -\hat{\lambda} v_i, \quad 0 < i < N, \quad v_0 = v_N = 0$$

или

$$L_h v_i = \lambda v_i, \quad v_0 = v_N = 0 \quad (\lambda = -\hat{\lambda}), \quad (6)$$

где $\lambda = (s-1)/s\tau$, так что $s = 1/(1-\lambda\tau)$.

Пусть $k(x) > 0$ — кусочно-постоянная функция

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{при } x < \xi = x_n + \theta h, \quad 0 < \theta < 1, \\ k_2 & \text{при } x > \xi, \end{cases} \quad (7)$$

где ξ — точка разрыва $k(x)$ — иррациональна.

Будет показано, что если

$$q_0 = \frac{a_n a_{n+1}}{\sqrt{k_1}} + \frac{b_n b_{n+1}}{\sqrt{k_2}} \quad (8)$$

отрицательно, то при достаточно малом $h < h_0$ задача (6) имеет положительное собственное значение λ_0 , причем $\lambda_0 > z_0/h$, где z_0 — произвольная положительная постоянная. Отсюда будет следовать, что при $q_0 < 0$

$$s^m = s^{T/\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} e^{\lambda_0 T} \geq e^{z_0 T/h} \quad (m\tau = T).$$

Для нашей схемы

$$q_0 = \frac{k_1^2}{\sqrt{k_2}} \left\{ \left[1 - \frac{1}{4}(\kappa - 1) \right] \left[\kappa - \frac{1}{4}(\kappa - 1) \right] \sqrt{\kappa} + \left[1 + \frac{1}{4}(\kappa - 1) \right] \left[\kappa + \frac{1}{4}(\kappa - 1) \right] \right\},$$

где $\kappa = k_2/k_1$.

Если $k_2 > k_1$ ($\kappa > 1$), то все квадратные скобки, кроме первой, положительны; если $\kappa > 5$, то первая скобка отрицательна и первое слагаемое внутри фигурных скобок также отрицательно. Так как степень по κ первого слагаемого равна $5/2$, а второго 2, то ясно, что существует такое κ_0 , что $q_0 < 0$ при $\kappa > \kappa_0$ (приближенное значение $\kappa_0 \simeq 11,88 \dots$).

3. Нетрудно проверить, что функция

$$v_i = \begin{cases} \nu_1 \frac{\operatorname{sh} \alpha x_i}{\operatorname{sh} \alpha x_n} & \text{при } i \leq n, \\ \nu_2 \frac{\operatorname{sh} \beta(1 - x_i)}{\operatorname{sh} \beta(1 - x_{n+1})} & \text{при } i \geq n + 1 \end{cases}$$

удовлетворяет условиям задачи (6) для $i < n$ и $i > n + 1$, если выполнены условия

$$\lambda h^2 = 4k_1 \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha h}{2} = 4k_2 \operatorname{sh}^2 \frac{\beta h}{2}. \quad (9)$$

Значения ν_1 и ν_2 определяются из уравнений (6) при $i = n$ и $i = n + 1$, а λ — из условия разрешимости этих уравнений относительно ν_1 и ν_2 .

Введем обозначения

$$\mu_1 = \frac{\operatorname{sh} \alpha x_n - \operatorname{sh} \alpha x_{n-1}}{\operatorname{sh} \alpha x_n};$$

$$\mu_2 = \frac{\operatorname{sh} \beta(1 - x_{n+1}) - \operatorname{sh} \beta(1 - x_{n+2})}{\operatorname{sh} \beta(1 - x_{n+1})}$$

и запишем уравнения (6) для $i = n, n + 1$ в виде

$$(\lambda h^2 + b_n + a_n \mu_1) \nu_1 - b_n \nu_2 = 0,$$

$$-a_{n+1} \nu_1 + (\lambda h^2 + a_{n+1} + b_{n+1} \mu_2) \nu_2 = 0.$$

Приравнявая определитель этой системы нулю, получим уравнение для λ :

$$F(\lambda, h) = \lambda^2 h^4 + p \lambda h^2 + q = 0,$$

где

$$p = b_n + a_{n+1} + a_n \mu_1 + b_{n+1} \mu_2,$$

$$q = a_n a_{n+1} \mu_1 + b_n b_{n+1} \mu_2 + a_n b_{n+1} \mu_1 \mu_2. \quad (10)$$

Требуется доказать, что при выполнении условия $q_0 < 0$ для любого z_0 найдется λ_0 — корень уравнения $F(\lambda, h) = 0$, причем $\lambda_0 > z_0/h$.

4. Нетрудно видеть, что $0 < \mu_1 < 1$, $0 < \mu_2 < 1$. Отсюда следует ограниченность p и q при заданных k_1 и k_2 . Рассмотрим произвольные числа z_1 и z_0 такие, что $z_1 < z_0$. Заменяем λ на z , полагая $z = \lambda h$; при этом функция $F(\lambda, h)$ преобразуется в функцию

$$\bar{F}(z, h) = F(\lambda, h) = z^2 h^2 + pzh + q.$$

В п. 5 будет доказано, что

$$q = q_0 \sqrt{zh} (1 + O(h)) + O(h), \quad (11)$$

где q_0 определяется формулой (8). Если $q_0 < 0$ ($\kappa > \kappa_0$) то при достаточно малом $h < h_0$

$$\bar{F}(z, h) < 0 \quad \text{при} \quad z_1 \leq z \leq z_0.$$

С другой стороны, при любом h , в силу ограниченности p, q ,

$$\bar{F}(z, h) > 0 \quad \text{при} \quad z > z(h) > z_0,$$

откуда следует, что при $q_0 < 0$ найдется корень уравнения $\bar{F}(z, h) = 0$, удовлетворяющий условию $z > z_0$, или корень уравнения $F(\lambda, h) = 0$, для которого $\lambda > z/h$, что и доказывает неустойчивость схемы (1) при $\kappa > \kappa_0$.

5. Докажем асимптотическое равенство (11). Очевидно, что для значений α и β , определяемых равенствами

$$zh = 4k_1 \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha h}{2} = 4k_2 \operatorname{sh}^2 \frac{\beta h}{2} \quad (9')$$

в интервале $z_1 \leq z \leq z_0$ имеют место асимптотические равенства по h :

$$\alpha h = \sqrt{\frac{zh}{k_1}} (1 + O(h)), \quad \beta h = \sqrt{\frac{zh}{k_2}} (1 + O(h)). \quad (12)$$

Кроме того, при $z_1 \leq z \leq z_0$

$$\mu_1 = 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha h}{2} \frac{\operatorname{ch} \alpha(x_n - 0,5h)}{\operatorname{sh} \alpha x_n} = \alpha h [1 + O(\alpha^2 h^2)] = \alpha h [1 + O(h)] \quad (13)$$

и аналогично

$$\mu_2 = \beta h (1 + O(h)). \quad (13')$$

Подставляя равенства (13), (13') в выражение (10) для q , получаем

$$q = \left(\frac{a_n a_{n+1}}{\sqrt{k_1}} + \frac{b_n b_{n+1}}{\sqrt{k_2}} \right) \sqrt{zh} (1 + O(h)) + O(h) = q_0 \sqrt{zh} (1 + O(h)) + O(h),$$

где q_0 определяется формулой (8).

Таким образом доказана неустойчивость схемы (1) при $\kappa = k_2/k_1 > \kappa_0$ и достаточно малом $h < h_0$.

Нетрудно убедиться (ср. [1]), что в тех случаях, когда схема (7) для кусочно-постоянных коэффициентов $k(x)$ сходится, предельная функция для y_i^j будет отлична от решения соответствующей краевой задачи для дифференциального уравнения (5). Для сходимости в классе разрывных коэффициентов схемы

$$\frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau} = L_h y_i^j$$

необходимо и достаточно, чтобы оператор $L_h y_i$ был консервативным (самосопряженным), т. е. чтобы $b_i = a_{i+1}$ (см. [1]).

Поступило 29 XII 1962

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Разностная задача Штурма—Лиувилля // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 5. — С. 784–805.

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ТИПА РУНГЕ–КУТТА И ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ СЕТОК

А. Н. Тихонов, А. Д. Горбунов
(Москва)

Целью настоящей статьи является формирование способов выбора оптимальных сеток при решении методом Рунге–Кутты задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1)$$

где $y(x) = \{y^{(1)}(x), \dots, y^{(N)}(x)\}$ — искомая вектор-функция N измерений, $f(x, y) = \{f^{(1)}(x, y), \dots, f^{(N)}(x, y)\}$ — заданная вектор-функция от $N + 1$ переменных $x, y^{(1)}, \dots, y^{(N)}$, непрерывная и достаточно гладкая в некоторой замкнутой области \bar{G} пространства $\{x, y^{(1)}, \dots, y^{(N)}\}$; $(x_0, y_0) \in G$.

§ 1 посвящен анализу неравномерных сеток узлов, подразделяющих данный отрезок. В этом параграфе вводятся понятия параметра и функции распределения шагов сетки. Параметр и функция распределения шагов в своей совокупности составляют представление неравномерной сетки.

В § 2 выводится асимптотическое разложение меры погрешности метода с использованием элементов представления неравномерной сетки (см. формулы (2.11) и (2.20)).

§ 3 содержит решение задачи о выборе оптимальных сеток. При $N = 1$ этот выбор осуществляется на основе минимизации модуля главного члена меры погрешности метода (см. формулу (2.20)). При этом функция распределения шагов может быть вычисляема в процессе интегрирования.

При $N > 1$ оптимальная сетка выбирается из условия минимизации модуля главного члена асимптотического разложения меры погрешности метода какой-либо «предпочтительной» координаты или из условия минимизации некоторой «нормы» главного члена асимптотического разложения меры погрешности метода.

§ 1. Неравномерные сетки

1. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неравномерная сетка узлов, подразделяющая этот отрезок:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b; \quad (1.1)$$

$$h_k = x_{k+1} - x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.2)$$

h_k суть шаги этой сетки, h — ее норма,

$$h = \max_{0 \leq i \leq n-1} h_i. \quad (1.3)$$

Полагая

$$\varphi_k = \frac{h_k}{h}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.4)$$

и

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi_k \quad \text{при} \quad x_k \leq x < x_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.4')$$

получим функцию, удовлетворяющую условиям

$$h_k = h\bar{\varphi}(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.5)$$

В дальнейшем $\bar{\varphi}(x)$ будем называть нормальной функцией распределения шагов сетки. Заданием нормы и нормальной функции распределения шагов, очевидно, полностью определяется сетка.

Введем следующее определение. Положительное число λ и положительную непрерывно дифференцируемую на $[a, b]$ функцию $\varphi(x)$ будем называть, соответственно, параметром и функцией распределения шагов сетки, если выполнены следующие условия:

$$1) \quad h_k = \lambda\varphi(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \quad (1.6)$$

$$2) \quad h_{n-1} \leq \lambda\varphi(x_{n-1}).$$

Связь между нормой сетки и ее параметром может быть характеризована соотношениями

$$h = O(\lambda), \quad \lambda = O(h), \quad (1.7)$$

причем в качестве констант в приведенных оценках могут быть приняты, соответственно,

$$\max_{a \leq x \leq b} \varphi(x) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\min_{a \leq x \leq b} \varphi(x)}. \quad (1.8)$$

Обозначим через S множество всевозможных сеток, подразделяющих отрезок $[a, b]$, а через \overline{C}_1 — множество положительных непрерывно дифференцируемых функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Запись (λ, φ) , где λ — положительное число, а $\varphi \in \overline{C}_1$, будем называть представлением соответствующей сетки σ из S и писать $\sigma = (\lambda, \varphi)$. Легко видеть, что при фиксированном $\lambda > 0$ отображение

$$\sigma = (\lambda, \varphi), \quad \varphi \in \overline{C}_1, \quad \sigma \in S \quad (1.9)$$

является однозначным отображением множества \overline{C}_1 на множество S .

2. Из сказанного в предыдущем пункте вытекает, что параметр сетки, в отличие от ее нормы, не является самостоятельной характеристикой. Он характеризует ее только в совокупности с одной из соответствующих функций распределения шагов. Чтобы сделать параметр сетки более эффективной характеристикой, нужно сузить множество представлений. Для этого могут применяться различные способы нормировки. Под нормировкой представлений мы будем понимать способ выбора определенного элемента из каждого класса представлений вида

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}, \alpha\varphi\right), \quad (1.10)$$

где α — произвольное положительное число.

Рассмотрим примеры нормировки.

1) Выберем из каждого класса вида (1.10) представление, для которого α определяется из условия $\lambda/\alpha = h$ (h — норма сетки σ). При нормированных таким образом представлениях параметром сетки всегда будет ее норма.

2) Выберем из каждого класса (1.10) представление, для которого α определяется из условия

$$\int_a^b \frac{dx}{\alpha\varphi(x)} = 1. \quad (1.11)$$

При нормированных таким образом представлениях параметр λ любой сетки из S асимптотически равен обратной величине числа n ее шагов (ср. с [1]).

Действительно, суммируя равенства

$$\lambda = \frac{h_k}{\varphi(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

которые получаются из (1.6), и учитывая условия нормирования, будем иметь

$$n\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k}{\varphi(x_k)} = 1 + O(h); \quad (1.12)$$

в качестве константы в оценке последнего члена может быть принят максимум модуля производной от функции $1/\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если учесть первое из соотношений (1.7), то (1.12) переписывается в виде

$$n\lambda = 1 + O(\lambda). \quad (1.13)$$

Отсюда получаются соотношения

$$\frac{1}{n} = \lambda + O(\lambda^2), \quad (1.14)$$

$$\lambda = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (1.15)$$

§ 2. Оценки погрешности метода

1. Как известно (см. [2], с. 286–311), формулы типа Рунге–Кутты и на неравномерной сетке $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ строятся так, что для каждой из них имеет место равенство

$$\Delta y(x_0) - \Delta y_0 = y(x_1) - y_1 = O(h_0^{s+1}), \quad (2.1)$$

где $\Delta y(x_0) = y(x_1) - y(x_0)$ ($y(x)$ — точное решение задачи (1)), $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ (y_1 — значение искомого приближенного решения задачи (1) в точке $x_1 = x_0 + h_0$, $h_0 > 0$ — нулевой шаг сетки), s — степень метода (т. е. наименьшее натуральное число, удовлетворяющее равенству (2.1)).

Так как, кроме того, формулы типа Рунге–Кутты применяются рекуррентно, то при переходе от узла x_{k-1} к узлу x_k ($x_k = x_{k-1} + h_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$) соотношение (2.1) переписывается в следующем виде:

$$z_{k-1}(x_k) - z_{k-1}(x_{k-1}) - \Delta y_{k-1} = O(h_{k-1}^{s+1}), \quad (2.2)$$

где $z_{k-1}(x)$ — точное решение задачи Коши

$$z' = f(x, z), \quad z(x_{k-1}) = y_{k-1} \quad (2.3)$$

и $\Delta y_{k-1} = y_k - y_{k-1}$ (y_k — значение искомого приближенного решения, отвечающее узлу x_k).

Изложенное дает возможность построить разностное уравнение относительно погрешности метода в следующем виде (см. [3]):

$$\delta_k = \widehat{\Omega}(x_{k-1}, x_k) \delta_{k-1} + O(h_{k-1}^{s+1}), \quad (2.4)$$

где $\widehat{\Omega}$ — матрицант матрицы $\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y(x)+\theta(x) \times [y(x)-z_{k-1}(x)]}$, $\theta(x)$ — вектор средних значений, $0 < \theta^{(i)}(x) < 1$, символ \times обозначает прямое произведение двух векторов. Это уравнение неудобно тем, что в нем под знак O входит переменный шаг сетки.

2. Для получения мажорантной оценки погрешности метода просуммируем неравенство

$$\|\delta_k\|_1 \leq \exp(h_{k-1}NL) \|\delta_{k-1}\|_1 + h_{k-1}O(h^s), \quad (2.5)$$

в котором L обозначает константу Липшица системы (1). (Оно получается из уравнения (2.4) с учетом равенства (1.5) тем же способом, который изложен в [3].) В результате этого получается оценка

$$\|\delta_k\|_1 \leq O(h^s) \left[\int_{x_0}^{x_k} \exp((x_k - \xi)NL) d\xi + O(h) \right]. \quad (2.6)$$

Тем самым доказана следующая

Теорема 1. *Если вектор-функция f по всем аргументам обладает первыми s непрерывными частными производными, то для погрешности метода, определяемого одной из формул типа Рунге-Кутты, s -й степени, при всякой неравномерной сетке имеет место оценка (2.6), причем константы, входящие в оценки $O(h^s)$ и $O(h)$, зависят только от задачи (1) и используемой формулы типа Рунге-Кутты.*

3. Перейдем к получению асимптотического разложения погрешности метода. Для этого перепишем формулу (2.1) в следующем виде:

$$\Delta y(x_0) - \Delta y_0 = h_0^{s+1} C \psi(x_0, y_0) + O(h_0^{s+2}), \quad (2.7)$$

где C — константа, зависящая от применяемого метода, и $\psi = \psi[f]$ — вполне определенный оператор от f . В соответствии с этим равенство (2.3) переписывается так:

$$z_{k-1}(x_k) - z_{k-1}(x_{k-1}) - \Delta y_k = h_{k-1}^{s+1} C \psi(x_{k-1}, y_{k-1}) + O(h_{k-1}^{s+2}), \quad (2.8)$$

и, следовательно, уравнение погрешности метода (2.4) принимает вид

$$\delta_k = \widehat{\Omega}(x_{k-1}, x_k)\delta_{k-1} + h_{k-1}^{s+1}C\psi(x_{k-1}, y_{k-1}) + O(h_{k-1}^{s+2}).$$

Если, кроме того, учесть равенство (1.6), то последнее уравнение можно будет записать так:

$$\delta_k = \widehat{\Omega}(x_{k-1}, x_k)\delta_{k-1} + \lambda^s C\psi(x_{k-1}, y_{k-1})\varphi^s(x_{k-1})h_{k-1} + h_{k-1}O(\lambda^{s+1}). \quad (2.9)$$

Суммирование последнего разностного уравнения приводит к формуле

$$\delta_k = \lambda^s C \sum_{i=1}^k \widehat{\Omega}(x_i, x_k)\psi(x_{i-1}, y_{i-1})\varphi^s(x_{i-1})h_{i-1} + O(\lambda^{s+1}). \quad (2.10)$$

Так как неравенство (2.6) вместе с первым соотношением (1.7) равносильно оценке $y_j - y(x_j) = O(\lambda^s)$, то справедливы разложения

$$\psi(x_j, y_j) = \psi(x_j, y(x_j)) + O(\lambda^s), \quad \widehat{\Omega}(x_i, x_k) = \Omega(x_i, x_k) + O(\lambda^s),$$

где Ω — матрицант матрицы $\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y(x)}$.

После этого (2.10) можно переписать в виде

$$\delta_k = \lambda^s C \sum_{i=1}^k \Omega(x_i, x_k)\psi(x_{i-1}, y(x_{i-1}))\varphi^s(x_{i-1})h_{i-1} + O(\lambda^{s+1}). \quad (2.10')$$

Учитывая очевидную формулу

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \Omega(x_i, x_k)\psi(x_{i-1}, y(x_{i-1}))\varphi^s(x_{i-1})h_{i-1} &= \\ &= \int_{x_0}^{x_k} \Omega(\xi, x_k)\psi(\xi, y(\xi))\varphi^s(\xi) d\xi + O(\lambda), \end{aligned}$$

из (2.10) получим разложение

$$\delta_k = \lambda^s C \int_{x_0}^{x_k} \Omega(\xi, x_k)\psi(\xi, y(\xi))\varphi^s(\xi) d\xi + O(\lambda^{s+1}). \quad (2.11)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Если вектор-функция f по всем аргументам обладает первой $s + 1$ непрерывной частной производной, то для погрешности метода, определяемого одной из формул типа Рунге–Кутты, s -й степени, при всякой неравномерной сетке имеет место асимптотическое разложение (2.11), причем константа, входящая в оценку последнего члена, зависит от задачи (1), применяемой формулы типа Рунге–Кутты и функции $\varphi(x)$ распределения шагов этой сетки при параметре λ .

Эту теорему можно сформулировать несколько по-иному:

Теорема 3. Если вектор-функция f по всем аргументам обладает первой $s + 1$ непрерывной частной производной, то асимптотическое разложение погрешности метода, определяемого одной из формул типа Рунге–Кутты, s -й степени, при любой неравномерной сетке может быть построено в виде решения системы уравнений

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f(y, x)}{\partial y} \Big|_{y=y(x)} u + \lambda^s C \psi(x, y(x)) \varphi^s(x) + O(\lambda^{s+1}), \quad (2.12)$$

отвечающего нулевым начальным условиям.

4. Во многих случаях целесообразно пользоваться мерой погрешности метода.

Имея в виду обозначения

$$\delta(x) = \{\delta^{(1)}(x), \dots, \delta^{(N)}(x)\},$$

$$y(x) = \{y^{(1)}(x), \dots, y^{(N)}(x)\},$$

под мерой погрешности метода i -й координаты приближенного решения задачи (1) будем понимать выражение

$$v^{(i)}(x) = \frac{\delta^{(i)}(x)}{|y^{(i)}(x)|^{p_i}} (q \operatorname{sign} y^{(i)}(x))^{p_i}, \quad (2.13)$$

причем полагается $p_i = 0$ при $|y^{(i)}(x)| \leq q$ и $p_i = 1$ при $|y^{(i)}(x)| \geq q$, q — вполне определенное число, выбираемое с учетом особенностей решаемой задачи. Очень часто полагают $q = 1$. Вектор

$$v(x) = \{v^{(1)}(x), \dots, v^{(N)}(x)\} \quad (2.14)$$

будем называть мерой погрешности метода приближенного решения задачи (1).

Составим дифференциальное уравнение для меры погрешности метода типа Рунге–Кутты. Дифференцируя равенство (2.13) по x , получим

$$\frac{dv^{(i)}(x)}{dx} = \frac{\frac{d\delta^{(i)}(x)}{dx} (y^{(i)}(x))^{p_i} - \delta^{(i)}(x) p_i \frac{dy^{(i)}(x)}{dx}}{(y^{(i)}(x))^{2p_i}} (q \operatorname{sign} y^{(i)}(x))^{p_i}. \quad (2.15)$$

Исключая из правой части последнего равенства производные при помощи уравнений (1) и (2.12), получим уравнение относительно $v(x)$:

$$\frac{dv(x)}{dx} = A(x)v(x) + \lambda^s C \bar{\psi}(x, y(x)) \varphi^s(x) + O(\lambda^{s+1}), \quad (2.16)$$

где положено

$$A(x) = B(x) \times \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y(x)} - \begin{bmatrix} p_1 \frac{f^{(1)}(x, y(x))}{(y^{(1)}(x))^{p_1}} (q \operatorname{sign} y^{(1)}(x))^{p_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p_N \frac{f^{(N)}(x, y(x))}{(y^{(N)}(x))^{p_N}} (q \operatorname{sign} y^{(N)}(x))^{p_N} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$B^{(i,j)}(x) = \left(\frac{y^{(j)}(x)}{y^{(i)}(x)} q \operatorname{sign} y^{(i)}(x) \right)^{p_i}, \quad (2.18)$$

$$\bar{\psi}(x, y(x)) = \left[\left(\frac{q \operatorname{sign} y^{(1)}(x)}{y^{(1)}(x)} \right)^{p_1}, \dots, \left(\frac{q \operatorname{sign} y^{(N)}(x)}{y^{(N)}(x)} \right)^{p_N} \right] \times \psi(x, y(x)). \quad (2.19)$$

Интегрирование уравнения (2.16) при нулевых начальных значениях приводит к асимптотическому разложению для меры погрешности метода:

$$v(x) = \lambda^s C \int_{x_0}^x \Xi(\xi, x) \bar{\psi}(\xi, y(\xi)) \varphi^s(\xi) d\xi + O(\lambda^{s+1}), \quad (2.20)$$

где Ξ — матрицант матрицы $A(x)$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4. *Если вектор-функция f по всем аргументам обладает первой $s+1$ непрерывной частной производной, то для меры погрешности метода, определяемого одной из формул типа Рунге–Кутты, s -й степени, при всякой неравномерной сетке имеет место асимптотическое разложение (2.20). При этом константа, входящая в оценку последнего члена, зависит от задачи (1), применяемой формулы типа Рунге–Кутты и функции $\varphi(x)$ распределения шагов используемой сетки при параметре λ .*

Легко понять, что при $p_i \equiv 0$ и $x = x_k$ формула (2.20) превращается в формулу (2.11), а при $p_i \equiv 1$ формула (2.20) представляет собой асимптотическое разложение вектора взвешенных относительных погрешностей координат решения задачи (1); при этом предполагается, что ни одна из этих координат не обращается в нуль.

С л е д с т в и е. *Если в условиях теоремы 4 в качестве представления сетки принимается ее норма и нормальная функция распределения шагов, то формула (2.20) принимает вид*

$$v(x) = h^s C \int_{x_0}^x \Xi(\xi, x) \bar{\psi}(\xi, y(\xi)) \bar{\varphi}^s(\xi) d\xi + O(\lambda^{s+1}), \quad (2.21)$$

причем константа, входящая в оценку последнего члена, зависит только от задачи (1) и применяемой формулы типа Рунге–Кутты.

5. Результаты, изложенные в предшествующих пунктах настоящего параграфа, имеют также силу для любого метода, определяемого каждой из двухсторонних формул типа Рунге–Кутта [4].

§ 3. Выбор оптимальных сеток

1. Рассмотрим случай $N = 1$, т. е. задачу Коши (1) для одного дифференциального уравнения первого порядка. Пусть эта задача решается при помощи некоторой формулы типа Рунге–Кутты. Тогда формулу (2.20) при $x = \bar{x}$ можно переписать так:

$$v(\bar{x}) = \lambda^s C K \int_{x_0}^{\bar{x}} P(x) \varphi^s(x) dx + O(\lambda^{s+1}), \quad (3.1)$$

где

$$K = \exp \left(\int_{x_0}^{\bar{x}} A(\eta) d\eta \right) \quad (3.2)$$

и $P(x)$ не зависит от верхнего предела \bar{x} и определяется по формуле

$$P(x) = \exp \left(- \int_{x_0}^x A(\eta) d\eta \right) \bar{\psi}(x, y(x)). \quad (3.3)$$

Далее предположим, что функция $\bar{\psi}(x, y(x))$ сохраняет знак на отрезке $[x_0, \bar{x}]$, и положим

$$Q(x) = |P(x)|. \quad (3.4)$$

Имея это в виду, выберем функцию $\varphi(x)$ так, чтобы функционал

$$I_1[\varphi] = \int_{x_0}^{\bar{x}} Q(x) \varphi^s(x) dx \quad (3.5)$$

принимал минимальное значение на совокупности Φ положительных непрерывно дифференцируемых функций, определенных на отрезке $[x_0, \bar{x}]$ и удовлетворяющих условию нормировки:

$$I_0[\varphi] = \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{dx}{\varphi(x)} = 1. \quad (3.6)$$

Сформулированная задача является вариационной задачей на условный экстремум (сравни с [1]). Варьируя на множестве Φ функционал

$$I[\varphi] = I_1[\varphi] - \mu I_0[\varphi], \quad (3.7)$$

получим необходимое условие экстремума:

$$\delta I = \int_{x_0}^{\bar{x}} \left\{ sQ(x)\varphi^{s-1}(x) - \frac{\mu}{\varphi^2(x)} \right\} \delta\varphi(x) dx = 0. \quad (3.8)$$

Отсюда, в силу леммы Лагранжа [5], находим уравнение экстремали

$$sQ(x)\varphi^{s-1}(x) - \frac{\mu}{\varphi^2(x)} = 0. \quad (3.9)$$

Решение этого уравнения записывается в виде

$$\varphi_0(x) = \frac{M}{s+1\sqrt{Q(x)}}, \quad (3.10)$$

где M — константа; она определяется из условия (3.6) в следующем виде:

$$M = \int_{x_0}^{\bar{x}} [Q(x)]^{1/(s+1)} dx. \quad (3.11)$$

После этого оценка (3.1) переписывается так:

$$v(\bar{x}) = \lambda^s C K M^{s+1} \operatorname{sign} P(x) + O(\lambda^{s+1}). \quad (3.12)$$

Здесь λ — произвольный параметр, C — константа, зависящая только от метода приближенного интегрирования, и M вычисляются, соответственно, по формулам (3.3), (3.4) и (3.11).

Теорема 5. *При условии, что функция $\bar{\psi}(x, y(x))$ на отрезке $[x_0, \bar{x}]$ сохраняет знак при любом допустимом значении параметра λ , абсолютная величина главного члена оценки (3.12) равна минимуму абсолютной величины главного члена оценки (3.2), если функция $\varphi(x)$ варьируется на множестве Φ .*

Доказательство. Рассмотрим разность

$$I_1[\varphi_0 + \mu\varphi_1] - I_1[\varphi_0] = \int_{x_0}^{\bar{x}} Q(x) \{ [\varphi_0(x) + \mu\varphi_1(x)]^s - \varphi_0^s(x) \} dx,$$

где $\varphi_1(x)$ — вариация функции $\varphi_0(x)$ и μ — произвольное положительное число. Отсюда по формуле бинома Ньютона будем иметь

$$\begin{aligned} I_1[\varphi_0 + \mu\varphi_1] - I_1[\varphi_0] &= \int_{x_0}^{\bar{x}} s\mu Q(x)\varphi_0^{s-1}(x)\varphi_1(x) dx + \\ &+ s(s-1)\mu^2 \int_{x_0}^{\bar{x}} Q(x)\varphi_0^{s-2}(x)\varphi_1^2(x) dx + O(\mu^3). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Учитывая равенство

$$\delta I_0 = \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0^2(x)} dx = 0,$$

вытекающее из (3.6), и соотношение (3.8), получим:

$$I_1[\varphi_0 + \mu\varphi_1] - I_1[\varphi_0] = s(s-1)\mu^2 \int_{x_0}^{\bar{x}} Q(x)\varphi_0^{s-2}(x)\varphi_1^2(x) dx + O(\mu^3). \quad (3.14)$$

Следовательно, при достаточно малом μ будет

$$I_1[\varphi_0 + \mu\varphi_1] - I_1[\varphi_0] > 0, \quad (3.15)$$

что и требовалось.

Так как множество сеток, соответствующих представлениям (λ, φ) , $\lambda > 0$, $\varphi \in \Phi$, исчерпывает множество всевозможных неравномерных сеток, подразделяющих отрезок $[x_0, \bar{x}]$ (см. пример 2, § 1), то из теоремы 5 вытекает, что если приближенное решение задачи (1) при $N = 1$ строится с помощью некоторого метода типа Рунге–Кутты на сетке узлов $\sigma_0 = (\lambda, \varphi_0)$, то абсолютная величина главного члена оценки (3.12) меры погрешности метода принимает наименьшее значение. В этом смысле сетка σ_0 называется оптимальной.

Отметим, что в силу соотношений (1.14) и (1.15) оценка (3.1) может быть заменена асимптотически эквивалентной ей:

$$v(\bar{x}) = \frac{1}{n^s} CK \int_{x_0}^{\bar{x}} P(x)\varphi^s(x) dx + O\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right), \quad (3.2')$$

где n — число узлов сетки $\sigma = (\lambda, \varphi)$.

Если в качестве оценочной функции $\hat{v}(x)$ берется главный член разложения (3.2'), а именно

$$\hat{v}(\bar{x}) = \frac{1}{n^s} CK \int_{x_0}^{\bar{x}} P(x)\varphi^s(x) dx,$$

то при заданном числе шагов n эта оценочная функция ошибки будет иметь минимальное значение для функции $\varphi = \varphi_0$. Иными словами, если проводится сравнение двух сеток, производимых функциями φ и φ_0 , и если n достаточно велико, так что мы находимся в зоне асимптотики, то ошибка на сетке $(1/n, \varphi)$ будет меньше, чем на сетке $(1/n, \varphi_0)$. Следует иметь в виду, что при практических вычислениях мы, как правило, находимся в зоне асимптотики.

Оптимальная сетка $(1/n, \varphi_0)$ при заданном значении n , как легко видеть, может быть построена последовательно в процессе решения задачи (1) при $N = 1$.

2. В общем случае, т. е. когда задача (1) решается для системы уравнений, выбор оптимальной сетки будем связывать с минимизацией модуля главного члена асимптотического разложения меры погрешности метода некоторой «предпочтительной» координаты решения при любом допустимом фиксированном значении параметра λ . Обозначая через i номер «предпочтительной» координаты, для меры погрешности метода, согласно (2.20), получим выражение

$$v^{(i)}(x) = \lambda^s C \int_{x_0}^{\bar{x}} P(x) \varphi^s(x) dx + O(\lambda^{s+1}), \quad (3.16)$$

где

$$P(x) = \sum_{j=1}^N \Xi^{(i,j)}(x, \bar{x}) \bar{\psi}^{(j)}(x, y(x)). \quad (3.17)$$

В предположении, что $P(x)$ сохраняет знак на отрезке $[x_0, \bar{x}]$, функцию распределения шагов оптимальной сетки построим по формулам (3.4), (3.10) и (3.11), имея в виду, что $P(x)$ определяется по формуле (3.17).

В рассматриваемом случае может оказаться целесообразным определять оптимальную сетку из условия минимизации некоторой «нормы» главного члена асимптотического разложения меры погрешности метода при любом допустимом фиксированном значении параметра λ .

3. При построении оптимальной сетки предварительно необходимо построить приближенное решение задачи (1) по какой-либо подходящей сетке, в результате чего эффективно определится функция распределения

шагов оптимальной сетки и главный член оценки (3.12). Тогда из требования определенной точности счета может быть определено значение параметра сетки.

Поступила в редакцию 12.07.1963

Список литературы

1. *Morrison D.* Optimal mesh size in the numerical integration of an ordinary differential equation // *J. Assoc. Comput. Machinery.* — 1962. — V. 9, № 1. — P. 98–103.
2. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 2. — М.: Физматгиз, 1959.
3. *Тихонов А. Н., Горбунов А. Д.* Об асимптотических оценках погрешности метода типа Рунге–Кутты // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики.* — 1963. — Т. 3, № 1. — С. 195–197.
4. *Горбунов А. Д., Шахов Ю. А.* О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики.* — 1963. — Т. 3, № 2. — С. 239–253.
5. *Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.* Курс вариационного исчисления. — М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1958.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СЕТОК ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ РУНГЕ–КУТТА

А. Н. Тихонов, А. Д. Горбунов, С. С. Гайсарян

1. В работе А. Н. Тихонова и А. Д. Горбунова [1] был предложен способ выбора оптимальных неравномерных сеток при численном решении системы N обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

(y и f — N -мерные векторы) на отрезке $x_0 \leq x \leq \bar{x}$ одним из методов Рунге–Кутта степени s . Оптимальность сетки означает, что мы получаем в точке \bar{x} заданную точность ε за наименьшее возможное количество шагов. Неравномерная сетка задается при помощи постоянной λ , называемой параметром сетки, и непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ распределения шагов сетки, так что в любом узле $x_i \in [x_0, \bar{x}]$ шаг интегрирования h_i определяется по формуле

$$h_i = \lambda \varphi(x_i). \quad (2)$$

Оптимальность сетки достигается соответствующим выбором параметра сетки λ и функции $\varphi(x)$. Из работы [1] следует, что если система (1) решается методом Рунге–Кутта s -й степени с остаточным членом $h^s \psi(x, y(x))$, то параметр сетки λ и функция $\varphi(x)$ распределения ее шагов определяются

по формулам

$$\varphi(x) = \frac{M}{s+1\sqrt{|P(x)|}}, \quad (3)$$

$$\lambda = \sqrt[s]{\frac{\varepsilon}{C \int_{x_0}^{\bar{x}} |P(\xi)| \varphi^s(\xi) d\xi}}, \quad (4)$$

где

$$M = \int_{x_0}^{\bar{x}} |P(\xi)|^{\frac{s}{s+1}} d\xi, \quad (5)$$

$$P(x) = \Xi(x, x_0) \bar{\psi}(x, y(x)), \quad (6)$$

$\Xi(x, x_0)$ — матрицант матрицы $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y(x)}$, а ε — точность, которую мы хотим

получить в точке \bar{x} . В случае $N = 1$

$$\Xi(x, x_0) = \exp \left(\int_{x_0}^x \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y(\xi)} d\xi \right).$$

Таким образом, для построения $\varphi(x)$ и вычисления λ необходимо знать, хотя бы очень грубо, решение задачи (1) на отрезке $[x_0, \bar{x}]$, иначе нельзя вычислить $P(x)$ и M . Поэтому в алгоритме решения задачи (1) необходимо предусмотреть предварительный расчет, в результате которого мы можем еще не знать $y(\bar{x})$ с требуемой степенью точности, но сможем вычислить λ и $\varphi(x)$, что даст нам возможность получить требуемую точность в точке \bar{x} при втором расчете.

С целью разработки такого алгоритма в ВЦ МГУ проведен ряд экспериментальных расчетов. В первую очередь были проведены вычисления для случая $N = 1$ (одно уравнение первого порядка). В этом случае алгоритм проще, так как предварительный расчет можно производить на неравномерной сетке. В случае $N > 1$ предварительный расчет проводится на равномерной сетке.

2. Приведем способ решения задачи (1) в случае $N = 1$.

Предварительный расчет. задается произвольное значение параметра сетки $\lambda_{\text{гр}}$. Шаги определяются по формуле

$$h_i = \lambda_{\text{гр}} |P(x_i)|^{-\frac{1}{s+1}}, \quad (7)$$

где

$$P(x_i) = \exp\left(-\sum_{j=0}^{i-1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=y(x_j)} - p \frac{f(x_j, y(x_j))}{y(x_j)} \right\} h_j\right) \frac{\psi(x_i, y(x_i))}{|y(x_i)|^p}, \quad (8)$$

$$p = \begin{cases} 0, & |y_i| \leq 1, \\ 1, & |y_i| > 1. \end{cases} \quad (9)$$

Если мы знаем решение в точках x_0, x_1, \dots, x_i , то $P(x_i)$ легко вычислить по формуле (8), после чего по формуле (7) вычисляем h_i ; y_i находим по соответствующим формулам Рунге–Кутты, $h^s \psi(x, y(x))$ — остаточный член этих формул, а s — их степень.

Цель предварительного расчета — вычислить интегральные суммы (заменяющие соответствующие интегралы):

$$S = \sum_{i=0}^N |P(x_i)|^{\frac{1}{s+1}} \operatorname{sign} P(x_i) h_i, \quad (10)$$

$$S^* = CS \exp\left(\sum_{i=0}^n \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=y(x_i)} - p \frac{f(x_i, y(x_i))}{y(x_i)} \right\} h_i\right), \quad (11)$$

где n — номер последнего h_i , а C — константа в выражении $\psi(x, y)$.

Достигнув точки $x \approx \bar{x}$ (это достигается тем, что в случае $h_n > \bar{x} - x_n$ h_n полагается равным $\bar{x} - x_n$), сравниваем $\lambda_{\text{rp}}^s S$ с ε :

если $|\lambda_{\text{rp}}^s S| \leq \varepsilon$, то мы получили требуемую точность в точке \bar{x} , необходимость в повторном расчете отпадает;

если же $|\lambda_{\text{rp}}^s S| > \varepsilon$, то по формуле

$$\lambda = \sqrt[s]{\varepsilon(S^*)^{-1}} \quad (12)$$

вычисляем новый параметр сетки и повторяем расчет. При повторном расчете h_i вычисляются по формуле

$$h_i = \lambda |P(x_i)|^{-\frac{1}{s+1}}. \quad (7^*)$$

3. По описанному алгоритму рассчитаны некоторые примеры. При этом использовались формулы Рунге-Кутты второго порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (k_i^{(1)} + k_i^{(2)}) \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

$$k_i^{(1)} = h_i f(x_i, y_i),$$

$$k_i^{(2)} = h_i f(x_i + h_i, y_i + k_i^{(1)}).$$

Приведем результаты вычислений для двух примеров.

Пример 1. Решается задача Коши

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(1) = 0,25$$

на отрезке $1 \leq x \leq 10$. Требуется в точке $x = 10$ получить точность $\varepsilon = 10^{-4}$. Точное решение

$$y(10) = \frac{10^2}{4} = 25.$$

Результаты предварительного ($\lambda_{\text{гр}} = 0,25$) и повторного ($\lambda = 0,027$) расчетов соответственно следующие:

$$y(10) = 24,7676789, \quad y(10) = 24,9970225.$$

Пример 2. Решается задача Коши

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

на отрезке $0 \leq x \leq 3$. Требуется, чтобы в точке $x = 3$ достигалась заданная точность $\varepsilon = 10^{-7}$ (семь верных знаков). Точное решение

$$y(3) = 20,0855369.$$

При предварительном расчете с $\lambda_{\text{гр}} = 0,25$ потребовалось сделать 16 шагов и было получено

$$y(3) = 19,749837.$$

Заданная точность не достигнута, поэтому провели повторный расчет со значением $\lambda = 0,00056$, выбранным по формуле (12). Повторный расчет, потребовавший 6656 шагов, дал

$$y(3) = 20,0855308;$$

в точке $x = 3$ получена погрешность

$$\delta = \frac{20,0855369 - 20,0855308}{20,0855369} \approx 3 \cdot 10^{-7},$$

т. е. такая точность, какая была задана (здесь берется относительная погрешность, так как решение больше 1, а алгоритм использует для оценки меру погрешности).

З а м е ч а н и е. В Вычислительном центре МГУ написана программа приближенного вычисления квадратур с наперед заданной скорректированной точностью, использующая аналогичный алгоритм.

Список литературы

1. *Тихонов А. Н., Горбунов А. Д.* Оценки погрешности метода типа Рунге-Кутты и выбор оптимальных сеток // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1964. — Т. 4, № 2. — С. 232–241.
2. *Morrison D.* Optimal mesh size in the numerical integration of an ordinary differential equation // J. Assoc. Comput. Machinery. — 1962. — V. 9, № 1. — P. 98–103.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ГРАФИКА ПОЛНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. Н. Тихонов, А. Д. Горбунов, С. С. Гайсарян

1. Пусть задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

решается при помощи явной формулы Адамса s -й степени

$$y_k - y_{k-1} = h \sum_{i=0}^s \beta_i f(x_{k-i-1}, y_{k-i-1}) \quad (2)$$

с начальными условиями

$$y_k = y(x_k), \quad k = 0, -1, \dots, -(s+1); \quad (3)$$

$f(x, y)$ — заданная достаточно гладкая функция в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y), |x - x_0| \leq A, |y - y_0| \leq B\},$$

x_0, y_0, A и B — определенные действительные числа, $A > 0, B > 0$. Асимптотическое разложение погрешности метода по степеням шага h , как известно [1], записывается в виде

$$\begin{aligned} \delta_k = y_k - y(x_k) = \\ = h^s \frac{K_1}{B_0} \int_{x_0}^{x_k} \exp \left(\int_{\xi}^{x_k} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=y(\eta)} d\eta \right) y^{(s+1)}(\xi) d\xi + O(h^{s+1}), \quad (4) \end{aligned}$$

где $y(x)$ — точное решение задачи Коши (1), y_k — точное решение разностной задачи (2), (3),

$$B_0 = \sum_{i=0}^s \beta_i,$$

$$K_1 = \sum_{i=0}^s \left[\frac{(i-1)^{s+1} \alpha_i}{(s+1)!} - \frac{(-i)^s \beta_i}{s!} \right],$$

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0.$$

Обозначим, далее, через y_k^* численное решение задачи (2), (3), которое получается при условии, что начальные значения вычисляются с погрешностью порядка $O(h^{s+1})$ и счет ведется так, что невязка η_k численного решения y_k^* относительно уравнения (2) имеет порядок $O(h^{s+2})$ (η_k в дальнейшем будем называть характеристикой вычислительной погрешности). Тогда для полной погрешности D_k приближенного решения y_k^* имеет место асимптотическое разложение вида (3), а именно

$$\begin{aligned} D_k &= y_k^* - y(x_k) = \\ &= h^s \frac{K_1}{B_0} \int_{x_0}^{x_k} \exp \left(\int_{\xi}^{x_k} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=y(\eta)} d\eta \right) y^{(s+1)}(\xi) d\xi + O(h^{s+1}). \end{aligned} \quad (3')$$

Разложения (3) и (3') при сформулированных выше условиях счета отличаются только членами, содержащими степени h выше s -й.

2. При значениях h столь малых, что в формуле (3') можно пренебречь членами, содержащими h в степени выше s -й, т. е., как говорят, в области асимптотики, для выражения полной погрешности можно пользоваться формулой

$$D_k = h^s \frac{K_1}{B_0} \int_{x_0}^{x_k} \exp \left(\int_{\xi}^{x_k} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=y(\eta)} d\eta \right) y^{(s+1)}(\xi) d\xi. \quad (4')$$

Переходя в последнем равенстве к модулям и затем логарифмируя полученное, будем иметь

$$v = su + c, \quad (5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} v &= -\log_2 |D_k|, \\ u &= -\log_2 h, \\ c &= -\log_2 \left| \frac{K_1}{B_0} \int_{x_0}^{x_k} \exp \left(\int_{\xi}^{x_k} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=y(\eta)} d\eta \right) y^{(s+1)}(\xi) d\xi \right|. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Таким образом, в области асимптотики, т. е. при $0 < h < \hat{h}$, где \hat{h} достаточно мало, отрицательный двоичный логарифм модуля полной погрешности D_k представляется прямой вида (5) между координатами u и v . Угловый коэффициент этой прямой равен степени интеграционной формулы (2), а ее свободный член зависит от коэффициентов интеграционной формулы, от правой части уравнения (1) и точек x_0, x_k . Приводим таблицу значений C , рассчитанных по формуле (6) для задачи Коши $y' = y, y(0) = 1$ и метода Эйлера (см. в таблице колонку C_T).

x	C_T	C_{Σ}
1	-0,44	-0,40
2	-2,88	-2,55
3	-4,91	-4,65

При решении задачи (1) методом (2), (3) на быстродействующей вычислительной машине (т. е. при фиксированной разрядной сетке) условия счета, обеспечивающие справедливость формулы (3), при достаточно малых h выполняться не будут. В силу этого зависимость v от u перестанет описываться формулой (5).

Таким образом, должен существовать промежуток оси u , над которым зависимость v от u представляется линейным законом вида (5). Верхняя граница этого промежутка — названная выше величина \hat{h} . Переход через эту границу в сторону увеличения значений шагов приводит к возрастанию роли членов формулы (3'), содержащих h в степени выше s , или, другими словами, к тому, что формула (4') становится недействительной. Наличие нижней границы этого промежутка (обозначим ее через \tilde{h}) связано с нарушением условий счета, при которых справедлива формула (3') (см. предшествующий пункт), из-за чего снова перестает быть действительной формула (4').

3. Для проверки изложенных выше обстоятельств и для выявления зависимости v от u вне упомянутого промежутка проводились следующие вычислительные эксперименты.

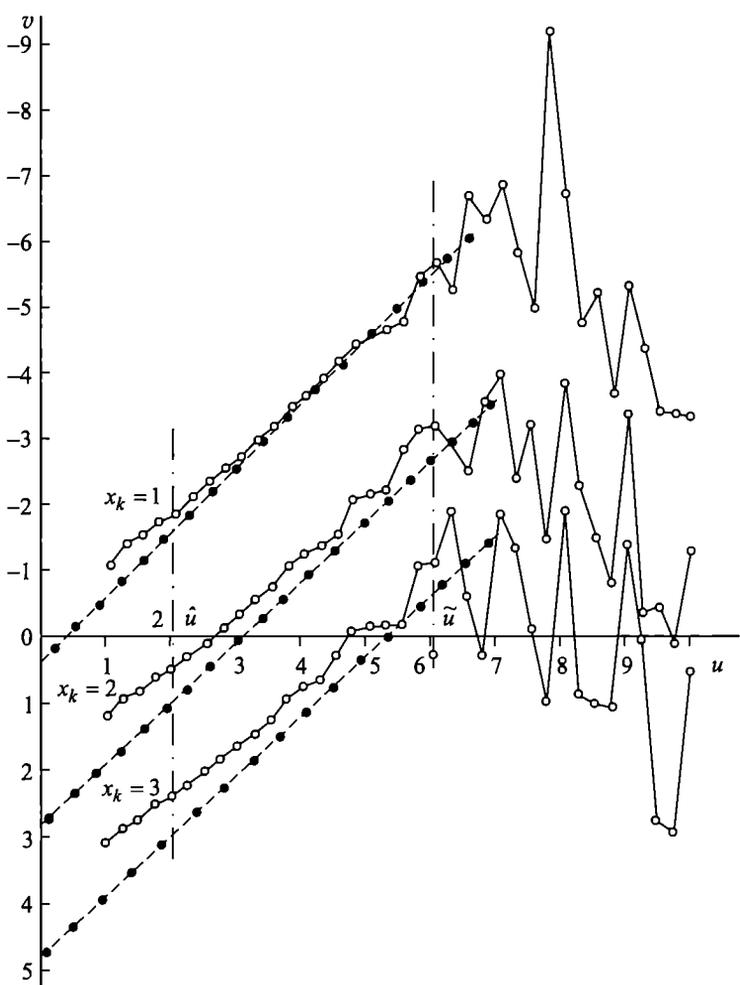


Рис. 1. Задача: $y' = y, y(0) = 1$. Метод Эйлера: $y_k = y_{k-1} + hf_{k-1}$. Трехзначная машина: $\hat{u} = -\log_2 \hat{h}, \tilde{u} = -\log_2 \tilde{h}$. Пунктиром проведены прямые вида (5).

Модельные задачи Коши вида (1) решали на быстродействующих вычислительных машинах с различной разрядной сеткой методами Адамса различных степеней с различными значениями шагов. При этом каждый раз вычисляли значения полной погрешности D_k , для некоторых фиксированных значений аргумента x и строили графики D_k в зависимости

от шага h в билогарифмическом масштабе. Некоторые из этих графиков приведены на рис. 1, 2, 3. В таблице даны значения свободного члена уравнения (5), определенные в результате описанных вычислительных экспериментов (см. колонку C_3).

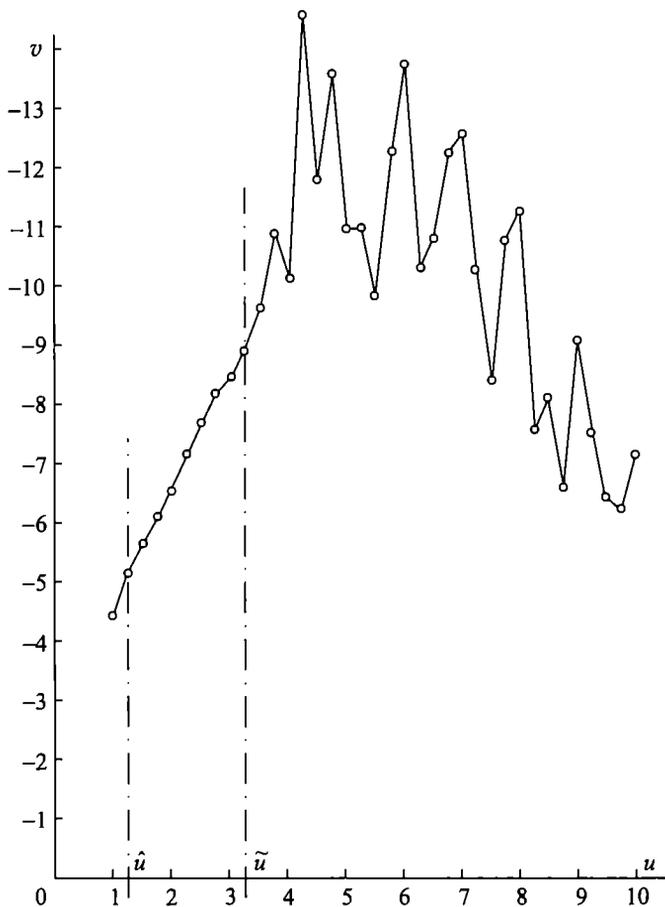


Рис. 2. Задача: $y' = -y$, $y(0) = 1$. Метод Адамса второго порядка:

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2} (3f_{k-1} - f_{k-2}). \quad \text{Трехзначная машина:}$$

$$x_k = 1, \quad \hat{u} = -\log_2 \hat{h}, \quad \tilde{u} = -\log_2 \tilde{h}.$$

Анализ полученных графиков приводит к следующим выводам.

А. Существует область значений шагов, ограниченная снизу и сверху, в которой главный член асимптотического разложения погрешности мето-

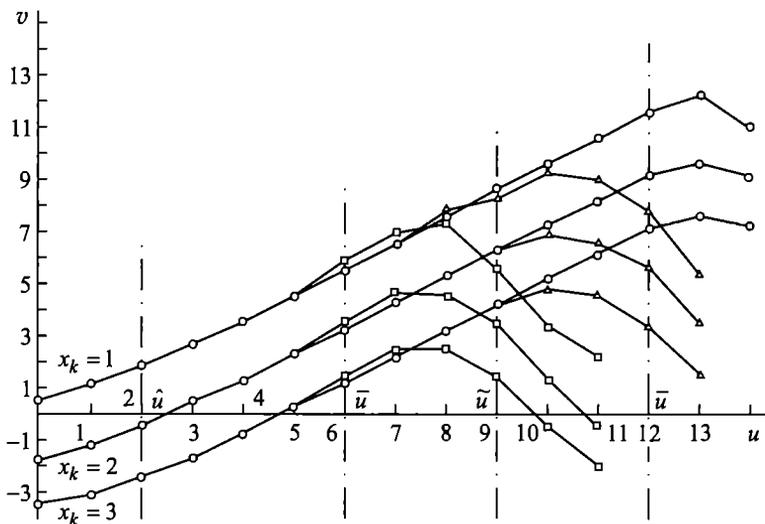


Рис. 3. Задача: $y' = y$, $y(0) = 1$. Метод Эйлера: $y_k = y_{k-1} + hf_{k-1}$,
 \square — трехзначная машина; \triangle — четырехзначная машина; \circ — пятизначная
 машина; $\hat{u} = -\log_2 \hat{h}$, $\tilde{u} = -\log_2 \tilde{h}$.

да хорошо представляет полную погрешность приближенного решения y_k^* (см. рис. 1, 2, 3 и таблицу). В этой области графики полной погрешности, полученные экспериментально, практически совпадают с теоретическими графиками главного члена асимптотического разложения погрешности метода. (Это происходит потому, что члены высших порядков в асимптотическом разложении погрешности метода вместе с вычислительной погрешностью малы по сравнению с упомянутым главным членом). Описанная область значений шагов в дальнейшем именуется реальной областью асимптотики.

Б. Пограничный слой реальной области асимптотики, примыкающий к нижней ее границе \tilde{h} , характеризуется постепенным ухудшением асимптотики при переходе через \tilde{h} в сторону уменьшения значений шагов, которое сменяется «беспорядочными колебаниями», свойственными графикам случайных величин (см. рис. 1 и 2). (Происходит это из-за увеличения относительной доли вычислительной погрешности при переходе через нижнюю границу реальной области асимптотики в сторону уменьшения значений шагов. Причиной является то, что шаг сетки становится меньше единицы разряда, к которому принадлежит первая значащая цифра характеристики вычислительной погрешности.)

В. Пограничный слой реальной области асимптотики, примыкающий к верхней ее границе \widehat{h} , характеризуется постепенным ухудшением асимптотики при переходе через \widehat{h} в сторону увеличения значений шагов (при этом в правой части формулы (3') возрастает роль членов, содержащих высшие степени h ; (см. рис. 1 и 2).

Г. Нижняя грань реальной области асимптотики при фиксированной задаче Коши, при фиксированном методе ее решения и фиксированном узле x_k полностью определяется разрядной сеткой машины. Чем шире разрядная сетка машины, тем меньше нижняя грань реальной области асимптотики (см. рис. 3).

Авторы приносят благодарность сотрудникам ВЦ МГУ О. Ф. Волошину и А. А. Яковлевой за производство вычислительных экспериментов на ЭВМ.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Горбунов А. Д. Асимптотические разложения погрешности разностного метода решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1962. — Т. 2, № 4. — С. 537–548.

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СЕТОК ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ КВАДРАТУР

А. Н. Тихонов, С. С. Гайсарян
(Москва)

1. В настоящей работе рассматривается проблема нахождения оптимальных приближенных методов вычисления квадратуры

$$J(f, \Delta) = \int_a^b f(x) dx, \quad \Delta = [a, b].$$

Приближенный метод включает в себя некоторую сетку $\sigma_N = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$, которая подразделяет отрезок $[a, b]$ на частичные отрезки $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$ длины h_k ($k = 0, 1, \dots, N - 1$), и квадратурную формулу

$$J_s(f, \Delta_k) = h_k \sum_{i=0}^m p_i f(x_k + \alpha_i h_k) \quad (1)$$

степени s , т. е. такую, что

$$\sum_{i=0}^m p_i \alpha_i^l = \frac{1}{l+1}, \quad l = 0, 1, \dots, s-1. \quad (2)$$

Применение приближенного метода дает приближенное значение для $J(f, \Delta)$, равное

$$J_s(f, \Delta; \sigma_N) = \sum_{k=0}^{N-1} J_s(f, \Delta_k).$$

Оптимальным приближенным методом назовем метод, для которого погрешность

$$R_s(f, \Delta; \sigma_N) = \left| \int_a^b f(x) dx - J_s(f, \Delta; \sigma_N) \right|$$

минимальна при фиксированном числе узлов N и фиксированной функции $f(x)$ из некоторого класса, который будет определен ниже.

При такой постановке задачи наиболее существенно то, что ищется приближенный метод, который был бы оптимальным для заданной подынтегральной функции $f(x)$. Задача построения оптимальных квадратур, рассматривавшаяся в работах [1, 2] и др., ставилась по-другому: в этих работах строились квадратурные формулы, оптимальные для всех функций из заданного класса.

В дальнейшем формула (1) будет предполагаться фиксированной, так что выбор оптимального приближенного метода сведется к выбору оптимальной сетки, т. е. последовательности узлов $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{N-1} \leq b$, которая доставляет минимум функции $R_s(f, \Delta; \sigma_N)$ или, что то же самое, функции

$$r(x_1, \dots, x_{N-1}) = R_s^2(f, \Delta; \sigma_N) = \left[\int_a^b f(x) dx - J_s(f, \Delta; \sigma_N) \right]^2. \quad (3)$$

Итак, для построения оптимального приближенного метода нужно найти $\inf r(x_1, \dots, x_{N-1})$ в замкнутом $(N-1)$ -мерном тетраэдре $T_{N-1}^{[a,b]}$. Для непрерывных $f(x)$ в силу теоремы Вейерштрасса $\inf r(x_1, \dots, x_{N-1})$ всегда достигается и, следовательно, оптимальная сетка всегда существует.

Следующий тривиальный пример показывает, что оптимальная сетка не всегда единственна. В самом деле, пусть $\int_0^{2\pi} \sin x dx$ вычисляется по формуле трапеций

$$J_2(f, \Delta_k) = h_k \left[\frac{1}{2} f(x_k) + \frac{1}{2} f(x_k + h_k) \right], \quad (4)$$

а $N = 5$. Ясно, что

$$\inf r(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

причем он достигается

$$\text{при } x_1 = x_2 = \pi/2, \quad x_3 = \pi, \quad x_4 = 3/2\pi,$$

$$\text{при } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \pi \quad \text{и т. д.}$$

В п. 2 будет показано, что если $f(x)$ принадлежит классу $C_s^+(\Delta)$ такому, что $f(x) \in C_s(\Delta)$ и $f^{(s)}(x)$ сохраняет знак на $\Delta = [a, b]$, то существует единственная оптимальная сетка (теорема 2), а также будет выведено разностное уравнение, связывающее последовательные узлы оптимальной сетки (теорема 1).

В п. 3 устанавливается, что оптимальная сетка, построенная в п. 2, может быть приближена сетками специального вида (теоремы 3 и 4), введенными и изученными в [3]. В п. 4 обсуждается возможность использования оптимальных сеток для приближенного вычисления квадратур с заданной точностью ε и обосновывается применимость алгоритма, предложенного в [3].

2. Пусть подынтегральная функция $f(x) \in C_s^+(\Delta)$. Докажем, что тогда на отрезке $\Delta = [a, b]$ существует единственная оптимальная сетка для $f(x)$. Для этого нам потребуются две леммы.

Лемма 1. Пусть коэффициенты p_i и α_i , $i = 0, 1, \dots, m$, квадратурной формулы (1) удовлетворяют условиям (2) и пусть $f(x) \in C_s^+(\Delta)$. Тогда остаточный член $R_s(f, \Delta_k)$ формулы (1) допускает представление в виде

$$R_s(f, \Delta_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \Psi_s(\xi; x_k, x_{k+1}) f^{(s)}(\xi) d\xi, \quad (5)$$

где

$$\Psi_s(\xi; x_k, x_{k+1}) = \frac{1}{s!} \left[(x_{k+1} - \xi)^s - s(x_{k+1} - x_k) \sum_{i=0}^m p_i \psi_{si}(\xi; x_k, x_{k+1}) \right];$$

$$\psi_{si}(\xi; x_k, x_{k+1}) = \begin{cases} (\alpha_i x_{k+1} + \beta_i x_k - \xi)^{s-1}, & x_k \leq \xi \leq \alpha_i x_{k+1} + \beta_i x_k; \\ 0, & \alpha_i x_{k+1} + \beta_i x_k \leq \xi \leq x_{k+1}; \end{cases}$$

$$\beta_i = 1 - \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Функция $\Psi_s(\xi; x_k, x_{k+1})$, определенная при $x_k \leq \xi \leq x_{k+1}$, непрерывна и сохраняет знак, причем $|\Psi_s(\xi; x_k, x_{k+1})|$ монотонно убывает по x_k и монотонно возрастает по x_{k+1} .

Замечание 1. Если (1) — формула Ньютона–Котеса (т. е. $\alpha_i = i/m$, $i = 0, 1, \dots, m$), то аналогичная лемма доказана в [4].

Доказательство. По определению,

$$R(f, \Delta_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - h_k \sum_{i=0}^m p_i f(x_k + \alpha_i h_k). \quad (6)$$

Заменяя здесь $f(x)$ и $f(x_k + \alpha_i h_k)$ ($i = 0, 1, \dots, m$) разложениями

$$f(x) = \sum_{l=0}^{s-1} \frac{f^{(l)}(x_k)}{l!} (x - x_k)^l + \frac{1}{(s-1)!} \int_{x_k}^x f^{(s)}(\xi) (x - \xi)^{s-1} d\xi,$$

$$f(x_k + \alpha_i h_k) =$$

$$= \sum_{l=0}^{s-1} \frac{f^{(l)}(x_k)}{l!} \alpha_i^l h_k^l + \frac{1}{(s-1)!} \int_{x_k}^{x_k + \alpha_i h_k} f^{(s)}(\xi) (x_k + \alpha_i h_k - \xi)^{s-1} d\xi,$$

$i = 0, 1, \dots, m$, после необходимых упрощений (с учетом условий (2) получим формулу (5).

В [3] было установлено, что

$$R(f, \Delta_k) = \frac{h_k^{s+1}}{s!} \left(\frac{1}{s+1} - \sum_{i=0}^m p_i \alpha_i^s \right) f^{(s)}(x_k + \theta h_k), \quad 0 < \theta < 1,$$

откуда следует, что

$$\text{если } f^{(s)}(x) \neq 0 \text{ на } \Delta_k, \text{ то } R(f, \Delta_k) \neq 0.$$

Предположим, что $\Psi_s(\xi; x_k, x_{k+1})$ не сохраняет знака на Δ_k . Тогда найдется такая непрерывная $g(x)$, не обращающаяся в нуль на Δ_k , что

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \Psi_s(\xi; x_k, x_{k+1}) g(\xi) d\xi = 0.$$

Положив $f^{(s)}(x) \equiv g(x)$ и восстановив $f(x)$, получим противоречие:

$$R(f, \Delta_k) = 0, \quad \text{хотя } f^{(s)}(x) \neq 0 \text{ на } \Delta_k,$$

которое показывает, что $\Psi_s(\xi; x_k, x_{k+1})$ сохраняет знак на Δ_k .

Сдвинув начало координат в точку x_k , переведем $\Psi_s(\xi; x_k, x_{k+1})$ в $\tilde{\Psi}_s(t, h_k)$, $h_k = x_{k+1} - x_k$, где

$$\tilde{\Psi}_s(t, h_k) = \frac{1}{s!} \left[(h_k - t)^s - s h_k \sum_{i=0}^m p_i \tilde{\psi}_{si}(t; h_k) \right],$$

$$\tilde{\psi}_{si}(t; h_k) = \begin{cases} (\alpha_i h_k - t)^{s-1}, & 0 \leq t \leq \alpha_i h_k, \\ 0, & \alpha_i h_k \leq t \leq h_k. \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{\partial |\Psi_s(t, h_k)|}{\partial h_k} = \frac{1}{(s-1)!} \left| (h_k - t)^{s-1} - \sum_{i=0}^m p_i \omega_{si}(t; h_k) \right| > 0,$$

$$\omega_{si}(t; h_k) = \begin{cases} (\alpha_i h_k - t)^{s-2} (s \alpha_i h_k - t), & 0 \leq t \leq \alpha_i h_k, \\ 0, & \alpha_i h_k \leq t \leq h_k. \end{cases}$$

Следовательно, если

$$\bar{\Psi}_s(\xi; x_k, x_{k+1}) = |\Psi_s(\xi; x_k, x_{k+1})|,$$

то

$$\frac{\partial \bar{\Psi}_s}{\partial x_k} < 0 \quad \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_{k+1}} = -1 \right); \quad \frac{\partial \bar{\Psi}_s}{\partial x_{k+1}} > 0 \quad \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_{k+1}} = 1 \right).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Если $f(x) \in C_s^+(\Delta)$, то $\inf r(x_1, \dots, x_{N-1})$ достигается во внутренней точке тетраэдра $T_{N-1}^{[a,b]}$.

Доказательство. Пусть $\sigma^0 = (x_1^0, \dots, x_{N-1}^0)$ — некоторая внутренняя точка $T_{N-1}^{[a,b]}$, и пусть $\sigma^* = (x_1^*, \dots, x_{N-1}^*)$ — проекция σ^0 на грань $x_{k-1} = x_k$ (сетки, задаваемые точками σ^0 и σ^* , обозначим, соответственно, через σ_N^0 и σ_N^* ; сетка σ_N^* отличается от сетки σ_N^0 тем, что у нее узлы x_{k-1}^0 и x_k^0 слились, так что отрезки Δ_{k-1}^0 и Δ_k^0 заменились одним отрезком $\Delta_{k-1}^* = [x_{k-1}^0, x_{k+1}^0]$).

Для доказательства леммы достаточно установить, что

$$r(x_1^0, \dots, x_{N-1}^0) \leq r(x_1^*, \dots, x_{N-1}^*)$$

или, в силу (3), что

$$R_s(f, \Delta; \sigma_N^0) \leq R_s(f, \Delta; \sigma_N^*).$$

Если $f(x) \in C_s^+(\Delta)$, то все $R_s(f, \Delta_k)$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) имеют одинаковый знак, так что

$$R_s(f, \Delta; \sigma_N) = \left| \sum_{k=0}^{N-1} R_s(f, \Delta_k) \right| = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{R}_s(f, \Delta_k),$$

где

$$\bar{R}_s(f, \Delta_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \bar{\Psi}_s(\xi; x_k, x_{k+1}) |f^{(s)}(\xi)| d\xi.$$

Имеем¹⁾

$$\begin{aligned} R_s(f, \Delta; \sigma_N^*) - R_s(f, \Delta; \sigma_N^0) &= \bar{R}(f, \Delta_{k-1}^*) - [\bar{R}(f, \Delta_{k-1}^0) + \bar{R}(f, \Delta_k^0)] = \\ &= \int_{x_{k-1}^0}^{x_k^0} |f^{(s)}(\xi)| \{ \bar{\Psi}_s(\xi; x_{k-1}^0, x_{k+1}^0) - \bar{\Psi}_s(\xi; x_{k-1}^0, x_k^0) \} d\xi + \\ &+ \int_{x_k^0}^{x_{k+1}^0} |f^{(s)}(\xi)| \{ \bar{\Psi}_s(\xi; x_{k-1}^0, x_{k+1}^0) - \bar{\Psi}_s(\xi; x_k^0, x_{k+1}^0) \} d\xi \geq 0 \quad (7) \end{aligned}$$

в силу леммы 1 (так как $x_{k-1}^0 < x_k^0 < x_{k+1}^0$). Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что для $f(x) \in C_s^+(\Delta)$ необходимое условие минимума $r(x_1, \dots, x_{N-1})$ имеет вид

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (8)$$

Подставив в (8) выражение (3) для $r(x_1, \dots, x_{N-1})$ и выполнив дифференцирование, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m p_i \{ f(\beta_i x_{k-1} + \alpha_i x_k) + \alpha_i (x_k - x_{k-1}) f'(\beta_i x_{k-1} + \alpha_i x_k) - \\ - f(\beta_i x_k + \alpha_i x_{k+1}) + \beta_i (x_{k+1} - x_k) f'(\beta_i x_k + \alpha_i x_{k+1}) \} = 0, \end{aligned}$$

$$k = 1, \dots, N-1. \quad (9)$$

Для уравнения (9) удобно следующее сокращенное обозначение

$$\Phi(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = 0, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (9')$$

¹⁾Для удобства принято обозначение $\bar{\Psi}_s(\xi; x_k, x_{k+1}) = |\Psi_s(\xi; x_k, x_{k+1})|$; $\bar{\Psi}_s$ — гладкая функция, так как Ψ_s гладкая и сохраняет знак.

Таким образом, нами установлена

Теорема 1. Если $f(x) \in C_s^+(\Delta)$, то три любых последовательных узла x_{k-1}, x_k, x_{k+1} ($k = 1, \dots, N-1$) оптимальной сетки удовлетворяют нелинейному разностному уравнению второго порядка (9).

З а м е ч а н и е. Если в качестве формулы (1) взять формулу трапеций (4), то уравнение (9) примет вид

$$f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_{k-1}), \quad k = 1, \dots, N-1,$$

который имеет простой геометрический смысл.

Теорема 2. Если $f(x) \in C_s^+(\Delta)$, то существует единственная сетка $\sigma_N = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$, узлы x_1, \dots, x_{N-1} которой удовлетворяют разностному уравнению (9).

Доказательство. Нам необходимо установить существование и единственность решения разностной краевой задачи

$$\Phi(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = 0, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad x_0 = a, \quad x_N = b, \quad a < b.$$

Переписав уравнение (9) в виде

$$\sum_{i=0}^m p_i \{ f(x_k - \beta_i h_{k-1}) + \alpha_i h_{k-1} f'(x_k - \beta_i h_{k-1}) - \\ - f(x_k + \alpha_i h_k) + \alpha_i h_k f'(x_k + \alpha_i h_k) \} = 0$$

и заменив в последнем соотношении $f(x_k - \beta_i h_{k-1})$, $f'(x_k - \beta_i h_{k-1})$, $f(x_k + \alpha_i h_k)$, $f'(x_k + \alpha_i h_k)$, $i = 0, 1, \dots, m$, разложениями по формуле Тейлора с центром в точке x_k , получим после упрощений (в обозначениях леммы 1)

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f^{(s)}(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi_s(\xi; x_k, x_{k+1}) d\xi + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f^{(s)}(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi_s(\xi; x_{k-1}, x_k) d\xi = 0,$$

или, учитывая, что $f(x) \in C_s^+(\Delta)$,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f^{(s)}(\xi)| \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_k} \bar{\Psi}_s(\xi; x_k, x_{k+1}) \right\} d\xi = \\ \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f^{(s)}(\xi)| \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi_s(\xi; x_{k-1}, x_k) d\xi. \quad (10)$$

Зафиксируем x_{k-1} и x_k . Тогда в силу леммы 1 в левой части (10) стоит монотонно возрастающая функция x_{k+1} , обращающаяся в нуль при $x_{k+1} = x_k$. Постоянная, стоящая в правой части (10), положительна и пропорциональна $h_{k-1} = x_k - x_{k-1}$. Следовательно, если h_{k-1} достаточно мало, то (10) определяет единственное значение x_{k+1} , причем $h_k = x_{k+1} - x_k$ будет тоже мало. Следовательно, задавшись достаточно малым $h_0 = x_1 - x_0$, получим $x_N < b$, причем x_N возрастает с ростом h_0 . Следовательно, найдется такое \bar{h}_0 , при котором $x_N = b$, что и доказывает теорему.

Из теорем 1 и 2 следует, что для $f(x) \in C_s^+(\Delta)$ уравнение (9) определяет единственную сетку, которая доставляет минимум функции $r(x_1, \dots, x_{N-1})$ (то, что это именно минимум, следует из вида $r(x_1, \dots, x_{N-1})$). Эту сетку мы будем в дальнейшем называть абсолютно оптимальной для функции $f(x)$ и формулы (1).

3. Рассмотрим сетки специального вида, изучавшиеся в [3].

Пусть $\varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, — непрерывно дифференцируемая положительная функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dx}{\varphi(x)} = 1,$$

и пусть λ — некоторое действительное число.

Сетку $\sigma_0(\lambda, \varphi)$, узлы которой задаются соотношениями

$$x_0 = a, \quad x_{k+1} = x_k + h_k, \quad h_k = \min\{\lambda\varphi(x_k), b - x_k\}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

назовем простейшей сеткой, а сетку $\sigma_1(\lambda, \varphi)$, у которой

$$h_k = \min\left\{\lambda\varphi\left(x_k + \frac{1}{2}h_k\right), b - x_k\right\}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

назовем усложненной сеткой с параметром λ и функцией распределения шагов $\varphi(x)$.

В качестве оценочной функции для $R_s(f, \Delta; \sigma)$ возьмем главный член асимптотического разложения $R_s(f, \Delta; \sigma)$ по степеням λ и назовем оптимальной сетку, доставляющую минимум этому главному члену при фиксированном λ . Тогда, как показано в [3], оптимальная простейшая и оптимальная усложненная сетки будут определяться функцией распределения шагов

$$\varphi_0(x) = M|f^{(s)}(x)|^{-1/(s+1)}, \quad M = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f^{(s)}(\xi)|^{1/(s+1)} d\xi.$$

Теорема 3. Пусть x_0, x_1, \dots, x_N — узлы абсолютно оптимальной сетки σ_N , а $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N$ — узлы оптимальной усложненной сетки $\tilde{\sigma}$ с параметром $\lambda = (b - a)/N$. Тогда имеют место оценки

$$x_k - \tilde{x}_k = O(\lambda^2), \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

$$R(f, \Delta; \sigma_N) - R(f, \Delta; \tilde{\sigma}_N) = O(\lambda^{s+1}).$$

Доказательство. В [3] доказано, что при $\lambda = (b - a)/N$ оптимальная усложненная сетка содержит $N + 1$ узел $\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_N$, причем эти узлы удовлетворяют уравнению

$$\left| f^{(s)}\left(\frac{\tilde{x}_k + \tilde{x}_{k+1}}{2}\right) \right| (\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k)^{s+1} - \left| f^{(s)}\left(\frac{\tilde{x}_{k-1} + \tilde{x}_k}{2}\right) \right| (\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-1})^{s+1} = 0 \quad (11)$$

и граничным условиям $\tilde{x}_0 = a$, $\tilde{x}_N = \tilde{b}$, где $\tilde{b} - b = O(\lambda^2)$, $\tilde{b} \geq b$.

По теореме о среднем из (10) (после сокращения на общий множитель) следует

$$\left| f^{(s)}(x_k + \theta_1 h_k) \right| h_k^{s+1} - \left| f^{(s)}(x_{k-1} + \theta_2 h_{k-1}) \right| h_{k-1}^{s+1} = 0,$$

$0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, $h_k = x_{k+1} - x_k$, откуда имеем

$$\left| f^{(s)}\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \right| (x_{k+1} - x_k)^{s+1} - \left| f^{(s)}\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \right| (x_k - x_{k-1})^{s+1} = O(\lambda^{s+2}). \quad (12)$$

Введем обозначения: $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ (разность вперед), $\Delta^* x_k = x_k - x_{k-1}$ (разность назад), $u(x_k, \Delta x_k) = \left| f^{(s)}\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \right| (\Delta x_k)^s$. Тогда (11) и (12) запишутся в виде

$$\Delta^* u(\tilde{x}_k, \Delta \tilde{x}_k) = 0, \quad (11')$$

$$\Delta^* u(x_k, \Delta x_k) = O(\lambda^{s+2}). \quad (12')$$

Пусть $z_k = x_k - \tilde{x}_k$. Вычитая (11') из (12'), получим для z_k

$$\Delta^* \left[\left(\frac{\partial u}{\partial (\Delta x)_k} \right)_{\xi_{1k}} \Delta z_k \right] + \Delta^* \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)_{\xi_{2k}} z_k \right] = O(\lambda^{s+2}),$$

$$z_0 = 0, \quad z_N = O(\lambda^2), \quad (13)$$

где ξ_{1k} лежит между Δx_k и $\Delta \tilde{x}_k$, а ξ_{2k} — между x_k и \tilde{x}_k . Легко видеть, что

$$0 < \frac{\partial u}{\partial (\Delta x_k)} < M,$$

так что в силу [4] задача (13) имеет разностную функцию Грина с ограниченной первой разностью. Следовательно, $z_k = O(\lambda^2)$.

Легко видеть, что

$$r(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{N-1}) = r(x_1, \dots, x_{N-1}) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial r}{\partial x_k} z_k,$$

причем

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial r}{\partial x_k} z_k = O(\lambda^{2s+2})$$

(это следует из (3), оценки для $R_s(f, \Delta; \sigma)$, полученной в [3], и оценки для z_k). Следовательно, в силу (3)

$$R_s(f, \Delta; \tilde{\sigma}_N) - R_s(f, \Delta; \sigma_N) = O(\lambda^{s+1}).$$

Теорема доказана.

Аналогично теореме 3 доказывается и

Теорема 4. Для узлов $\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{N'}$ оптимальной простейшей сетки $\tilde{\sigma}_N$ с параметром $\lambda = (b - a)/N$ и для погрешности $R(b, \Delta; \tilde{\sigma}_N)$ имеют место оценки

$$N' = N + C, \quad \tilde{x}_k - x_k = O(\lambda), \quad k = 0, 1, \dots, \min(N, N'),$$

$$R(f, \Delta; \tilde{\sigma}_N) - R(f, \Delta; \sigma_N) = O(\lambda^{s+1}),$$

где C — постоянная, введенная в [3].

Из теорем 3 и 4 следует, что оптимальную простейшую и оптимальную усложненную сетки можно рассматривать как первое и второе приближение к абсолютно оптимальной.

4. Рассмотрим задачу о приближенном вычислении квадратуры $J(f, \Delta)$ с заданной точностью ε в предположении, что $f(x) \in C_s^+(\Delta)$.

Пусть σ_{N-1} и σ_N — абсолютно оптимальные сетки, для которых выполняется условие

$$R(f, \Delta; \sigma_N) \leq \varepsilon < R(f, \Delta; \sigma_{N-1}). \quad (14)$$

Тогда сетка σ_N будет обеспечивать достижение точности ε и содержать наименьшее возможное число узлов.

Легко видеть, что определение N из условия (14) довольно затруднительно. С другой стороны, из теорем 3 и 4 следует, что если вместо абсолютно оптимальной сетки использовать оптимальную простейшую сетку или оптимальную усложненную сетку с соответствующим параметром λ (выбор параметра λ описан в [3]), то абсолютно оптимальная сетка σ_N , где $N = [(b - a)/\lambda]$, если используется оптимальная усложненная сетка, и $N = [(b - a)/\lambda] + C$, если используется оптимальная простейшая сетка, будет удовлетворять условию (14). Что касается точности ε , то она будет в этом случае удовлетворяться асимптотически с точностью до величин $O(\lambda^{s+1})$.

В [3] показано, что при этом константа при λ^{s+1} в случае оптимальной усложненной сетки намного меньше, чем в случае оптимальной простейшей сетки.

Таким образом, алгоритм, предложенный в [3], близок к оптимальному.

Поступила в редакцию 13.05.1968

Список литературы

1. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. — М.: Физматгиз, 1958.
2. *Шайдаева Т. А.* Наиболее точные квадратурные формулы для некоторых классов функций // Труды Матем. ин-та АН СССР. — 1959. — Т. 53. — С. 313–314.
3. *Гайсарян С. С.* Об одном оптимальном алгоритме приближенного вычисления квадратур // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1969. — Т. 9, № 5. — С. 1015–1023.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 1. — С. 5–63.
5. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. — М.: Наука, 1967.

ВСЕСОЮЗНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

А. Н. Тихонов, Н. С. Бахвалов

С 22 по 26 января 1965 г. в Москве проходила Всесоюзная конференция по вычислительной математике.

В конференции приняло участие около 2000 человек и было заслушано более 300 докладов.

Работа конференции проходила по следующим секциям.

1. Секция вычислительных методов алгебры, квадратур и приближения функций.

2. Секция численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Секция численных методов решения уравнений с частными производными.

4. Секция численных методов решения интегральных и функциональных уравнений.

5. Секция методов решения оптимальных задач.

6. Секция численных методов решения некорректно поставленных задач.

7. Секция численных методов решения задач механики.

8. Секция численных методов решения задач физики и химии.

Предыдущее Всесоюзное совещание по вычислительной математике и вычислительной технике проводилось в ноябре 1959 г. по более широкой тематике. В связи с большим масштабом работ по вычислительной математике настоящая конференция не рассматривала вопросов, связанных с вычислительной техникой и программированием. Прошедшая конференция показала расширение фронта и значительный рост глубины научных исследований в области вычислительной математики.

На конференции были представлены доклады, связанные, с одной стороны, с применениями вычислительной математики к различным задачам физики и техники, и, с другой стороны, с разработкой оптимальных вычислительных методов.

Последняя задача, помимо чисто математического интереса, имеет большое значение как теоретическая база для создания системы оптимальных методов решения типовых математических задач, являющейся в свою очередь основой для автоматизации вычислений.

Остановимся коротко на итогах работы отдельных секций.

В области линейной алгебры большие усилия были направлены на разработку новых методов решения полной проблемы собственных значений для несимметричных матриц. Эти исследования позволили создать новые алгоритмы для решения этой проблемы. Значительный интерес вызвали также доклады, посвященные алгоритмам решения систем линейных уравнений высоких порядков и плохо-обусловленных систем. В ряде докладов содержались сообщения о стандартных программах, составленных на базе этих алгоритмов.

В области квадратурных формул был представлен целый ряд докладов, посвященных отысканию оптимальных на классах функций способов интегрирования. Созданы методы интегрирования, для которых на определенных классах функций оценки погрешности близки по порядку к оптимально возможным. Разработана методика получения оценок снизу скорости сходимости оптимальных на классах функций детерминированных и недетерминированных способов интегрирования. За прошедшее после предыдущего совещания время расширилось применение теоретико-числовых методов интегрирования. В то же время остается еще много нерешенных вопросов теоретического и прикладного характера, особенно в задаче отыскания оптимальных методов вычисления интегралов высоких кратностей.

В области обыкновенных дифференциальных уравнений часть докладов была посвящена анализу отдельных методов интегрирования. В ряде докладов рассматривались методы решения краевых задач и способы получения двусторонних оценок для решений дифференциальных уравнений. Большое внимание было уделено обсуждению вопроса об оптимальности методов численного интегрирования.

В настоящее время одной из важнейших задач вычислительной математики является отыскание эффективных методов решения многомерных задач для уравнений математической физики. Дело в том, что в приложениях, встречающихся в физике и технике, обычно приходится иметь

дело с трех- и четырехмерными задачами, а в случае кинетического уравнения — с семимерными задачами. Оказалось, что как для линейных, так и для нелинейных уравнений решение таких задач можно свести к решению последовательностей одномерных задач.

Доклады, представленные на секции уравнений с частными производными, представляли существенный шаг в развитии этого направления с точки зрения теоретического обоснования таких методов. Был представлен также ряд докладов, показывающих отработанность алгоритмов для решения сложных многомерных задач и эффективность их применения. Часть докладов была посвящена другим важным вопросам теории и практики численного решения уравнений с частными производными.

На секции численных методов решения интегральных и функциональных уравнений рассматривались доклады, посвященные итерационным методам решения функциональных уравнений, вариационным методом решения линейных и нелинейных операторных уравнений и методам решения интегральных уравнений.

На секции решения оптимальных задач было представлено большое число докладов, содержащих изложение практических результатов в области решения конкретных задач. Ряд докладов был посвящен оптимальным методам решения целых классов задач. Следует отметить существенный рост уровня трудности успешно решаемых задач.

На секции некорректных задач обсуждалась постановка вопросов, связанных с приближенным решением некорректных задач, отысканием алгоритмов решения таких задач, а также был доложен ряд результатов по решению конкретных задач.

На конференции были представлены также приложения вычислительной математики в механике, физике и химии. Значительная часть докладов, представленных на соответствующих секциях, концентрировалась по направлениям: газовая динамика, методы решения кинетического уравнения, расчеты диффузионных процессов, теория упругости, электродинамика, химическая кинетика, кристаллография. Основное внимание в докладах, представленных по этим направлениям, было уделено разработке методов и алгоритмов решения задач, а также вопросам эффективности применения этих методов. Одновременно с этим часть докладов содержала изложение результатов по численному решению отдельных прикладных задач.

На заключительном заседании были заслушаны выступления С. Л. Соболева и А. Н. Тихонова о путях развития вычислительной математики и было принято решение, направленное на дальнейшее развитие вычислительной математики.

Конференция отметила значительное повышение уровня теоретических исследований в вычислительной математике, широкое проникновение вычислительных методов в различные области науки, техники, народного хозяйства, что способствовало расширению и углублению научных исследований в этих областях. Нет сомнения, что обмен мнениями, состоявшийся в результате проведения конференции, поможет устранению ненужного дублирования, что будет способствовать дальнейшему развитию вычислительной математики.

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

А. Н. Тихонов, Н. Н. Кузнецов

Статья написана в связи с 60-летием Великой Октябрьской социалистической революции. В ней обсуждаются общие черты современной вычислительной математики, ее значение для научно-технического прогресса.

1. 60 лет прошло со времени Великой Октябрьской революции, воплотившей в жизнь великие идеи марксизма-ленинизма, давшей жизнь первому на Земле социалистическому обществу. За эти годы технически отсталая Россия превратилась в мощную промышленную и культурную державу.

Огромный научный потенциал, которым располагает сейчас СССР, размах научных исследований в нашей стране, научные достижения, составляющие предмет гордости нашего народа, — все это результат Октябрьской революции, итог неустанной планомерной работы по развитию науки, яркое свидетельство того внимания, которое уделяет партия развитию науки в нашей стране.

В дореволюционной России было немало выдающихся ученых. Однако их деятельность в условиях царизма и низкого уровня экономического развития страны не могла сколько-нибудь существенно влиять на научно-технический прогресс общества. Лишь в условиях социализма оказалось возможным придать научным исследованиям подлинно широкий масштаб, превратить их в мощный инструмент научно-технического прогресса.

Наука и социализм неразделимы. Как социалистическое общество не может развиваться без всемерного развития науки — основного двигателя технического прогресса, так и наука лишь при социализме обретает наилучшие условия для своего развития. Социалистическое общество создает наиболее благоприятную атмосферу для беспрепятственного развития научных талантов. Присущее ему централизованное долгосрочное плани-

рование надежно обеспечивает перспективные научные исследования, требующие подчас огромной концентрации средств и усилий. Гуманизм социалистического общества гарантирует использование результатов научно-технических исследований не во зло человеку, а на его благо.

2. Социализм создает самые благоприятные условия для плановой организации подготовки научных кадров. В современном мире, специфической чертой которого является чрезвычайно бурное развитие науки, сопровождающееся рождением новых направлений и новых наук, быстрым совершенствованием технологических средств научных исследований, к системе образования предъявляются существенно новые требования. Обучение студентов должно быть ориентировано не столько на задачи сегодняшнего дня, сколько на перспективную научно-техническую проблематику, которая приобретет первостепенное значение в близком будущем. Центр тяжести обучения смещается в область фундаментальных основ науки и методологии, особое значение приобретает привитие студентам умения ставить задачи, анализировать непривычные ситуации, вести научный поиск.

Математизация науки, о которой речь пойдет ниже, широкое применение электронных вычислительных машин как мощного инструмента научного исследования обуславливает существенно возросшую роль математического образования будущих научно-технических работников.

Электронные вычислительные машины вызвали к жизни по существу новую математическую науку — «прикладную математику», связанную с разнообразными аспектами применения ЭВМ, исследованием алгоритмов реализации на ЭВМ математических моделей науки и техники, организацией вычисления и обработки информации, созданием вычислительных комплексов и их математического обеспечения и т. д., и обусловили потребность специализированной подготовки соответствующих научных кадров. Эта подготовка является важной государственной задачей и осуществляется сейчас специальными факультетами или отделениями многих университетов и вузов нашей страны, в том числе факультетом вычислительной математики и кибернетики МГУ.

3. Специфической чертой развития науки в наше время является ее математизация. Электронные вычислительные машины столь кардинально расширили возможности математического метода, что он превратился в один из основных инструментов научного познания, а тем самым — в мощное орудие научно-технического прогресса общества. Он далеко перешагнул границы традиционных областей применения и проникает сейчас

практически во все сферы человеческой деятельности. Можно сказать, что с появлением ЭВМ наука обрела новое оружие познания.

Сущность математического метода состоит в построении математической модели исследуемого объекта и реализации этой модели, т. е. получении средствами математики следствий, причинно обусловленных принятой моделью. Сопоставимость этих следствий с реальными проявлениями объекта является критерием адекватности принятой модели.

Роль математического метода в естественных науках всегда была чрезвычайно важной. Нахождение удачной математической модели явления или класса явлений, как правило, знаменовало собою великое открытие в естествознании. Вспомним, например, ньютоновскую модель тяготения или уравнения электромагнитного поля Максвелла. А. Н. Крылов, великой заслугой которого было создание математической модели поведения корабля на воде, говорил, что благодаря превращению кораблестроения в математическую науку за 50 лет в нем был достигнут бóльший прогресс, чем за все 50 веков мореплавания.

До появления ЭВМ математический метод успешно применялся лишь к явлениям, допускающим сравнительно простые математические модели. Скромные вычислительные возможности человека не позволяли рассчитывать на решение более или менее сложных математических задач или задач значительного объема и вынуждали исследователя к максимальному упрощению математической модели, что, конечно, оказывалось осуществимым (без полной потери адекватности) лишь для сравнительно узкого круга явлений. Н. Е. Жуковский говорил, что главная задача естествоиспытателя состоит в таком упрощении модели, чтобы она допускала решение в элементарных функциях. Эти слова нашего выдающегося ученого ярко передают ситуацию, характерную для математического метода исследования до появления ЭВМ. Ясно, сколь серьезные ограничения накладывал такой подход на явления, поддающиеся удовлетворительному математическому исследованию.

Теперь под решением прикладной математической задачи понимается обычно указание эффективного алгоритма ее численного решения и реализация этого алгоритма на ЭВМ.

Задачи, связанные с реализацией математических моделей, называют теперь **прямыми задачами**. Основные вопросы, решаемые в связи с этими задачами, — это исследование алгоритмов численной реализации, их устойчивости, экономичности, универсальности, построение оптимальных в том или ином смысле алгоритмов.

Важное место при исследовании многих математических моделей занимают, конечно, и чисто математические вопросы обоснования (теоремы существования, единственности, корректности и т. п.), качественный и асимптотический анализ решений. Среди этих вопросов, играющих подчас большую роль в численном анализе, многие пока недоступны современным ЭВМ.

Особую сложность для вычислительной математики представляют прямые задачи (обычно, нелинейные), которые математически изучены слабо (таковы, например, задачи физики плазмы, задачи газовой динамики). В таких задачах мы обычно не располагаем общими результатами о математической определенности и корректности задачи, о сходимости вычислительных алгоритмов и их точности. Первостепенное значение приобретает здесь численный эксперимент, применяемые алгоритмы подвергаются особо тщательному численному анализу.

Вообще **численный эксперимент**, уже и сейчас играющий в науке существенную роль, несомненно, будет иметь в недалеком будущем очень важное значение в научных и технических исследованиях, и это значение будет все возрастать по мере осознания нами возможностей ЭВМ и их развития.

Важный класс задач современной вычислительной математики составляют **обратные задачи**. Они естественно возникают при исследовании объектов, недоступных для прямых наблюдений. В этом случае характеристики объекта должны определяться по его косвенным проявлениям. Математически эта задача состоит в выборе семейства математических моделей объекта, зависящих от некоторого множества параметров (характеристик объекта), подлежащих определению, и нахождении в этом семействе модели, сопоставимой с наблюдаемыми проявлениями объекта. В подавляющем большинстве случаев эта задача оказывается некорректно поставленной: даже малые неточности наблюдаемых данных (которые, конечно, всегда присутствуют) приводят к катастрофическому размытию класса моделей, сопоставимых с этими данными в пределах их погрешностей.

Сужение исходного семейства моделей (уменьшение множества определяемых параметров), конечно, уменьшает неустойчивость задачи и даже может сделать ее устойчивой, но при этом требование сопоставимости модели с результатами наблюдений в пределах погрешностей последних обычно оказывается невыполнимым и поэтому приходится мириться с отклонениями модели от экспериментальной информации, вообще говоря, значительно превосходящими неточность этой информации. Такой путь (реализуемый,

например, в методе наименьших квадратов) обладает тем недостатком, что увеличение объема содержательной информации не ведет к уточнению наших знаний.

Идея развитого в последнее время метода регуляризации состоит в привлечении к решению обратной задачи дополнительной качественной априорной информации об исследуемом объекте. С помощью регуляризации удалось построить устойчивые алгоритмы многих важных классов обратных задач естествознания.

Некорректные задачи, к которым успешно применяется метод регуляризации, возникают также в таких важнейших для приложения задачах, как конструирование систем с заданными характеристиками, автоматизации обработки результатов наблюдений (включая их интерпретацию), оптимального управления и оптимального планирования и во многих других важных прикладных задачах.

Круг задач вычислительной математики широк и разнообразен. В условиях интенсивного применения ЭВМ вычислительная математика превращается в неотъемлемую часть научно-технического прогресса общества, в значительной степени определяющую темпы этого прогресса.

Поступила в редакцию 19 мая 1977 г.
Кафедра вычислительной математики

On computational mathematics

A. N. Tichonov, N. N. Kuznetsov

S u m m a r y

The note is written on the occasion of 60th anniversary of the Great October Revolution. It is concerned with general features of the modern computational mathematics, its significance for the scientific and technological progress.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС

А. Н. Тихонов

I. Воздействие математики на научно-технический прогресс за последние десятилетия изменилось революционно. Важным этапом развития многих наук стала их математизация, которая оказалась возможной благодаря созданию электронно-вычислительных машин (ЭВМ) [1]. Появление ЭВМ было инициировано потребностями научно-технического прогресса и стало возможным благодаря достижениям других наук. Их создание можно сопоставить с самыми величайшими достижениями человечества, такими, как изобретение паровой машины или использование электричества. Однако ЭВМ занимают в этом ряду особое место: если обычные машины расширяли физические возможности людей, делали их сильнее, то ЭВМ существенно повысили интеллектуальный потенциал человечества.

Математика является одной из самых древних наук. Она зародилась на заре человеческой цивилизации. Строительство, измерение площадей земельных участков, навигация, торговые расчеты, управление государством требовали умения проводить арифметические вычисления и определенных геометрических навыков.

В дальнейшем математика развивалась как важная составная часть общего комплекса научных знаний. Потребности естествознания, техники, всей практической деятельности людей постоянно ставили перед математикой новые задачи и стимулировали ее развитие. В свою очередь прогресс в математике делал математические методы более эффективными, расширял сферу их применения и тем самым способствовал общему научно-техническому прогрессу.

Роль математики в различных областях человеческой деятельности и в разное время была существенно различной. Она складывалась исторически, при этом сильное влияние на нее оказывали следующие факторы:

уровень развития математического аппарата и степень зрелости знаний об изучаемом объекте, возможность описать его наиболее существенные черты и свойства на языке математических понятий и уравнений, или, как теперь принято говорить, возможность построить «математическую модель» изучаемого объекта [2].

Математическая модель всегда основана на некотором упрощении, идеализации объекта. Она не тождественна объекту, а является его приближенным отражением. Однако благодаря замене реального объекта моделью появляется возможность сформулировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для анализа универсальным математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы объекта. Язык математики позволяет единообразно описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, т. е. спрогнозировать результаты будущих наблюдений. А ведь прогнозирование — всегда трудная задача, и оправдывающиеся прогнозы являются предметом особой гордости любой науки.

Сложность построения и исследования математической модели существенно зависит от сложности объекта. До появления ЭВМ основную роль в решении математических задач играли аналитические методы. Исследователи стремились избежать трудоемких вычислений и получить ответ в виде формулы. Математические модели, для которых получить решение в явном виде не удавалось, либо вообще не рассматривались, либо упрощались с помощью дополнительных предположений. Упрощение модели снижало степень ее соответствия изучаемому объекту, делала результаты исследования объекта менее точными и, следовательно, менее интересными, а иногда и приводило к ошибкам.

Ситуация резко изменилась с появлением ЭВМ. Опытный вычислитель, вооруженный настольной клавишной машиной, тратил на выполнение одной операции в среднем за рабочую смену около полминуты. Современные ЭВМ выполняют миллионы операций в секунду. Таким образом, за короткий промежуток времени порядка 30 лет благодаря ЭВМ скорость проведения вычислений возросла примерно в 100 миллионов раз. Такого скачка не было за всю историю человечества ни в одной сфере человеческой деятельности.

Применение численных методов на базе ЭВМ сразу существенно расширило класс математических задач, допускающих исчерпывающий анализ. Теперь уже исследователю при построении математической модели какого-

то объекта не нужно стремиться к упрощениям, которые были необходимы раньше при желании получить ответ в явном виде. Его внимание прежде всего должно быть направлено на то, чтобы правильно учесть все наиболее существенные особенности изучаемого объекта и отразить их в математической модели. После того, как модель построена, встает вопрос о разработке алгоритма решения соответствующей математической задачи и его реализации на ЭВМ. Таким образом, ЭВМ изменили подход к применению математики как метода исследования. Они вызвали переориентацию многих сложившихся направлений математики и развитие ряда новых.

Сегодня ЭВМ являются одним из определяющих факторов научно-технического прогресса. Их применение способствует ускорению развития ведущих отраслей народного хозяйства, открывает принципиально новые возможности проектирования сложных систем при значительном сокращении сроков разработки и выполнения проектов, обеспечивает выбор оптимальных режимов производственно-технологических процессов, создает условия для совершенствования управления и повышения производительности труда.

Математика с помощью ЭВМ стала одним из важных факторов превращения науки в непосредственную производительную силу общества. Без ЭВМ не могли бы развиваться многие крупные научно-технические проекты современности (атомная энергетика, сверхзвуковая авиация, космические исследования и т. д.). Интенсивный процесс математизации захватил не только естественные и технические, но также и общественные науки. Важное значение приобрело применение математических методов в экономике.

Математическое моделирование начинает широко использоваться в химии, геологии, биологии, медицине, психологии, лингвистике, повышая эффективность научных исследований, способствуя скорейшему внедрению результатов научных исследований в практику. Подтверждается точка зрения К. Маркса, который, по словам П. Лафарга, считал, что «наука только тогда достигает совершенства, когда ей удастся пользоваться математикой»¹⁾.

II. Среди актуальных проблем современной науки можно выделить проблемы управления, оптимального проектирования сложных систем и автоматизации экспериментов. Проблема автоматизации экспериментов и научного приборостроения в силу своей исключительной

важности была предметом специального обсуждения на совещании президентов академий наук социалистических стран в Москве в феврале 1977 г.

Высокий уровень автоматизации многих (особенно физических) экспериментов и способов регистрации их результатов позволяет получать за короткое время большой объем информации в виде десятков и сотен тысяч снимков, осциллограмм, показаний детекторов и т. д. Для интерпретации этой информации требуется математическая обработка, которую, как правило, нужно производить практически одновременно с экспериментом или с небольшим запаздыванием после него. Такую обработку можно осуществить только с помощью ЭВМ, применение которых становится сегодня неотъемлемой частью эксперимента. Накопление большого объема экспериментальной информации без автоматизации обработки теряет смысл.

Остановимся подробнее на математических аспектах проблемы автоматизации обработки результатов наблюдений.

Типичной особенностью постановки задач классической математики является концепция «точности», т. е. предположение, что исходные данные заданы точно и все вычисления выполняются точно. Эта точка зрения носит гипотетический характер, однако она имеет выдающееся значение в развитии математики и многих ее приложений.

Ярким проявлением этой концепции является понятие корректной постановки задачи. Его ввел Ж. Адамар в 1929 г., анализируя естественность граничных условий для различных типов дифференциальных уравнений в частных производных.

При решении количественных задач обычно ищется решение z по исходным данным u : $z = R(u)$, где R — функциональная связь между z и u . Будем считать, что z и u являются элементами метрических пространств Z и U — возможных решений и возможных исходных данных с метриками ρ_Z и ρ_U соответственно, причем выбор метрик обычно определяется постановкой задачи. Такая задача называется корректно поставленной, если выполнены следующие требования:

- 1) существование решения,
- 2) единственность решения,
- 3) устойчивость решения по отношению к возмущениям исходных данных, т. е. непрерывная зависимость решений z от входных данных u в метриках соответствующих пространств Z и U .

Если классы Z и U выбраны «естественно» для рассматриваемой задачи, то условия 1) и 2) характеризуют ее математическую определен-

ность. Условие 3) связывается с физической детерминированностью задачи, а также с возможностью применения численных методов ее решения при приближенных исходных данных.

Адамаром была высказана точка зрения, широко воспринятая математиками, что всякая математическая задача, соответствующая какой-либо физической или технической проблеме, должна удовлетворять перечисленным выше требованиям корректности. Согласно этой точке зрения, некорректно поставленные задачи (т. е. задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из названных требований) рассматривать нецелесообразно, и они не могут встречаться в физических и технических приложениях. В самом деле, если нарушено условие 3), то при сколько угодно малых погрешностях в \tilde{u} , приближенных исходных данных для u (что всегда имеет место в реальных задачах) отклонения соответствующих решений $\tilde{z} = R(\tilde{u})$ и $z = R(u)$ могут быть очень велики. Естественно, что при этом приближенное решение таких задач не имеет смысла.

Однако изложенная аргументация содержит неявное предположение, что в качестве приближенного решения \tilde{z} мы берем $\tilde{z} = R(\tilde{u})$, точное значение оператора R на \tilde{u} — приближенных исходных данных. Эта аргументация по существу устанавливает следующий факт: для неустойчивой задачи нельзя в качестве приближенного решения брать точное значение R на \tilde{u} . Таким образом, возникает вопрос: как надо ставить задачу о приближенном решении неустойчивых задач? Эти выводы относятся не только к неустойчивым, но и к так называемым плохо обусловленным задачам [3].

Трудности, связанные с проблемой интерпретации результатов наблюдений, обратили на себя внимание давно. Возникающие при этом математические задачи, как правило, оказываются либо неустойчивыми, либо не имеющими решения. В последнем случае вводили понятие обобщенного решения по методу наименьших квадратов, предложенному еще в прошлом веке Гауссом и Лежандром. Однако метод наименьших квадратов может дать неустойчивый ответ, поэтому его нельзя положить в основу автоматизированной обработки результатов наблюдений.

После этих предварительных замечаний рассмотрим устойчивые методы интерпретации наблюдений и проектирования сложных систем, в основе которых лежат понятие математической модели и метод регуляризации. Процесс изучения явления с помощью математической модели можно подразделить на следующие этапы:

1. Построение качественной модели. Этот этап состоит в выделении характерных элементов модели, структуры данных наблюдений и в форму-

лировке их связывающих закономерностей. Такая работа требует широкого знания фактов, относящихся к изучаемому явлению.

2. Построение математической модели, т. е. запись качественной модели в математических терминах (гипотетическая модель).

3. Исследование математических задач, возникающих в связи с построением математической модели. Основным на этом этапе является решение прямой задачи, т. е. получение теоретических следствий из принятой модели. Задачи, решаемые на этом этапе, являются типично математическими, и для их решения могут быть применены как развитый аппарат классической математики, так и математическое моделирование с помощью ЭВМ.

4. Исследование модели на основании критерия практики, т. е. сопоставление результатов экспериментов и наблюдений с теоретическими следствиями модели в рамках точности наблюдений. Основной задачей на этом этапе является выяснение вопросов:

а) существуют ли в принятом классе гипотетических моделей такие модели (сопоставимые), что отклонение теоретических следствий модели от данных эксперимента не выходит за пределы точности наблюдений (сопоставимость класса моделей сравнения по точности с результатами наблюдений);

б) если такие модели существуют, то разработать методы отбора из множества сопоставимых моделей наиболее целесообразной модели, т. е. дать интерпретацию результатов наблюдений (решить обратную задачу).

5. Использование апробированных моделей для проектирования и управления, а также дальнейшее развитие модели в связи с накоплением и уточнением данных об изучаемом явлении.

Математические модели различных разделов естественных наук имеют существенно различные индивидуальные структуры. Тем не менее во всем многообразии математических структур можно выделить типичные части:

а) структура модели объекта (обозначаемая в дальнейшем z),

б) структура данных наблюдений (обозначаемая u),

в) структура функциональной связи, обуславливающая количественную зависимость u от z (обозначаемая оператором A : $Az = u$).

В пространстве Z возможных моделей объекта вводится мера отклонения z_1 и z_2 , обозначаемая $\rho_Z(z_1, z_2)$. Аналогично вводится мера отклонения в пространстве U : $\rho_U(u_1, u_2)$ и в пространстве допустимых операторов связи A . Решение прямой задачи состоит в нахождении u по заданным z и A .

Рассмотрим подробнее обратные задачи, которые возникают при интерпретации результатов наблюдений и, как правило, являются неустойчивыми. Предположим, что выходные значения наблюдений заданы приближенно с точностью δ , т. е. вместо u задано \tilde{u}^δ , такое, что $\rho_U(u, \tilde{u}^\delta) \leq \delta$. Интересующая нас задача состоит в распознавании образа изучаемого объекта по приближенной информации о нем. Центральным вопросом для таких задач является проблема трактовки понятия решения. Мы уже знаем, что попытка получить ответ с помощью решения уравнения $Az = \tilde{u}^\delta$ с приближенной правой частью \tilde{u}^δ приводит к неудовлетворительному результату. В предложенном нами методе регуляризации эта задача ставится не как решение уравнения, а как решение неравенства $\rho_U(Az, \tilde{u}^\delta) \leq \delta$.

Назовем модель $z^\delta \in Z$ формально сопоставимой по точности с \tilde{u}^δ , если $\rho_U(Az^\delta, \tilde{u}^\delta) \leq \delta$. Пусть Z^δ — совокупность всех формально сопоставимых с \tilde{u}^δ моделей $z^\delta \in Z$. Изучение сопоставимости моделей из класса Z заключается в исследовании множества Z^δ . Если Z^δ — пустое множество, то это значит, что модели из класса Z имеют слишком грубую структуру, чтобы описать изучаемый объект с заданной точностью, т. е. являются несостоятельными (несогласованными с экспериментальными данными). В этом случае необходимо расширить класс допустимых моделей Z и брать, возможно, последовательность расширяющихся классов $Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_n$. пока не будет обеспечена сопоставимость.

Пусть Z^δ — не пусто. Тогда формально все элементы $z^\delta \in Z$ эквивалентны между собой по точности в качестве решения обратной задачи. Однако для неустойчивых задач множество Z^δ слишком широко. Поэтому необходимо установить принцип выбора наиболее целесообразной модели \bar{z}^δ с учетом дополнительной информации о характере искомого решения. Он может быть, например, основан на принципе минимальной сложности отобранной модели среди всех моделей, сопоставимых по точности с наблюдениями. Формализацию понятия сложности модели можно произвести с помощью функционалов сложности $\Omega[z]$ — неотрицательных непрерывных функционалов, удовлетворяющих следующему условию:

$$\text{множество } Z_C = \{z \in Z : \Omega[z] \leq C\} \text{ компактно в } Z.$$

Назовем нормальным решением задачи такой элемент \bar{z}^δ , который минимизирует функционал сложности

$$\Omega[\bar{z}^\delta] = \inf_{z^\delta \in Z^\delta} \Omega[z^\delta].$$

Иными словами, нормальное решение \bar{z}^δ — это «наименее сложная» модель из класса всех моделей, сопоставимых с результатами наблюдений в рамках заданной точности. Можно доказать единственность определения \bar{z}^δ при достаточно общих условиях выбора $\Omega[z]$, устойчивость выбора модели \bar{z}^δ по отношению к малым возмущениям результатов наблюдений \tilde{u}^δ , а также сходимости нормального решения \bar{z}^δ к точному решению \bar{z} уравнения $A\bar{z} = \bar{u}$ при $\rho_U(\bar{u}, \tilde{u}^\delta) \rightarrow 0$, т. е. в случае увеличения точности наблюдения. Таким образом, \bar{z}^δ является устойчивым обобщенным (регуляризованным) решением уравнения $Az = \tilde{u}^\delta$.

Описанный метод решения некорректных задач получил название метода регуляризации. Он является теоретической основой построения автоматизированных систем обработки результатов наблюдений. Независимо от характера конкретного эксперимента в процессе обработки его результатов можно выделить несколько основных этапов. Поэтому систему обработки разумно строить по модульно-иерархическому признаку, оставляя практически неизменной ее мониторинговую (управляющую) систему и осуществляя только различные наполнения модулей в зависимости от конкретного содержания рассматриваемого эксперимента.

В работах [4, 5] подробно описана многоцелевая, проблемно-ориентированная система обработки результатов наблюдений, рассказано о ее структуре, выделены модули, соответствующие различным режимам работы, и указано их назначение. Различные режимы служат для того, чтобы иметь возможность детально проанализировать различные вопросы, которые интересуют экспериментаторов в процессе их работы на установке. К числу таких вопросов могут относиться, например, выбор управляющих параметров установки, оценка влияния погрешности во входных данных на интерпретацию результатов измерений (анализ точности интерпретации) и т. д. Количественному анализу таких вопросов соответствуют определенные режимы работы системы обработки, что и дает основание называть ее многоцелевой. Кроме того, система является многоцелевой и в другом смысле: в силу достаточной общности и гибкости своей структуры она может использоваться для обработки целого класса различных экспериментов путем внесения необходимых изменений в наполнение ее модулей.

При правильно организованном эксперименте точность проведения измерений необходимо согласовать с точностью интерпретации. В случае упрощенной интерпретации на основе упрощенных математических моделей используется не вся информация, заключенная в выходных данных сложных и дорогостоящих измерений, и, наоборот, точная интерпретация

грубых наблюдений лишена научного содержания, а потому бессмысленна. Поэтому в настоящее время выдвигается задача системного подхода в организации эксперимента и его интерпретации, причем ЭВМ должна стать частью экспериментальной установки. Такая организация позволяет спроектировать весь эксперимент и согласовать допуски в различных узлах так, чтобы получить общий согласованный результат.

Первой полностью автоматизированной системой явилась система обработки экспериментов по определению сечений фотоядерных реакций (реакций, при которых ядра вещества захватывают γ -кванты падающего γ -излучения и испускают нейтроны). Такая система была разработана в 1967 г. в Московском университете [6]. Она включает как первичную обработку, так и интерпретацию, причем в процессе интерпретации приходится решать интегральное уравнение первого рода относительно искомого сечения $\sigma(E)$, где E — энергия γ -квантов падающего излучения.

В качестве другого примера приведем многоцелевую, автоматизированную систему обработки результатов эксперимента ЭОС (система обработки экспериментов), созданную в Институте прикладной математики АН СССР и описанную в работе [4]. Эта система в основном ориентирована на проблему диагностики физических параметров (плотности и температуры) оптически прозрачных объектов цилиндрического строения, например плазменных пучков. Для удобства работы с системой ЭОС создан специальный, проблемно-ориентированный язык приказов.

В заключение подчеркнем, что к разобранным вопросам близко по своему характеру примыкают проблемы оптимального проектирования сложных систем. В качестве примера можно привести задачу проектирования и расчета антенных устройств, обладающих заданными свойствами (задача синтеза антенн) [7, 8].

III. Для реализации огромных возможностей, которые дает использование ЭВМ, нужны высококвалифицированные кадры. Их подготовкой занят факультет вычислительной математики и кибернетики, прием на который доведен к настоящему времени до 350 человек. Отметим, что 225-летний юбилей Московского университета совпадает с 10-летним юбилеем факультета ВМиК: молодость факультета отражает молодость соответствующего научного направления.

Факультет ВМиК готовит специалистов по всему кругу вопросов, связанных с повышением эффективности работы ЭВМ и их применения в народном хозяйстве. На первых двух курсах обучение проводится по единому

для всех учебному плану и единым программам. Основное внимание уделяется фундаментальной, общематематической подготовке и программированию. Начиная с третьего курса, студенты распределяются по кафедрам, выбирают направление своей специализации, и каждый студент получает научного руководителя. Учебным планом предусмотрено глубокое изучение специальных дисциплин по выбранному профилю на многочисленных спецкурсах, спецсеминарах и приобретение навыков научной работы в процессе прохождения производственной практики, выполнения курсовой и дипломной работ.

Много внимания уделяется повышению методологической направленности лекций и семинаров, улучшению воспитательной работы, формированию у студентов научного, коммунистического мировоззрения, высоких морально-политических качеств.

Профессорско-преподавательский коллектив факультета состоит из крупных ученых и опытных педагогов. На факультете работают 4 академика, 4 члена-корреспондента АН СССР, 18 профессоров. Среди них 3 Героя Социалистического Труда, 8 лауреатов Ленинской и 8 лауреатов Государственной премий.

Научные исследования на факультете ведутся по широкому кругу актуальных проблем вычислительной математики. О некоторых из них рассказано в этом номере журнала нашими ведущими учеными.

В состав факультета входит научно-исследовательский вычислительный центр, оснащенный современной вычислительной техникой, которая используется для обучения студентов работе на ЭВМ и проведения широкой программы научных исследований. О задачах НИВЦ и его роли в системе Московского университета написано в статье директора НИВЦ профессора Е. А. Гребеникова [9].

Важное значение для Московского университета имеет создание сети ЭВМ для систем коллективного пользования (СКП). Работы по СКП ведутся в соответствии с постановлением ГКНТ СССР и приказом Минвуза СССР, головным исполнителем работ является НИВЦ. Следует подчеркнуть, что СКП МГУ — это первый в Советском Союзе проект такой разветвленной сети ЭВМ.

В соответствии с десятым пятилетним планом первая очередь СКП должна быть введена в строй к концу пятилетки. Создание СКП обеспечивает прямой доступ факультетов и институтов университета к мощной вычислительной технике, позволит широко ее использовать в учебном процессе и научных исследованиях. СКП будет иметь важное значение для

развития методов автоматизации экспериментов и обработки результатов наблюдений, способствуя повышению эффективности и качества научных исследований во многих подразделениях МГУ. С созданием СКП связано также развитие методов и средств автоматизации учебного процесса и управления университетом.

Одна из важнейших задач, поставленных XXV съездом КПСС перед советской наукой, сформулирована следующим образом: «Расширять исследования по теоретической и прикладной математике. Развивать научные работы, направленные на создание и эффективное применение в народном хозяйстве вычислительной техники»²⁾. Коллектив факультета вычислительной математики и кибернетики борется за то, чтобы внести свой вклад в решение этой задачи, за выполнение заданий десятой пятилетки. за достойную встречу славного юбилея Московского университета.

Список литературы

1. *Тихонов А. Н.* Вычислительная математика // Большая Советская Энциклопедия // Главный редактор А.М. Прохоров. Третье издание. — М.: Издательство «Советская Энциклопедия», 1971. — Т. 5. — С. 568–569.
2. *Тихонов А. Н.* Математические модели // Большая Советская Энциклопедия // Главный редактор А.М. Прохоров. Третье издание. — М.: Издательство «Советская Энциклопедия», 1974. — Т. 15. — С. 480.
3. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974. — 222 с.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Думова А. А., Митрофанов В. Б., Пергамент А. Х., Пергамент М. И.* О многоцелевой проблемно-ориентированной системе обработки результатов экспериментов. — Препринт ИПМ АН СССР, № 42. — М., 1976. — 49 с.
5. *Тихонов А. Н.* Математические модели и научно-технический прогресс (автоматизация обработки наблюдений) // Наука и человечество: Международный ежегодник. — М.: Изд-во "Знание 1979. — С. 283–289.
6. *Tichonov A. N., Shevchenko V. G., Galkin V. Ya., Goryachev B. I., Zaikin P. N., Ishchanov B. S., Kapitonov I. M.* On Overall Automatization of Data Processing for Determining the Photonuclear Reaction Cross-section // Proceedings of IFIP Congress. — Edingburgh, 1968. — P. 117–129.
7. *Тихонов А. Н., Дмитриев В. И.* О методах решения обратной задачи теории антенн // Вычислительные методы и программирование. Сборник работ

Вычислительного центра Московского университета. Раздел III Методы исследования задач теории антенн / Под ред. В.И. Дмитриева, А.С. Ильинского. Под общим руководством И.С. Березина. — М.: Издательство Московского университета, 1969. — Вып. 13. — С. 209-214.

8. *Тихонов А. Н., Свешников А. Г., Дмитриев В. И., Ильинский А. С.* Некоторые общие алгоритмы решения прямых и обратных задач электродинамики // Вычислительные методы и программирование. Сборник работ Вычислительного центра Московского университета. Численные методы в задачах электродинамики / Под ред. В.И. Дмитриева, А.С. Ильинского. Под общим руководством И.С. Березина. — М.: Издательство Московского университета, 1973. — Вып. 20. — С. 3-11.
9. *Гребеников Е. А.* Научно-исследовательский вычислительный центр в системе Московского университета // Вестник Московского университета. Посвящается 225-летию Московского университета. Серия 15 Вычислительная математика и кибернетика. — 1979. — № 4. — С. 14-21.

Кафедра вычислительной математики

Поступила в редакцию
05 июля 1979 г.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА**

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. Н. Тихонов

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 20 I 1935)

Мы предлагаем здесь исследование вопроса о единственности решений для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

для бесконечной прямой. Решения этого уравнения не определяются единственным образом по заданному начальному значению $\varphi(x)$ (§ 1). Далее (§§ 2–5) мы исследуем интеграл Пуассона

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4t} \right] \varphi(\xi) d\xi \quad (2)$$

и выясним, когда заданное решение уравнения (1) представимо в таком виде. Кроме того мы установим некоторые условия единственности решения (1) для бесконечной прямой.

В §§ 6–7 мы занимаемся теми же задачами для полупрямой. В § 8 мы ставим новую «обратную» задачу теплопроводности, имеющую целью определить решение $u(x, t)$ для $x \geq 0$ $t < 0$ по заданному значению $u(x, 0) = \varphi(x)$. При этом никаких граничных условий не требуется — они определяются сами.

§ 1. Рассмотрим функцию

$$u(x, t) = F(t) + x \cdot F_1(t) + \frac{x^2}{2!} \cdot F_2(t) + \dots$$

$$\dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot F^{(n)}(t) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot F_1^{(n)}(t) + \dots$$

Очевидно, что если этот ряд равномерно сходится, то он представляет решение уравнения теплопроводности. Если при этом функции $F(t)$ и $F_1(t)$ обладают тем свойством, что они со всеми своими производными обращаются в 0 при $t = 0$, то полученное решение будет отлично от тождественного нуля, но $u(x, 0) = 0$ при $t = 0$.

Выбор функций $F(t)$ и $F_1(t)$, удовлетворяющих поставленным условиям, нетрудно осуществить. Этот пример показывает, что начальное условие не определяет единственного решения уравнения (1).

§ 2. Пусть мы имеем решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности, определенное для всех значений x и $t \geq 0$.

Отсюда можно заключить, что $u(x, t)$ — целая функция по x и что она имеет все производные по t . Таким образом, она представима в виде

$$u(x, t) = F(t) + x \cdot F_1(t) + \frac{x^2}{2!} \cdot F'(t) + \dots \\ \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot F^{(n)}(t) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot F_1^{(n)}(t) + \dots,$$

причем

$$F(t) = u(0, t), \quad F_1(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t).$$

Отсюда как следствие получается, что двух различных решений уравнения теплопроводности $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, для которых

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t),$$

быть не может.

Эти условия единственности аналогичны условию Коши–Ковалевской.

§ 3. Если задано непрерывное начальное значение $\varphi(x)$, то решение уравнения теплопроводности, принимающие это начальное значение, обычно записывают в виде интеграла Пуассона

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4t} \right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Но этот интеграл может представлять решение нашей задачи только тогда, когда этот интеграл сходится. Кроме того, обычные доказательства

предполагают возможность дифференцировать это выражение под знаком интеграла, для чего предполагают равномерную сходимость интегралов, получающихся от двукратного дифференцирования под знаком интеграла.

Мы доказываем следующую теорему.

Т е о р е м а. Если интеграл $P(x, t)$ сходится для некоторого значения x_0, t_0 , то он сходится для любых значений x, t ($0 \leq t \leq t_0$) и представляет в этой области решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее поставленному начальному условию.

§ 4. Пусть дано некоторое решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$, определенное для $-\infty < x < +\infty$ и $0 \leq t$; при каких условиях $u(x, t)$ представимо в виде интеграла Пуассона?

Установим для этого два различных типа условий.

Первое условие, необходимое и достаточное, получается при изучении аналитической структуры функций

$$u(0, t) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$$

(эти функции, как мы видели в § 2, вполне определяют решения).

Второе условие (достаточное) получается при помощи ограничения на характер роста $u(x, t)$ при $x \rightarrow \infty$.

Первое условие можно формулировать так:

Для того чтобы решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$ было представимо в виде интеграла Пуассона, необходимо и достаточно, чтобы

$$u\left(0, \frac{1}{t}\right) \cdot \sqrt{t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \cdot t^{3/2}$$

были представимы при помощи преобразования Лапласа ¹⁾.

§ 5. Обозначим через

$$f(x) = \max_{0 \leq t \leq t_0} u(x, t).$$

¹⁾Что касается условий для того, чтобы $f(x)$ была представима при помощи преобразования Лапласа

$$f(t) = \int_0^{\infty} \exp(-t\alpha)g(\alpha) d\alpha,$$

Второе условие можно формулировать так:
 Если существует такое C , что

$$f(x) \cdot \exp(-Cx^2) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0, \quad (I)$$

то двух разных решений уравнения теплопроводности, удовлетворяющих условию (I) и принимающих одинаковые начальные условия, быть не может. Причем $u(x, t)$ в этом случае представимо в виде интеграла Пуассона. Заметим, что среди функций, построенных в § 1 и не удовлетворяющих условию единственности, легко найти функции, для которых

$$f(x) < \exp(x^{2+\varepsilon})$$

при произвольно малом ε .

§ 6. Рассмотрим задачу: найти решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности по заданным

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (x \geq 0); \quad u(0, t) = \mu(t) \quad (t \geq 0)$$

(первая краевая задача для бесконечной полупрямой).

Эта задача имеет не единственное решение, как в том легко убедиться рассуждениями, аналогичными § 1.

Если наложить условие (см. § 5)

$$f(x) \cdot \exp(-Cx^2) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0,$$

то получается единственное решение, представимое в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \mu(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right] \right\} \varphi(\xi) d\xi.$$

§ 7. Обратимся к задаче Фурье: определить решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$ ($x \geq 0, t > -\infty$), удовлетворяющее условию

$$u(0, t) = \mu(t).$$

Очевидно, что эта задача не определена, так как

$$u(x, t) = x \cdot F_1(t) + \frac{x^3}{3!} \cdot F_1'(t) + \dots$$

удовлетворяет условию задачи при $\mu(t) = 0$, если только этот ряд сходится. Если $F_1(t)$ — многочлен степени n , то

$$\text{для } n = 0 \quad u_0(x, t) = kx,$$

$$\text{для } n = 1 \quad u_1(x, t) = k_1xt + \left(kx + k_1 \frac{x^3}{3!}\right),$$

.....

Мы доказываем, что при условии

$$\left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right| < M,$$

разность

$$\bar{u}(x, t) - \bar{\bar{u}}(x, t)$$

двух функций $\bar{u}(x, t)$ и $\bar{\bar{u}}(x, t)$, удовлетворяющих условиям задачи Фурье, является многочленом $u_n(x, t)$, удовлетворяющим уравнению теплопроводности.

Если $n = 0$, то

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{x}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right] \mu(\tau) d\tau.$$

§ 8. Рассмотрим задачу: *определить решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$ для всех значений $x \geq 0$ и $t < 0$, если задана*

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Эта задача, так же как и предшествующие, не определена без дополнительных условий, так как

$$u(x, t) = F(t) + x \cdot F_1(t) + \frac{x^2}{2!} \cdot F'(t) + \frac{x^3}{3!} \cdot F_1'(t) + \dots \quad (t = 0)$$

является решением поставленной задачи при $\varphi(x) = 0$, если только ряд сходится и $F(t)$ и $F_1(t)$ вместе со всеми производными обращается в нуль при $t = 0$ (такие $F(t)$ и $F_1(t)$ существуют, § 1).

Мы доказываем:

Теорема. Если $u(x, t)$ и $u_1(x, t)$ удовлетворяют поставленной задаче и

$$\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$$

ограничены (равномерно), то

$$u(x, t) = u_1(x, t).$$

Если $n = 0$, т. е. функция $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ ограничена, то

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{x}{(-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(-\tau)}\right] \mu(\tau) d\tau,$$

где $u(0, t) = \mu(t)$ (ср. § 7).

При помощи простых преобразований получаем:

$$\bar{\varphi}(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha z) \bar{\mu}(z) dz,$$

где

$$\alpha = x^2; \quad z = -\frac{1}{4\tau}; \quad \bar{\varphi}(\alpha) = \frac{\varphi(\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}};$$

$$\bar{\mu}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\mu\left(-\frac{1}{4z}\right)}{\sqrt{z}}.$$

Так как $\varphi(x) = 0$, то $\bar{\varphi}(\alpha) = 0$; в силу теоремы Лерха [2] $\bar{\mu}(z) = 0$, а, следовательно, $\mu(t) = 0$.

Общий случай для любого n сводится к предшествующему простым дифференцированием.

Поступило 20 I 1935

Список литературы

1. Widder D. V. The inversion of the Laplace integral and the related moment problem // Transactions of the American Mathematical Society. — 1934. — V. 36. — P. 107–200.
2. Lerch M. Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel // Acta Mathematica. — 1903. — V. 27. — P. 339–352.

THÉORÈMES D'UNICITÉ POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

Par A. Tichonov (Tychonoff)

(Présenté par N. Lusin, de l'Académie, le 20 I 1935)

Nous nous proposons d'étudier la question de l'unicité d'une solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

dans l'intervalle infini des x .

Une solution de cette équation n'est pas définie d'une manière univoque par la valeur initiale $\varphi(x)$ (§ 1). Nous examinerons dans la suite (§§ 2-5) l'intégrale de Poisson

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4t} \right] \varphi(\xi) d\xi$$

et nous allons déterminer les conditions pour que la solution donnée de l'équation (1) se présente dans cette forme. En outre, nous allons établir des conditions d'unicité de la solution de l'équation (1) pour une droite infinie.

Dans les §§ 6-7 nous nous occupons des mêmes problèmes pour une demi-droite. Au § 8 nous posons un nouveau problème de conduction de la chaleur, ayant pour but de déterminer la solution $u(x, t)$ pour $x \geq 0$ $t < 0$ d'après la valeur donnée de $u(x, 0) = \varphi(x)$. D'ailleurs, on n'exige aucune condition pour $x = 0$ qui se détermine par elle-même.

§ 1. Considérons une fonction

$$u(x, t) = F(t) + x \cdot F_1(t) + \frac{x^2}{2!} \cdot F_2(t) + \dots$$

$$\dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot F^{(n)}(t) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot F_1^{(n)}(t) + \dots$$

Évidemment, si cette série converge uniformément, elle présente une solution de l'équation de la chaleur; si de plus les fonctions $F(t)$ et $F_1(t)$ possèdent la propriété de s'annuler, ainsi que leurs dérivées, pour $t = 0$, alors la solution obtenue n'est pas identiquement nulle, quoique pour $t = 0$ on a $u(x, 0) = 0$.

Il est facile de réaliser le choix de fonctions satisfaisant aux conditions données. Cet exemple prouve que la condition initiale ne détermine pas en général la solution unique.

§ 2. Soit $u(x, t)$ une solution de l'équation de la chaleur définie pour toutes les valeurs de x et pour $t \geq 0$.

Alors il en résulte que $u(x, t)$ est une fonction entière de x et elle admet toutes les dérivées par rapport à t . Ainsi elle peut être représentée sous la forme

$$u(x, t) = F(t) + x \cdot F_1(t) + \frac{x^2}{2!} \cdot F'(t) + \dots$$

$$\dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot F^{(n)}(t) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot F_1^{(n)}(t) + \dots,$$

où

$$F(t) = u(0, t), \quad F_1(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t).$$

Il en résulte que deux solutions différentes $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$ de l'équation de la chaleur, pour lesquelles

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t)$$

ne peuvent exister.

Ces conditions d'unicité sont analogues aux conditions de Cauchy-Kowalevsky.

§ 3. Etant donnée une fonction continue $\varphi(x)$, on exprime la solution de l'équation qui se réduit à $\varphi(x)$ pour $t = 0$, par l'intégrale de Poisson

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4t} \right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Mais cette intégrale peut représenter une solution de notre problème dans le seul cas où cette intégrale converge. De plus, la démonstration ordinaire suppose

la possibilité de la cette expression sous le signe, ce qui exige la convergence uniforme des intégrales obtenues par une double dérivation sous le signe.

Nous allons démontrer le théorème suivant:

T h é o r è m e. *Si l'intégrale $P(x, t)$ converge pour une certaine valeur x_0, t_0 , elle converge pour toutes les valeurs x, t avec $0 \leq t \leq t_0$ et représente dans ce domaine une solution de l'équation de la chaleur satisfaisant à la condition initiale donnée.*

§ 4. Etant donnée une solution quelconque de l'équation de la chaleur $u(x, t)$, $-\infty < x < +\infty, t \geq 0$, sous quelles condition $u(x, t)$ est-elle représentée par l'intégrale de Poisson?

Établissons pour cela deux conditions différentes.

La première condition, nécessaire et suffisante, découle de l'étude de la structure analytique de

$$u(0, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$$

(ces fonctions, comme nous venons de le voir dans le § 2, déterminent complètement une solution).

La seconde condition (suffisante) s'obtient par une restriction concernant le caractère de croissance de $u(x, t)$ pour $x \rightarrow \infty$.

On peut formuler la première condition ainsi:

Pour que $u(x, t)$ soit une solution de l'équation de la chaleur, représentable par l'intégrate de Poisson, il faut et il suffit que

$$u\left(0, \frac{1}{t}\right) \cdot \sqrt{t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \cdot t^{3/2}$$

*soient les transformées de Laplace des fonctions continues.*¹⁾

§ 5. Désignons par

$$f(x) = \max_{0 \leq t \leq t_0} u(x, t).$$

¹⁾Quant aux conditions pour qu'une fonction $f(t)$ sois la transformée de Laplace

$$f(t) = \int_0^{\infty} \exp(-t\alpha)g(\alpha) d\alpha,$$

On peut formuler la seconde condition ainsi:
S'il existe un C tel que

$$f(x) \cdot \exp(-Cx^2) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0, \quad (I)$$

alors il ne peut exister deux différentes solutions de l'équation de la chaleur satisfaisant à la condition (I) et se réduisant à la même fonction pour $t = 0$. Dans ce cas $u(x, t)$ s'exprime par l'intégrale de Poisson. Remarquons que, parmi les fonctions construites dans le § 1 et qui ne satisfont pas à la condition d'unicité, il est facile de trouver des fonctions pour lesquelles

$$f(x) \leq \exp(x^{2+\varepsilon})$$

ε étant arbitrairement petit.

§ 6. *Considérons le problème: trouver la solution $u(x, t)$ de l'équation de la chaleur pour laquelle*

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (x \geq 0); \quad u(0, t) = \mu(t) \quad (t \geq 0)$$

(premier problème aux limites pour une demi-droite infinie).

Ce problème n'admet pas de solution unique, comme on peut s'en persuader par un raisonnement analogue à celui du § 1.

Si nous imposons la conditions (voir au § 5)

$$f(x) \cdot \exp(-Cx^2) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0,$$

nous obtenons une seule solution, qui peut être représentée sous la forme

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \mu(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right] \right\} \varphi(\xi) d\xi.$$

§ 7. *Considérons le problème de Fourier: déterminer une solution $u(x, t)$ de l'équation de la chaleur ($x \geq 0, t > -\infty$) satisfaisant à la condition*

$$u(0, t) = \mu(t).$$

Évidemment ce problème est indéterminé, car

$$u(x, t) = x \cdot F_1(t) + \frac{x^3}{3!} \cdot F_1'(t) + \dots$$

satisfait aux conditions du problème pour $\mu(t) = 0$, pourvu que cette série converge. Si $F_1(t)$ est un polynôme, alors

pour $n = 0$ $u_0(x, t) = kx,$

pour $n = 1$ $u_1(x, t) = k_1xt + \left(kx + k_1 \frac{x^3}{3!}\right),$

.....

Nous démontrons que sous la condition

$$\left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right| < M,$$

la différence

$$\bar{u}(x, t) - \bar{\bar{u}}(x, t)$$

de deux fonctions satisfaisant aux conditions du problème de Fourier, est justement le polynôme $u_n(x, t)$ (satisfaisant à l'équations de la chaleur).

En particulier, si $n = 0$,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{x}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right] \mu(\tau) d\tau.$$

§ 8. Considérons le problème suivant: *déterminer une solutions $u(x, t)$ de l'équation de la chaleur (pour $x \geq 0$ et $t < 0$), s'il est donné*

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Ce problème, ainsi que le précédent, n'est pas déterminé, sans des conditions complémentaires, puisque

$$u(x, t) = F(t) + x \cdot F_1(t) + \frac{x^2}{2!} \cdot F'(t) + \frac{x^3}{3!} \cdot F_1'(t) + \dots \quad (t = 0)$$

est une solution du problème posé pour $\varphi(x) = 0$ pourvu que la série converge, si $F(t)$ et $F_1(t)$ s'annulent avec toutes leurs dérivées pour $t = 0$ (il existe de telles fonctions $F(t)$ et $F_1(t)$) voir au § 1).

Nous avons démontré:

T h é o r è m e. Si $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$ satisfont au problème posé et si

$$\left| \frac{\partial^n u_1(x, t)}{\partial x^n} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^n u_2(x, t)}{\partial x^n} \right|$$

sont bornées (uniformément),

$$u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

En effet, si $n = 0$, c'est-à-dire que la fonction $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ est bornée, on a:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{x}{(-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(-\tau)}\right] \mu(\tau) d\tau,$$

où $u(0, t) = \mu(t)$ (voir au § 7).

Au moyen de transformations simples nous obtenons:

$$\bar{\varphi}(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha z) \bar{\mu}(z) dz,$$

où

$$\alpha = x^2; \quad z = -\frac{1}{4\tau}; \quad \bar{\varphi}(\alpha) = \frac{\varphi(\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}};$$

$$\bar{\mu}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\mu\left(-\frac{1}{4z}\right)}{\sqrt{z}}.$$

Si $\varphi(x) = 0$ alors $\bar{\varphi}(\alpha) = 0$; par suite $\bar{\mu}(z) = 0$ en vertu du théorème de Lerch [2], donc $\mu(t) = 0$.

Le cas général pour n arbitraire se réduit au précédent par une simple dérivation.

Manuscript reçu le 20 I 1935

Список литературы

1. *Widder D. V.* The inversion of the Laplace integral and the related moment problem // Transactions of the American Mathematical Society. — 1934. — V. 36. — P. 107–200.
2. *Lerch M.* Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel // Acta Mathematica. — 1903. — V. 27. — P. 339–352.

THÉORÈMES D'UNICITÉ POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

A. Tychonoff (Moscou)

La question d'unicité pour les solutions de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{I})$$

dans le cas d'un milieu infini, est à peine abordée.¹⁾

L'étude des phénomènes thermiques sur un segment fini d'une droite est souvent remplacée en physique par l'étude des solutions de l'équation de la chaleur sur la droite infinie. Nous allons montrer (dans le § 1) que dans ce dernier cas il existe plusieurs solutions vérifiant les conditions initiales données. Puis (§ 2 et 5) nous établissons certaines conditions qui définissent une solution unique de l'équation de la chaleur. Les § 3 et § 4 sont consacrés à l'étude de l'intégrale de Poisson et des conditions sous lesquelles une solution de l'équation de la chaleur peut être représentée par cette intégrale.

Dans les paragraphes suivants sont étudiées les questions d'unicité pour l'équation de la chaleur, dans le cas d'une demi-droite. Dans le § 6 est traité le premier problème aux limites pour le cas d'une demi-droite, c'est-à-dire, le problème de déterminer pour $t > t_0$ la solution $u(x, t)$ de l'équation (I) vérifiant les conditions:

$$\begin{aligned} u(x, t_0) &= \varphi(x), & 0 \leq x < \infty, \\ u(t, 0) &= \mu(t), & t_0 \leq t. \end{aligned}$$

Математический сборник. — 1935. — Т. 42, № 2. — С. 199–215. (франц.) Издаётся при редакционном участии Московского, Ленинградского и Казанского математических обществ. Основан в 1866 г. — М.—Л.: Управление университетов и научных учреждений Н.К.П., Государственное объединенное научно-техническое издательство.

¹⁾Voir le mémoire de *Levi E.E.* // *Annali di Matematica* — 1908, où il est démontré que parmi les solutions de l'équation de la chaleur, pour lesquelles sont remplies les conditions

$$|u(x, t)| < |x|^n, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| < |x|^n \quad (|x| > x_0, \quad n - \text{un nombre constant}),$$

il en existe une seule qui vérifie la condition initiale donnée $u(x, 0) = \varphi(x)$ (comparer avec le § 5 du présent travail).

Les conclusions auxquelles on arrive dans ce cas, sont analogues à celles que nous aurons obtenues dans les § 1-5 pour le cas d'une droite infinie.

Dans le § 7 est considéré le problème de Fourier «sans conditions initiales», dans lequel il s'agit de déterminer une solution assujettie à une seule condition aux limites

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (-\infty < t).$$

Cette condition ne détermine pas de solution unique, mais si l'on suppose en outre que les dérivées d'ordre n par rapport à x sont bornées:

$$\left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right| < M,$$

il se trouve que la différence de deux solutions possédant cette dernière propriété est un polynôme de degré au plus égal à n (qui vérifie l'équation de la chaleur; voir pour plus de détails le § 7).

Dans le § 8 est traité un problème de la chaleur entièrement nouveau. Nous démontrons que la solution $u(x, t)$ de l'équation de la chaleur, définie pour $x \geq 0$, $-\infty < t \leq t_0$, est complètement déterminée par ses valeurs pour $t = t_0$ si, comme auparavant, on suppose que $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ est bornée. Ce problème peut être appelé «problème inverse de la chaleur»; tandis que les problèmes précédents avaient le but de déterminer la «température» dans «l'avenir» (pour $t \geq t_0$), ce dernier problème inverse est de retrouver «la marche historique» de la température, connaissant ses valeurs pour le temps présent (pour $t = t_0$). Il est à noter que dans ce cas on n'a pas besoin de connaître les valeurs aux limites: elles sont déterminées par les autres conditions du problème.

§ 1. Dans le paragraphe présent nous allons construire une solution $u(x, t)$ de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{I}$$

dans un milieu infini ($-\infty < x < +\infty$), qui s'annulant pour $t = 0$, $u(x, 0) \equiv 0$, n'est pas néanmoins nulle identiquement.

Dans ce but nous allons considérer la fonction

$$u(x, t) = F(t) + x \cdot F_1(t) + \frac{x^2}{2!} \cdot F'(t) + \frac{x^3}{3!} \cdot F_1'(t) + \dots \\ \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot F^{(n)}(t) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot F_1^{(n)}(t) + \dots, \tag{1}$$

qui est une solution de l'équation de la chaleur pour tout choix des fonctions $F(t)$ et $F_1(t)$ pourvu que la série (1) soit convergente et qu'il soit légitime de la dériver terme à terme par rapport à t . Si en outre les fonctions $F(t)$, $F_1(t)$ ainsi que toutes leurs dérivées s'annulent pour $t = 0$, $u(x, t)$ est une fonction cherchée,

Il nous reste à montrer qu'il existe des fonctions $F(t)$, $F_1(t)$ possédant les propriétés signalées. À cet effet rappelons qu'à toute suite de nombres positifs croissants A_n telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}} < +\infty,$$

correspondent comme on sait ²⁾ des fonctions $f(t)$ possédant les dérivées de tous les ordres et telles que l'on a

$$1) f^{(n)}(0) = 0, \quad 2) |f^{(n)}(t)| < A_n.$$

Posons

$$A_n = (kn)!$$

où $1 < k < 2$. La série

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}} \leq \sum \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{kn}{e}\right)^{kn}}} = \sum \frac{1}{\left(\frac{kn}{e}\right)^k}$$

est convergente puisque $k > 1$. Choisissons maintenant $F(t)$, $F_1(t)$ parmi les fonctions correspondant à cette suite des A_n . Il est aisé de voir que la série (1) et la série obtenue par dérivation de (1) par rapport à t sont uniformément convergentes, c. q. f. d.

§ 2. Nous allons démontrer que toute solution de l'équation de la chaleur, définie dans la région $-\infty < x < +\infty$, $0 < t$, est une fonction entière de x pour tout $t > 0$, dont le développement suivant les puissances de x est de la forme

$$u(x, t) = F(t) + xF_1(t) + \frac{x^2}{2!} F'(t) + \frac{x^3}{3!} F_1'(t) + \dots \quad (1)$$

En effet, dans la région $-R \leq x \leq +R$, $t > t_0$ la fonction $u(x, t)$ s'exprime à l'aide des valeurs $u(-R, t)$, $u(+R, t)$ qu'elle prend sur les droites $x = \pm R$ et de la valeur initiale $u(x, t_0)$, comme il suit:

²⁾ Voir Carleman. Les fonctions quasi analytiques. Gauthier-Villars, 1926, p. 63.

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t} \right] u(\xi, t_0) d\xi + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{x+R}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{(x+R)^2}{4(t-\tau)} \right] \mu_1(\tau) d\tau + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{x-R}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{(x-R)^2}{4(t-\tau)} \right] \mu_2(\tau) d\tau, \quad (2)
\end{aligned}$$

les fonctions $\mu_1(t)$ et $\mu_2(t)$ étant liées avec les fonctions $u(-R, t)$, $u(+R, t)$ par des équations intégrales de Volterra ³⁾. De cette représentation on peut conclure que $u(x, t)$ est une fonction holomorphe de x dans le domaine $-R < x < R$; R étant quelconque, il s'ensuit que $u(x, t)$ est une fonction entière de x :

$$u(x, t) = F(t) + xF_1(t) + \frac{x^2}{2!} F_2(t) + \frac{x^3}{3!} F_3(t) + \dots \quad (3)$$

où l'on a :

$$F(t) = u(0, t), \quad F_1(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t).$$

La formule (2) nous montre aussi que $u(x, t)$ possède les dérivées de tous les ordres par rapport à t , ce qui prouve que le développement (3) coïncide avec (1). Du développement (3) on déduit que deux solutions de l'équation de la chaleur pour lesquelles on a

$$\begin{aligned}
u(0, t) &= u_1(0, t), \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t),
\end{aligned}$$

sont identiques. Donc, les données de Cauchy assurent l'unicité.

§ 3. On définit ordinairement la solution de l'équation de la chaleur qui vérifie la condition initiale donnée $u(x, 0) = \varphi(x)$ à l'aide de l'intégrale de Poisson:

$$u(x, t) = P(x, t),$$

où

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t} \right] \varphi(\xi) d\xi.$$

³⁾ Voir *Goursat*. Cours d'Analyse. T. III, ch. XXIX.

Pour démontrer que $P(x, t)$ vérifie l'équation de la chaleur, on calcule les dérivées de $P(x, t)$ en permutant l'ordre des opérations de la dérivation et de la quadrature ce qui impose a priori la condition supplémentaire que la fonction $\varphi(x)$ est telle que la dérivée seconde de $P(x, t)$ par rapport à x est représentée par une intégrale uniformément convergente.

Nous allons montrer que, si pour x_0, t_0 l'intégrale $P(x_0, t_0)$ est convergente, $P(x, t)$ est convergente et vérifie l'équation de la chaleur pour tout couple de valeurs x, t , ($t < t_0$).

En effet, l'intégrale

$$P(x_0, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t_0}} \exp \left[-\frac{(x_0 - \xi)^2}{4t_0} \right] \varphi(\xi) d\xi$$

étant convergente, l'intégrale

$$M(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \frac{1}{\sqrt{t_0}} \exp \left[-\frac{(x_0 - \xi)^2}{4t_0} \right] \varphi(\xi) d\xi$$

est une fonction bornée de ξ .

Par définition $P(x, t)$ est la limite pour $T \rightarrow \infty$ de l'intégrale

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-T}^{+T} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x_0 - \xi)^2}{4t} \right] \varphi(\xi) d\xi = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-T}^{+T} \frac{1}{\sqrt{t_0}} \exp \left[-\frac{(x_0 - \xi)^2}{4t_0} \right] \varphi(\xi) d\xi \times \\ & \quad \times \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{\xi^2(t_0 - t) - 2\xi(xt_0 - x_0t) + (x^2t_0 - x_0^2t)}{4tt_0} \right]. \end{aligned}$$

En intégrant par parties et en posant

$$\omega(\xi, t_0, t, x_0, x) = \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{\xi^2(t_0 - t) - 2\xi(xt_0 - x_0t) + (x^2t_0 - x_0^2t)}{4tt_0} \right],$$

on voit que cette intégrale est égale à

$$M(\xi) \omega(\xi, t_0, t, x_0, x) \Big|_{-T}^{+T} - \int_{-T}^{+T} M(\xi) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} d\xi.$$

Cette fonction ω et toutes ses dérivées par rapport à ξ , x , t tendent vers 0, ξ tendant vers l'infini, comme

$$\exp(-c \xi^2) \quad (t_0 - t > 0)$$

de sorte qu'on à:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M(\xi) \omega(\xi, t_0, t, x_0, x) \Big|_{-T}^{+T} = 0.$$

En passant à la limite pour $T \rightarrow \infty$ nous avons donc:

$$P(x, t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \omega(\xi, t_0, t, x_0, x) d\xi,$$

l'intégrale du second membre étant uniformément convergente pour $t < t_0$, $x' \leq x \leq x''$, (x', x'' — arbitraires).

Ensuite on a:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = - \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x} \omega(\xi, t_0, t, x_0, x) d\xi,$$

car l'intégral du seconde membre est uniformément convergente.

D'autre part, on à:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(- \int_{-T}^{+T} M(\xi) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial x} d\xi \right) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ -M(\xi) \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{-T}^{+T} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-T}^{+T} \frac{\xi - x}{2t^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\xi - x)^2}{4t} \right] \varphi(\xi) d\xi \right\}, \end{aligned}$$

et comme le terme intégré tend vers 0, on à:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi - x}{2t^{3/2}} \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4t} \right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Un raisonnement analogue prouve que $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial P}{\partial t}$ peuvent être, elles aussi, calculées en dérivant $P(x, t)$ sous le signe (les intégrales obtenues par ces dérivations sont uniformément convergentes pour $t < t_0$, $x' \leq x \leq x''$) ce qui prouve que $P(x, t)$ est une solution de l'équation de la chaleur pour toute valeur de x et t pourvu qu'on a: $0 < t < t_0$.

Il est à noter que pour $t = t_0$ les cas suivants sont possibles:

1°. L'intégrale $P(x, t_0)$ est divergente pour tout $x \neq 0$ et converge pour $x = 0$.

2°. L'intégrale $P(x, t_0)$ est divergente pour tout $x > 0$ (ou $x \geq 0$) et converge pour toutes les autres valeurs de x .

3°. L'intégrale $P(x, t_0)$ est divergente pour tout $x < 0$ (ou $x \leq 0$) et converge pour toutes les autres valeurs de x .

4°. L'intégrale $P(x, t_0)$ est divergente pour tout $x < a$ et $x > b$ (ou $x \leq a$ et $x \geq b$) et converge pour toutes les autres valeurs de x .

Le premier cas se présente pour

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\xi}{1 + \xi^4} \cdot \exp \left[\frac{\xi^2}{4t_0} \right],$$

l'intégrale

$$P(x, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t_0}} \exp \left[-\frac{-2\xi x + x^2}{4t_0} \right] \frac{\xi}{1 + \xi^4} d\xi$$

étant divergente pour $x \neq 0$ et convergente pour $x = 0$.

Le second cas a lieu pour

$$\varphi_2(x) = \frac{\xi}{1 + \xi^4} \exp \left[\frac{\xi^2}{4t_0} \right] \quad \text{pour } \xi \geq 0 \quad \left(\varphi_2'(\xi) = \exp \left[-\frac{\xi^2}{4t_0} \right], \quad \xi \geq 0 \right),$$

$$\varphi_2(\xi) = 0 \quad \text{pour } \xi < 0 \quad \left(\varphi_2'(\xi) = 0, \quad \xi < 0 \right),$$

l'intégrale

$$P(x, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t_0}} \exp \left[-\frac{-2x\xi + x^2}{4t_0} \right] \frac{\xi}{1 + \xi^4} d\xi,$$

$$\left(P'(x, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t_0}} \exp \left[-\frac{-2x\xi + x^2}{4t_0} \right] d\xi \right)$$

étant convergente pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité $x \leq 0$ (ou $x < 0$) et divergente pour $x > 0$ (ou $x \geq 0$).

Le troisième cas est réalisé si l'on prend $\varphi_3(\xi) = \varphi_2(-\xi)$.

À l'aide des fonctions $\varphi_2(\xi)$ et $\varphi_3(\xi)$ on peut facilement construire un exemple de fonction $\varphi_4(\xi)$ pour laquelle l'intégrale $P(x, t_0)$ est convergente seulement pour les valeurs de x dans un intervalle (a, b) (les extrémités exclues ou non), ce qui prouve la possibilité du cas 4°.

§ 4. Passons aux conditions sous lesquelles la solution donnée de l'équation de la chaleur, définie dans la région $-\infty < x < +\infty$, peut être représentée par l'intégrale de Poisson. Nous allons donner deux réponses différentes à cette question.

D'une part nous allons donner les conditions imposées aux fonctions $u(0, t)$ et $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x}$ (données de Cauchy), qui sont nécessaires et suffisantes pour que $u(x, t)$ soit représentable par l'intégrale de Poisson. D'autre part, nous établirons des conditions (suffisantes) concernant l'ordre de croissance par rapport à x d'une solution représentée à l'aide de l'intégrale de Poisson, la même restriction assure l'unicité de la solution.

Retournons à la première condition. Posons-nous la question suivante: que peut-on dire de $P(0, t)$ et $\frac{\partial P(0, t)}{\partial x}$, si l'on sait que l'intégrale $P(x, t)$ est convergente pour $0 < t < t_0$?

Des transformations élémentaires nous donnent:

$$\begin{aligned} P(0, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4t}\right] \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) \left[\frac{\varphi(\xi) + \varphi(-\xi)}{2\sqrt{\pi}}\right] d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{z}{t}\right) \psi_1(z) dz = \frac{1}{\sqrt{t}} \Psi_1\left(\frac{1}{t}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(0, t)}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{2t^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{t^{3/2}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) \left[\frac{\varphi(\xi) - \varphi(-\xi)}{4\sqrt{\pi}} \cdot \xi\right] d\xi = \\ &= \frac{1}{t^{3/2}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{z}{t}\right) \psi_2(z) dz = \frac{1}{t^{2/3}} \Psi_2\left(\frac{1}{t}\right), \quad (1) \end{aligned}$$

où l'on a posé $z = \frac{\xi^2}{4}$;

$$\psi_1(z) = \frac{\varphi(2\sqrt{z}) + \varphi(-2\sqrt{z})}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{\sqrt{z}},$$

$$\psi_2(z) = \frac{\varphi(2\sqrt{z}) - \varphi(-2\sqrt{z})}{4\sqrt{\pi}} \cdot 2$$

(en particulier $\psi_2(0) = 0$),

$$\Psi_1(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha z) \psi_1(z) dz,$$

$$\Psi_2(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha z) \psi_2(z) dz,$$

de sorte que $\Psi_1(\alpha)$ et $\Psi_2(\alpha)$ sont des transformées de Laplace de fonctions continues. Ainsi on est arrivé à la conclusion que si la solution de l'équation de la chaleur peut être représentée par l'intégrale de Poisson $P(x, t)$ (pour $0 < t < t_0$) on a nécessairement:

$$u\left(0, \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}} = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha z) \psi_1(z) dz,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u\left(0, \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \alpha^{-\frac{3}{2}} = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha z) \psi_2(z) dz \quad (\psi_2(0) = 0),$$

c'est-à-dire, qu'elles sont les transformées de Laplace⁴⁾ des fonctions $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ continues ($\psi_2(0) = 0$), les intégrales étant convergentes pour $\alpha > \frac{1}{t_0}$.

⁴⁾Pour tout ce qui concerne la transformation de Laplace dans le domaine réel, voir l'article de *Widder D. V.* The inversion of the Laplace intégral and the related moment problem // Transactions of the American Mathematical Society. — 1934. — V. 36. — P. 107-200, où se trouvent des conditions sous lesquelles une fonction de la variable réelle peut être représentée à l'aide de l'intégrale de Laplace.

Nous allons montrer que *ces conditions sont aussi suffisantes*. Admettons que l'on à:

$$u\left(0, \frac{1}{\alpha}\right)\alpha^{-\frac{1}{2}} = \int_0^{\infty} \exp(-az)\psi_1(z)dz,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u\left(0, \frac{1}{\alpha}\right)\alpha^{-\frac{3}{2}} = \int_0^{\infty} \exp(-az)\psi_2(z)dz,$$

les intégrales des seconds membres étant convergentes pour $\alpha > \alpha_0$ [$\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ continues, $\psi_2(0) = 0$]. Dans ces conditions en remplaçant α par $\frac{1}{t}$ et en effectuant de suite la transformation inverse à la transformation (1), on obtient:

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) \varphi(\xi) d\xi, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{2t^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) \varphi(\xi) d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

où l'on à posé

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= \sqrt{\pi}\psi_1\left(\frac{\xi^2}{4}\right) + \frac{2\pi}{\xi}\psi_2\left(\frac{\xi^2}{4}\right), \\ \varphi(-\xi) &= \sqrt{\pi}\psi_1\left(\frac{\xi^2}{4}\right) - \frac{2\pi}{\xi}\psi_2\left(\frac{\xi^2}{4}\right), \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } \xi \geq 0,$$

les intégrales étant convergentes pour $t < t_0 = \frac{1}{\alpha_0}$.

La fonction $\varphi(\xi)$ ainsi définie est évidemment continue. Considérons l'intégrale

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Selon le § 3 et les formules (2) cette intégrale est convergente pour $0 < t < t_0$ quelle que soit la valeur de x . Cette fonction vérifie d'ailleurs l'équation de la chaleur, et en outre on à:

$$\begin{aligned} P(0, t) &= u(0, t), \\ \frac{\partial}{\partial x} P(0, t) &= \frac{\partial}{\partial x} u(0, t), \end{aligned}$$

d'où en s'appuyant sur le théorème d'unicité du § 2, on conclut que l'on $u(x, t) \equiv P(x, t)$.

§ 5. Nous avons déjà cité le théorème de Levi, qui affirme que si pour x suffisamment grand ($x > x_0$) l'on a :

$$|u(x, t)| < x^n,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right| < x^n,$$

n étant une constante, alors la condition $u(x, 0) = 0$ entraîne l'égalité

$$u(x, t) = 0 \quad \text{pour } t > 0.$$

Dans le même ordre d'idées nous allons démontrer le théorème suivant.

T h é o r è m e. *Soit*

$$f(x) = \max_{0 \leq t \leq t_0} |u(x, t)|;$$

si $u(x, t)$ est une solution de l'équation de la chaleur et s'il existe une constante C telle que

$$f(x) \cdot \exp(-Cx^2) \rightarrow 0$$

pour $x \rightarrow \infty$ tant que pour $x \rightarrow -\infty$, alors l'égalité $u(x, 0) = 0$ entraîne $u(x, t) \equiv 0$ ($0 \leq t \leq t_0$)⁵⁾.

Si $\varphi(x)$ n'est pas identiquement nulle, il existe une seule solution de l'équation de la chaleur qui vérifie la condition du théorème précédent et qui vérifie la condition initiale $u(x, 0) = \varphi(x)$; en outre cette solution est donnée par l'intégrale

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Passons à la démonstration du théorème. Admettons $u(x, 0) = 0$ et considérons la fonction

$$U(x, t) = f(-R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x+R)^2}{4t}\right] + f(R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-R)^2}{4t}\right];$$

cette fonction vérifie l'équation de la chaleur.

⁵⁾Ce théorème est aussi démontré par une méthode tout à fait différente par *M. Piscounoff*. Il peut être aussi démontré à l'aide de la fonction de Green.

Considérons les valeurs de $U(x, t)$ dans la bande $-R \leq x \leq R, 0 \leq t$; sur le côté inférieur on a $U(x, 0) = 0$, sur les côtés $x = \pm R$ on a :

$$U(-R, t) \geq f(-R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \geq u(-R, t) \geq -f(-R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \geq -U(-R, t),$$

$$U(R, t) \geq f(R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \geq u(R, t) \geq -f(R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \geq -U(R, t)$$

(pour $0 \leq t \leq t_0$).

La fonction $U(x, t)$ est discontinue aux points $(-R, 0)$ et $(R, 0)$, mais il est évident que les valeurs limites inférieures $\underline{U}(-R, 0)$ et $\underline{U}(R, 0)$ sont nulles. Ainsi nous avons besoin du suivant

T h é o r è m e. *Si les fonctions $U(x, t)$ et $u(x, t)$ vérifient l'équation de la chaleur à l'intérieur du rectangle $|x| \leq R, 0 \leq t \leq t_0$, et si sur les trois côtés $t = 0, x = \pm R$ on a $\underline{U}(x, t) \geq u(x, t)$, alors à l'intérieur du rectangle et sur son côté supérieur on a $\underline{U}(x, t) \geq u(x, t)$.*

En effet, sur les trois côtés mentionnés, nous avons:

$$\underline{v}(x, t) = \underline{U}(x, t) - u(x, t) \geq \underline{U}(x, t) - \overline{u}(x, t) \geq 0.$$

Admettons que l'on a $v(x_1, t_1) = -l < 0$ ($|x_1| < R, t_1 > 0$); considérons la fonction $V(x, t) = v(x, t) + k(t - t_1)$ k étant une constante positive, si petite que le minimum de $V(x, t)$ est atteint à l'intérieur du rectangle ($k < \frac{l}{t_1}$). Soit (x_2, t_2) le point dans lequel est atteint ce minimum, alors nous avons:

$$\frac{\partial^2 V(x_2, t_2)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x_2, t_2)}{\partial x^2} \geq 0, \quad \frac{\partial V(x_2, t_2)}{\partial t} = \frac{\partial v(x_2, t_2)}{\partial t} + k \leq 0,$$

l'expression $\frac{\partial^2 V(x_2, t_2)}{\partial x^2} - \frac{\partial V(x_2, t_2)}{\partial t}$ est donc positive. Mais d'autre part cette expression est égale à $\frac{\partial^2 v(x_2, t_2)}{\partial x^2} - \frac{\partial v(x_2, t_2)}{\partial t} - k = -k$, cette contradiction démontre le théorème. ⁶⁾

Une solution de l'équation de la chaleur ne pouvant présenter ni maximum ni minimum à l'intérieur de la bande, des inégalités précédentes on tire:

$$U(x, t) - u(x, t) \geq 0 \geq u(x, t) - U(x, t)$$

⁶⁾ Voir *I. Petrowsky. Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitung // Compositio Mathematica. — 1935. — V. 1. — S. 387.*

pour $-R \leq x \leq R$, $t_0 = 0$, $0 \leq t \leq t_0$, $x = \pm R$; donc,

$$\left\{ f(-R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x+R)^2}{4t} \right] + f(R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x-R)^2}{4t} \right] \right\} \geq \\ \geq u(x, t) \geq \\ \geq - \left\{ [f(-R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x+R)^2}{4t} \right] + f(R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x-R)^2}{4t} \right] \right\}$$

dans tout le rectangle $-R \leq x \leq R$, $0 \leq t \leq t_0$.

Choisissons t si petit que l'on ait $\frac{1}{4t} > C$ et faisons tendre R vers l'infini; à la limite les deux membres extrêmes de l'inégalité s'annulent, donc

$$u(x, t) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4C}.$$

En répétant le même raisonnement pour la bande $\frac{1}{4C} \leq t \leq 2 \cdot \frac{1}{4C}$ et ainsi de suite on arrive enfin à la conclusion que $u(x, t) \equiv 0$ dans toute la bande $0 \leq t \leq t_0$. Evidemment on a la conséquence suivante: deux solutions $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ remplissant la condition du théorème et telles que

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \varphi(x)$$

coïncident pour toutes les valeurs de t :

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

Montrons maintenant que si l'on a $\varphi(x) \neq 0$, la solution $u(x, t)$ qui est égale à $\varphi(x)$ pour $t = 0$ et remplit la condition précédente est représentée par l'intégrale de Poisson:

$$u(x, t) = P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t} \right] \varphi(\xi) d\xi.$$

En effet, si la fonction $u(x, t)$ [$u(x, 0) = \varphi(x)$] remplit la condition

$$f(x) \cdot \exp(-Cx^2) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{x \rightarrow +\infty} 0,$$

pour tout ε positif on peut trouver un nombre X suffisamment grand pour que l'on ait:

$$|\varphi(x)| < \varepsilon \exp(Cx^2) \quad \text{pour } |x| > X.$$

Alors en posant

$$A(\varepsilon) = \max_{-X \leq x \leq X} |\varphi(x)|$$

on a pour toute valeur de x :

$$|u(x, 0)| = |\varphi(x)| < A(\varepsilon) + \varepsilon \exp(Cx^2).$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] \varphi(\xi) d\xi;$$

nous avons:

$$\begin{aligned} |P(x, t)| &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] [A(\varepsilon) + \varepsilon \exp(C\xi^2)] d\xi = \\ &= \frac{A(\varepsilon)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha^2) d\alpha + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\xi^2 - 2x\xi + x^2) - 4tC\xi^2}{4t}\right] \frac{d\xi}{\sqrt{t}} = \\ &= A(\varepsilon) + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\left[\xi\sqrt{1-4tC} - \frac{x}{\sqrt{1-4tC}}\right]^2}{4t}\right\} \exp\left(\frac{Cx^2}{1-4tC}\right) d\xi = \\ &= A(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-4tC}} \exp\left(\frac{Cx^2}{1-4tC}\right) \quad \left(\text{pour } t < \frac{1}{4C}\right). \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$C_1 = \frac{C}{1-4Ct_1}$$

et

$$F(x) = \max_{0 \leq t \leq t_1} P(x, t) \quad \left(t_1 < \frac{1}{4C} \right),$$

on :

$$F(x) \cdot \exp(-C_1 x^2) \leq A(\varepsilon) \cdot \exp(-C_1 x^2) + \frac{\varepsilon}{1 - 4t_1 C},$$

autrement dit

$$F(x) \cdot \exp(-C_1 x^2) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{x \rightarrow +\infty} 0;$$

puisque l'on a $u(x, 0) = P(x, 0)$, on peut affirmer que

$$u(x, t) \equiv P(x, t) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \min\left(t_0, \frac{1}{4C}\right).$$

Pour terminer, signalons que *parmi les solutions construites dans le § 1, qui s'annulent pour $t = 0$: $u(x, 0) = 0$, mais qui ne sont pas identiquement nulles: $u(x, t) \neq 0$, on peut trouver pour tout ε une solution pour laquelle on a :*

$$f(x) = \max |u(x, t)| < \exp(x^{2+\varepsilon}).$$

Soit en effet $F(t)$ une fonction qui s'annule pour $t = 0$, ainsi que toutes ses dérivées; soit de plus

$$|F^{(n)}(t)| < [kn]!$$

(comme d'habitude $[kn]$ désigne le plus grand entier ne surpassant pas kn); nous allons désigner par $[kn]^*$ le plus petit entier supérieur ou égal à kn (de sorte que l'on a $[kn] = [kn]^*$ ou bien $[kn]^* = [kn] + 1$).

Considérons la fonction

$$u(x, t) = F(t) + \frac{x^2}{2!} F'(t) + \frac{x^4}{4!} F''(t) + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(n)}(t) + \dots;$$

nous avons:

$$\begin{aligned} f(x) &= \max_{0 \leq t < \infty} |u(x, t)| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} |F^{(n)}(t)| \leq \sum \frac{x^{2n} [kn]!}{(2n)!} \leq \sum \frac{x^{2n}}{[(2-k)n]^*}. \end{aligned}$$

Si l'on a

$$[(2-k) \cdot n]^* = m, \quad \text{alors } (2-k) \cdot n \leq m, \quad \text{donc } n \leq \frac{m}{2-k}.$$

Il s'ensuit que pour $x \geq 1$ on a :

$$\sum \frac{x^{2n}}{[(2-k) \cdot n]^*!} \leq \sum' \frac{x^{\frac{2m}{2-k}}}{m!}.$$

l'indice désignant que dans la seconde somme à chaque m correspondent autant de membres qu'il y a d'entiers n pour lesquels $[(2-k) \cdot n]^* = m$. Évidemment, si l'on a :

$$[(2-k) \cdot n]^* = [(2-k) \cdot (n+1)]^* = \dots = [(2-k) \cdot (n+l+1)]^* = m,$$

$$[(2-k) \cdot (n-1)] < m < [(2-k) \cdot (n+l+1)]^*,$$

le nombre l est égal, soit à $\left[\frac{1}{2-k} \right]$, soit à $\left[\frac{1}{2-k} \right]^*$. Donc

$$\sum' \frac{x^{\frac{2}{2-k}m}}{m!} \leq \left[\frac{1}{2-k} \right]^* \sum \frac{x^{\frac{2}{2-k}m}}{m!} = \left[\frac{1}{2-k} \right]^* \exp \left(x^{\frac{2}{2-k}} \right).$$

Le nombre ε étant fixé d'avance, choisissons k tel que l'on ait :

$$0 < \frac{2}{2-k} < 2 + \varepsilon$$

ou autrement dit, tel que

$$1 < k < 2 - \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} < 2.$$

Avec ce choix de k nous avons pour x suffisamment grand :

$$f(x) = \max_{0 \leq t < \infty} |u(x, t)| < \exp \left(x^{2+\varepsilon} \right).$$

c.q.f.d.

§ 6. Passons à l'étude des questions d'unicité dans le cas d'une demidroite.

On peut poser les problèmes suivants :

Trouver une fonction $u(x, t)$ continue pour $x \geq 0$, $t > 0$ satisfaisant à l'équation de la chaleur pour $x > 0$, $t > 0$ et telle que

a) $u(x, 0) = \varphi(x);$

b) $u(0, t) = \mu_1(t)$

(premier problème aux limites).

La condition b_1) peut être remplacée par

$$b_2) \quad \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = \mu_2(t)$$

(second problème aux limites) ou par

$$b_3) \quad \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = h(u(0, t) - \mu_3(t)) \quad (h > 0)$$

(troisième problème aux limites).

L'étude du second et du troisième problème est entièrement analogue au premier, de sorte que dans ce qui suit, nous les laisserons de côté.

On peut encore poser le "problème sans conditions initiales"

Problème de Fourier. *Trouver une fonction continue dans le domaine $x \geq 0$, $t > -\infty$, satisfaisant à l'équation de la chaleur pour $x > 0$ et pour toute valeur de t et se réduisant à $\mu_1(t)$ pour $x = 0$.*

Enfin dans le § 8 nous considérerons un problème nouveau.

Retournons au premier problème aux limites. Il est facile de voir que la solution de ce problème n'est pas déterminée par ces conditions d'une manière univoque; en effet, en choisissant la fonction $F_1(t)$ comme au § 1 et en posant

$$u(x, t) = xF_1(t) + \frac{x^3}{3!} F_1'(t) + \frac{x^5}{5!} F_1''(x) + \dots$$

on obtient une solution du premier problème aux limites satisfaisant aux conditions

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 0, \quad \mu(0, t) = \mu(t) = 0$$

qui n'est pas cependant identiquement nulle.

Pour obtenir une solution unique il faut ajouter des conditions supplémentaires analogues à celles du § 5:

I. Si pour

$$f(x) = \max_{0 \leq t \leq t_0} u(x, t)$$

on à:

$$f(x) \cdot \exp(-Cx^2) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

des conditions $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 0$ il s'ensuit que

$$u(x, t) \equiv 0 \quad (t \leq t_0).$$

II. La solution $u(x, t)$ vérifiant la condition

$$f(x) \cdot \exp(-Cx^2) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

s'exprime à l'aide de ses valeurs pour $t = 0, x > 0$ et pour $x = 0, t > 0$ comme il suit:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \mu(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right] \right\} \varphi(\xi) d\xi,$$

les intégrales étant convergentes,

§ 7. Envisageons maintenant le problème de Fourier à savoir:

Trouver une fonction continue dans le domaine $x \geq 0, t > -\infty$, satisfaisant à l'équation de la chaleur pour $x > 0$ pour toute valeur de t et se réduisant à $\mu_1(t)$ pour $x = 0$.

Les conditions de ce problème ainsi que celles du précédent ne déterminent pas de solution unique.

En effet, si la série

$$u(x, t) = xF_1(t) + \frac{x^3}{3!} F_1'(t) + \frac{x^5}{5!} F_1''(t) + \dots$$

est convergente, la fonction $u(x, t)$ est une solution du problème de Fourier vérifiant la condition $u(0, t) = 0$ ($t > -\infty$). En prenant pour $F_1(t)$ des polynômes de degrés 0, 1, 2, ..., on en obtient des polynômes:

$$u_0(x, t) = kx, \\ u_1(x, t) = (k_1 t + k)x + \frac{x^3}{3!} k_1, \\ \dots \dots \dots$$

qui vérifient l'équation de la chaleur et la condition

$$u_n(0, t) = 0 \quad (\text{pour } t > -\infty).$$

Nous allons maintenant démontrer que si $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ sont continues, pour $x \geq 0$, $t > -\infty$, et satisfont à l'équation de la chaleur pour $x > 0$, $t > -\infty$, et si leurs dérivées d'ordre n par rapport à x sont uniformément bornées (c'est-à-dire $|\frac{\partial^n u_1}{\partial x^n}| < M$, $|\frac{\partial^n u_2}{\partial x^n}| < M$), alors de la condition

$$u_1(0, t) = u_2(0, t)$$

il s'ensuit que

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

est un polynôme dont le degré ne dépasse pas n (naturellement il est, lui aussi, une solution de l'équation de la chaleur).

Passons à la démonstration. Considérons d'abord le cas de n égal à 0.

Nous allons montrer que des conditions

$$|u_1(x, t)| < M, \quad |u_2(x, t)| < M, \quad u_1(0, t) = u_2(0, t)$$

il s'ensuit que

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

En effet, la fonction $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ est uniformément bornée: $|u(x, t)| < 2M$, et vérifie en outre la condition $u(0, t) = 0$. En vertu des conclusions du § 6 on a pour tout couple $x > 0$, $t > t_0$:

$$u(x, t) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-t_0)}\right] \right\} u(\xi, t_0) d\xi.$$

Laissons dans cette formule x et t fixes et faisons t_0 tendre vers $-\infty$; nous aurons:

$$|u(x, t)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-t_0)}\right] \right\} \frac{d\xi}{2\sqrt{t-t_0}} = \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\frac{x}{\sqrt{t-t_0}}}^{\infty} \exp(-\alpha^2) d\alpha - \int_{\frac{x}{2\sqrt{t-t_0}}}^{\infty} \exp(-\alpha^2) d\alpha \right\} = \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{4M}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t-t_0}}} \exp(-\alpha^2) d\alpha = 0, \end{aligned}$$

Pour $n = 1$ nous allons montrer que des conditions

$$\left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right| < M, \quad \left| \frac{\partial u_2}{\partial x} \right| < M, \quad u_1(0, t) = u_2(0, t)$$

il s'ensuit:

$$u_1(x, t) = u_2(x, t) + kx,$$

k étant une constante. Comme dans le cas précédent, nous avons:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] \right\} u(\xi, t_0) d\xi. \end{aligned}$$

Considérons

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] \right\} \right] u(\xi, t_0) d\xi. \end{aligned}$$

En intégrant par parties on obtient:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| &= \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{x-\xi}{2(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{x+\xi}{2(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] \right\} u(\xi, t_0) \right|_0^{\infty} - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{x-\xi}{2(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] + \frac{x+\xi}{2(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] \right\} \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, t_0) d\xi \left| \leq \frac{2M}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \left[2 \int_0^{\infty} \exp(-\alpha) d\alpha \right] = \right. \\ &\quad \left. = \frac{2M}{\sqrt{\pi(t-t_0)}} \xrightarrow{t_0 \rightarrow -\infty} 0. \right. \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0,$$

d'où il s'ensuit

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) = kx.$$

On réduit le cas $n > 1$ aux cas déjà considérés (pour n pair — au cas $n = 0$, pour n impair — au cas $n = 1$) en dérivant $u_1(x, t) - u_2(x, t)$ par rapport à t .

Ainsi pour $n = 2$ nous considérons la fonction

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} [u_1(x, t) - u_2(x, t)];$$

pour cette fonction qui vérifie l'équation de la chaleur pour $x > 0$ et s'annule pour $x = 0$: $v(0, t) = 0$, on a l'inégalité

$$|v(x, t)| < 2M.$$

Si elle est continue (c'est-à-dire qu'elle n'a pas de discontinuité pour $x = 0$), nous sommes dans les conditions du cas $n = 0$, et nous pouvons écrire

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} (u_1(x, t) - u_2(x, t)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_1(x, t) - u_2(x, t)) = 0,$$

où

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) = kx.$$

Il nous reste donc de nous assurer que les dérivées de la fonction $v(x, t)$ par rapport à t sont continues pour $x = 0$.

C'est une conséquence du l e m m e suivant:

L e m m e. Toutes les dérivées d'une fonction $u(x, t)$ continue pour $x \geq 0$, vérifiant l'équation de la chaleur pour $x > 0$ et qui s'annule pour $x = 0$, sont continues pour $x = 0$.

En effet, considérons la fonction $U(x, t)$ définie comme il suit:

$$U(x, t) = u(x, t),$$

$$U(-x, t) = -u(x, t) \quad (x \geq 0).$$

Nous allons montrer que cette fonction vérifie l'équation de la chaleur, ce qui aura pour conséquence que les dérivées $\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^n U}{\partial x^n}$ sont continues pour $x = 0$.

Pour prouver que $U(x, t)$ vérifie l'équation de la chaleur, considérons la bande $-R \leq x \leq R, t \geq t_0$ et envisageons la solution $V(x, t)$ qui coïncide avec $U(x, t)$ sur la frontière de cette bande. Comme les conditions aux limites vérifient l'égalité

$$V(x, t) = -V(-x, t),$$

l'égalité $V(x, t) = -V(-x, t)$ a lieu en vertu du théorème d'unicité pour toutes les valeurs $|x| \leq R, t \geq t_0$. Donc,

$$V(0, t) = 0 = u(0, t).$$

Par conséquent, on a :

$$V(x, t) = u(x, t)$$

sur la frontière de la bande $0 \leq x \leq R, t \geq t_0$; ces deux fonctions sont des solutions de l'équation de la chaleur, d'où il s'ensuit que

$$V(x, t) \equiv u(x, t) \quad (0 \leq x \leq R, \quad t \geq t_0)$$

et comme on a :

$$V(x, t) = -V(-x, t),$$

on obtient :

$$V(x, t) = U(x, t),$$

c. q. f. d.

Pour $n = 3$ on a

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(u_1(x, t) - u_2(x, t)) = kx,$$

donc

$$u_1(x, t) = u_2(x, t) + kxt + f(x);$$

le second membre étant une solution de l'équation de la chaleur, on en conclut :

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) = x(kt + k_1) + \frac{x^3}{3!} k.$$

Pour les autres valeurs de n la démonstration est entièrement analogue.

§ 8. Nous allons considérer dans ce paragraphe le problème suivant ⁷⁾:

Trouver une fonction $u(x, t)$ satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

définie pour $x > 0$, $-\infty < t \leq t_0$, connaissant ses valeurs $u(x, t_0) = \varphi(x)$ pour $t > t_0$.

Comme dans les problèmes précédents les conditions de ce problème ne déterminent pas une solution unique. En effet, la fonction

$$u(x, t) = xF_1(t) + \frac{x^3}{3!} F_1'(t) + \frac{x^5}{5!} F_1''(t) + \dots$$

remplit les conditions du problème considéré pour $\varphi(x) = 0$, pourvu que la fonction $F_1(t)$ soit choisie comme au § 1 (dans le cas actuel elle est définie pour $-\infty < t \leq t_0$).

Nous allons prouver qu'il ne peut exister qu'une seule solution qui vérifie les conditions du problème et qui possède de plus une dérivée $\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n}$ uniformément bornée pour $x > 0$, $-\infty < t \leq t_0$:

$$\left| \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n} \right| < M.$$

Considérons d'abord le cas $n = 0$. Admettons qu'il existe deux solutions définies pour $x > 0$, $-\infty < t \leq t_0$ qui sont uniformément bornées dans ce domaine:

$$|u_1(x, t)| < M, \quad |u_2(x, t)| < M,$$

et qui coïncident pour $t = t_0$:

$$u_1(x, t_0) = u_2(x, t_0).$$

Leur différence

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

s'annule pour $t = t_0$ et l'on à:

$$|u(x, t)| < 2M.$$

⁷⁾Ce problème a une signification géophysique évidente.

Supposons que la fonction

$$u(0, t) = \mu(t)$$

est continue⁸⁾. On sait que

$$v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{x}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \mu(\tau) d\tau$$

est une solution de l'équation (1) qui est égale à $\mu(t)$ pour $x = 0$:

$$v(0, t) = \mu(t).$$

On a $|\mu(t)| < 2M$, donc

$$\begin{aligned} |v(x, t)| &\leq 2M \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \frac{x d\tau}{4(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= 2M \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha^2) d\alpha = 2M. \end{aligned}$$

En vertu du théorème démontré dans le § 7 on peut affirmer que l'on a :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{x}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \mu(\tau) d\tau.$$

Ainsi nous obtenons (en supposant $t_0 = 0$):

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} - \int_{-\infty}^0 \frac{x}{(-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(-\tau)}\right] \mu(\tau) d\tau = 0.$$

⁸⁾ Si $u(0, t)$ n'existe pas, ou si elle n'est pas continue, on peut prendre pour $\mu(t)$ la fonction continue $u(x_0, t)$ ($x_0 > 0$), et on démontre par les mêmes arguments que dans le texte, qu'on a $u(x, t) = 0$ pour $x > x_0$. Le nombre x_0 étant aussi petit que l'on veut, il s'ensuit que $u(x, t) = 0$ pour tout $x > 0$.

En posant $\frac{x^2}{4} = z$ et $\frac{1}{(-\tau)} = \alpha$, nous avons:

$$0 = \int_0^{\infty} \exp(-2\alpha) \bar{\mu}(\alpha) d\alpha,$$

$$\bar{\mu}(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\mu\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha}}.$$

En vertu d'un théorème de Lerch⁹⁾ on peut affirmer que $\bar{\mu}(\alpha) = 0$, donc $\mu(\tau) = 0$, d'où on conclut que $v(x, t) \equiv 0$, ou

$$u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

Si l'on suppose que les fonctions $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ ne sont pas bornées, mais que leurs dérivées d'ordre n sont bornées, en s'appuyant sur les conclusions précédentes on voit que

$$\bar{v}(x, t) = \frac{\partial^n v(x, t)}{\partial x^n} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} (u_1(x, t) - u_2(x, t)) = 0,$$

parce que

$$\bar{v}(x, 0) = \varphi^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(x) = 0.$$

Par conséquent, $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$

est un polynôme de degré au plus égal à n , qui vérifie l'équation de la chaleur. Or, il est facile de voir que de tels polynômes s'annulant pour $t = 0$ sont identiquement nuls. Donc,

$$u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

Поступило в редакцию 13 II 1935 г.

⁹⁾ *Lerch M.* Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel // *Acta Mathematica*. — V. 27. — P. 339–352; voir aussi *Picard É.* Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles. — Gauthier-Villars, 1927.

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. Тихонов (Москва)

(Резюме)

В предлагаемой статье мы занимаемся вопросами единственности решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (I)$$

для неограниченных областей изменения переменного x .

В § 1 мы показываем, что решение уравнения (I), $u(x, t)$, в области $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$, не вполне определяется своими значениями при $t = 0$:

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Для этого мы строим пример решения уравнения (I), $u(x, t)$, равного нулю при $t = 0$:

$$u(x, 0) = 0,$$

которое, однако, не равно нулю тождественно.

Обыкновенно решение уравнения (I), $u(x, t)$, определяется своими начальными значениями $\varphi(x)$ при помощи интеграла Poisson'a

$$u(x, t) = P(x, t),$$

где

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] \varphi(\xi) d\xi.$$

В § 2, 3, 4 мы занимаемся вопросами о представимости данного решения уравнения (I), $u(x, t)$, в виде $P(x, t)$.

Мы доказываем следующие теоремы:

Теорема. Если $P(x, t)$ сходится для x_0, t_0 , то он сходится для любых значений x, t , если $0 < t < t_0$, и представляет решение уравнения теплопроводности.

Теорема. Если для двух решений $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ уравнения (I)

$$\begin{aligned} u_1(0, t) &= u_2(0, t), \\ \frac{\partial}{\partial x} u_1(0, t) &= \frac{\partial}{\partial x} u_2(0, t), \end{aligned}$$

то

$$u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

Далее, мы устанавливаем необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять $u(0, t)$, $\frac{\partial}{\partial x} u(0, t)$, для того, чтобы $u(x, t)$ было представимо в виде интеграла Poisson'a.

Для возможности представить данное решение в виде интеграла Poisson'a можно указать и другое условие (достаточное). Обозначим через

$$f(x) = \max_{0 \leq t \leq t_0} u(x, t).$$

Теорема. Если существуют такие C и t_0 , что

$$f(x) \cdot \exp(-Cx^2) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{x \rightarrow +\infty} 0;$$

то существует только одно решение уравнения (I), принимающее заданное значение $\varphi(x)$ при $t = 0$: $u(x, 0) = \varphi(x)$.

Это решение дается в виде интеграла Poisson'a.

В дополнение к этим теоремам показывается, что для любого ϵ существуют такие решения уравнения (I), которые не равны тождественно нулю, но для которых $u(x, 0) = 0$ и

$$f(x) \cdot \exp(-x^{2+\epsilon}) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Следующие параграфы посвящены вопросам единственности для решений уравнения (I) для полупрямой $x \geq 0$.

В § 6 мы занимаемся первой краевой задачей: *найти решение уравнения теплопроводности по заданным*

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u(0, t) = \mu(t).$$

Для этой задачи получаются результаты, аналогичные результатам, полученным для бесконечной прямой $-\infty < x < +\infty$.

Следующий § 7 посвящен задаче Фурье: *определить решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$ в области $x \geq 0, t > -\infty$ по заданным*

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (t > -\infty)$$

(задача «без начальных условий»).

Эта задача имеет не единственное решение, но если $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ удовлетворяют условиям задачи и если

$$\left| \frac{\partial^n u_1}{\partial x^n} \right| < M, \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial^n u_2}{\partial x^n} \right| < M,$$

то

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

является полиномом степени, не большей n , удовлетворяющим уравнению (I).

Последний § 8 посвящен обратной задаче:

Определить решение уравнения теплопроводности в области $x > 0, -\infty < t \leq t_0$ по заданным значениям $u(x, t_0) = \varphi(x)$.

Мы показываем, что при дополнительном условии $\left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right| < M$ эта задача не может иметь более одного решения.

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. Тихонов (Москва)

Проблема единственности решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (I)$$

в неограниченной области изучена очень мало¹⁾. В физике изучение явлений теплопроводности на ограниченных отрезках часто замещается исследованием решений на всей числовой прямой. Мы покажем (в § 1), что в последнем случае существует целый набор решений, удовлетворяющих заданным начальным условиям. Далее (в § 2 и § 5) мы установим некоторые условия, которые определяют единственное решение уравнения теплопроводности. Параграфы § 3 и § 4 посвящены изучению интеграла Пуассона и условиям, при которых решение уравнения теплопроводности может быть представлено этим интегралом.

В последующих параграфах изучаются вопросы единственности для уравнения теплопроводности для случая полупрямой. В § 6 изучается первая краевая задача для случая полупрямой, т.е. задача определения для

Перевод с французского (см. настоящий том) статьи *Tychonoff A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur* // Математический сборник. — 1935. — Т. 42, № 2. — С. 199–215. Издаётся при редакционном участии Московского, Ленинградского и Казанского математических обществ. Основан в 1866 г. — М.—Л.: Управление университетов и научных учреждений Н.К.П., Государственное объединенное научно-техническое издательство.

¹⁾См. заметку *Levi Э. Э.* (*Annali di Matematica*, 1908), где доказано, что среди решений уравнения теплопроводности, для которых выполнены условия

$$|u(x, t)| < |x|^n, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| < |x|^n \quad (|x| > x_0, \quad n - \text{постоянное число}),$$

существует только одно, удовлетворяющее заданному начальному условию $u(x, 0) = \varphi(x)$ (ср. с § 5 настоящей работы).

$t > t_0$ решения $u(x, t)$ уравнения (I), удовлетворяющего условиям:

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < \infty,$$

$$u(t, 0) = \mu(t), \quad t_0 \leq t.$$

Выводы, к которым приходим в данном случае, аналогичны тем, которые мы получим в §§ 1-5 для случая бесконечной прямой.

В § 7 рассматривается задача Фурье (Fourier) «без начальных условий», в которой необходимо найти решение, удовлетворяющее только граничному условию

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (-\infty < t).$$

Это условие не определяет единственного решения, но если предположить также, что ограничены производные порядка n по x :

$$\left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right| < M,$$

то оказывается, что разность двух решений, обладающих последним свойством, является полиномом степени не больше n (удовлетворяющим уравнению теплопроводности; см. более подробно § 7).

В § 8 исследуется совершенно новая задача теплопроводности. Мы покажем, что решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности, определённое для $x \geq 0$, $-\infty < t \leq t_0$, полностью определяется своими значениями при $t = t_0$, если, как и ранее, предположить, что производная $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ ограничена. Эта задача может быть названа «обратной задачей теплопроводности»; тогда как предыдущие задачи имели целью определить «температуру» в «будущем» (при $t \geq t_0$), «обратная задача» заключается в том, чтобы найти «исторический ход» температуры, зная её значения для настоящего времени (при $t = t_0$). Следует заметить, что в этом случае нет необходимости знать граничные условия: они определены другими условиями задачи.

§ 1. В настоящем параграфе строится решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{I}$$

в неограниченной области ($-\infty < x < +\infty$), которое, обращаясь в нуль при $t = 0$, $u(x, 0) \equiv 0$, тем не менее не равно тождественно нулю.

Рассмотрим функцию

$$u(x, t) = F(t) + x \cdot F_1(t) + \frac{x^2}{2!} \cdot F'(t) + \frac{x^3}{3!} \cdot F_1'(t) + \dots \\ \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot F^{(n)}(t) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot F_1^{(n)}(t) + \dots, \quad (1)$$

которая представляет собой решение уравнения теплопроводности для любых функций $F(t)$ и $F_1(t)$ при условиях, что ряд (1) сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно по t . Если, кроме того, функции $F(t)$, $F_1(t)$ обращаются в нуль со всеми своими производными при $t = 0$, то $u(x, t)$ и есть искомая функция.

Покажем, что существуют функции $F(t)$, $F_1(t)$, обладающие этими свойствами. С этой целью напомним, что любой возрастающей последовательности положительных чисел A_n , такой что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}} < +\infty,$$

соответствуют, как известно²⁾, функции $f(t)$, обладающие производными всех порядков и такие, что

- 1) $f^{(n)}(0) = 0$,
- 2) $|f^{(n)}(t)| < A_n$.

Положим

$$A_n = (kn)! \quad 1 < k < 2.$$

Ряд

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}} \leq \sum \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{kn}{e}\right)^{kn}}} = \sum \frac{1}{\left(\frac{kn}{e}\right)^k}$$

является сходящимся, поскольку $k > 1$. Теперь выберем $F(t)$, $F_1(t)$ среди функций, соответствующих последовательности A_n . Легко видеть, что ряд (1) и ряд, полученный дифференцированием ряда (1) по t , сходятся равномерно, что и требовалось доказать.

²⁾См. Carleman. Les fonctions quasi analytiques. — Gauthier-Villars. — 1926. — P. 63.

§ 2. Докажем, что любое решение уравнения теплопроводности, определённое в области $-\infty < x < +\infty$, $0 < t$, есть целая функция от x для всех $t > 0$, разложение которой по степеням x имеет вид

$$u(x, t) = F(t) + xF_1(t) + \frac{x^2}{2!} F'(t) + \frac{x^3}{3!} F_1'(t) + \dots \quad (1)$$

Действительно, в области $-R \leq x \leq +R$, $t > t_0$ функция $u(x, t)$ выражается через значений $u(-R, t)$, $u(+R, t)$, которые она принимает на прямых $x = \pm R$, и через начальные значения $u(x, t_0)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t} \right] u(\xi, t_0) d\xi + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{x+R}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{(x+R)^2}{4(t-\tau)} \right] \mu_1(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{x-R}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{(x-R)^2}{4(t-\tau)} \right] \mu_2(\tau) d\tau, \quad (2) \end{aligned}$$

при этом функции $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ связаны с функциями $u(-R, t)$, $u(+R, t)$ интегральными уравнениями Вольтерра³⁾.

Из этого представления можно заключить, что $u(x, t)$ есть голоморфная функция от x в области $-R < x < R$. Поскольку R любая, из этого следует, что $u(x, t)$ есть целая функция от x :

$$u(x, t) = F(t) + xF_1(t) + \frac{x^2}{2!} F_2(t) + \frac{x^3}{3!} F_3(t) + \dots \quad (3)$$

где

$$F(t) = u(0, t), \quad F_1(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t).$$

Формула (2) показывает также, что $u(x, t)$ обладает производными всех порядков по t , что доказывает, что разложение (3) совпадает с (1).

³⁾См. *Goursat. Cours d'Analyse*. — Т. III, ch. XXIX.

Из разложения (3) следует, что два решения уравнения теплопроводности, для которых

$$u(0, t) = u_1(0, t),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t),$$

тождественно равны.

Итак, данные задачи Коши обеспечивают единственность.

§ 3. Решение уравнения теплопроводности, которое удовлетворяет заданным начальным условиям $u(x, 0) = \varphi(x)$, обычно определяют с помощью интеграла Пуассона:

$$u(x, t) = P(x, t),$$

где

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Чтобы доказать, что $P(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, находят производные от $P(x, t)$, меняя порядок операций дифференцирования и интегрирования, что априори налагает дополнительное условие на функцию $\varphi(x)$: вторая производная от $P(x, t)$ по x должна быть представлена равномерно сходящимся интегралом.

Покажем, что если для x_0, t_0 интеграл $P(x_0, t_0)$ сходится, то $P(x, t)$ сходится и удовлетворяет уравнению теплопроводности для всех пар значений $x, t, (t < t_0)$.

Действительно, если интеграл

$$P(x_0, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t_0}} \exp\left[-\frac{(x_0-\xi)^2}{4t_0}\right] \varphi(\xi) d\xi$$

сходится, то интеграл

$$M(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{t_0}} \exp\left[-\frac{(x_0-\xi)^2}{4t_0}\right] \varphi(\xi) d\xi$$

является ограниченной функцией от ξ .

По определению $P(x, t)$ есть предел при $T \rightarrow \infty$ интеграла

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-T}^{+T} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x_0 - \xi)^2}{4t} \right] \varphi(\xi) d\xi = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-T}^{+T} \frac{1}{\sqrt{t_0}} \exp \left[-\frac{(x_0 - \xi)^2}{4t_0} \right] \varphi(\xi) d\xi \times \\ & \quad \times \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{\xi^2(t_0 - t) - 2\xi(xt_0 - x_0t) + (x^2t_0 - x_0^2t)}{4tt_0} \right]. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и полагая

$$\omega(\xi, t_0, t, x_0, x) = \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{\xi^2(t_0 - t) - 2\xi(xt_0 - x_0t) + (x^2t_0 - x_0^2t)}{4tt_0} \right],$$

видим, что этот интеграл равен

$$M(\xi) \omega(\xi, t_0, t, x_0, x) \Big|_{-T}^{+T} - \int_{-T}^{+T} M(\xi) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} d\xi.$$

Функция ω и все её производные по ξ , x , t стремятся к 0 при ξ , стремящемся к бесконечности, как

$$\exp(-c \xi^2) \quad (t_0 - t > 0),$$

так что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M(\xi) \omega(\xi, t_0, t, x_0, x) \Big|_{-T}^{+T} = 0.$$

Переходя к пределу для $T \rightarrow \infty$, таким образом получаем

$$P(x, t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \omega(\xi, t_0, t, x_0, x) d\xi,$$

где интеграл в правой части равномерно сходится при $t < t_0$, $x' \leq x \leq x''$, (x' , x'' — произвольные).

Далее получаем:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = - \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x} \omega(\xi, t_0, t, x_0, x) d\xi,$$

так как интеграл в правой части равномерно сходится.

С другой стороны, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(- \int_{-T}^{+T} M(\xi) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial x} d\xi \right) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ -M(\xi) \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{-T}^{+T} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-T}^{+T} \frac{\xi - x}{2t^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\xi - x)^2}{4t} \right] \varphi(\xi) d\xi \right\} \end{aligned}$$

и, так как подинтегральная функция стремится к 0, получаем:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi - x}{2t^{3/2}} \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4t} \right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Аналогичное рассуждение доказывает, что $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial P}{\partial t}$ также могут быть вычислены дифференцированием $P(x, t)$ под знаком интеграла (полученные при этом интегралы равномерно сходятся при $t < t_0$, $x' \leq x \leq x''$); отсюда следует, что $P(x, t)$ есть решение уравнения теплопроводности для всех значений x и t при $0 < t < t_0$.

Следует заметить, что для $t = t_0$ возможны следующие случаи:

- 1°. Интеграл $P(x, t_0)$ расходится при всех $x \neq 0$ и сходится при $x = 0$.
- 2°. Интеграл $P(x, t_0)$ расходится при всех $x > 0$ (или $x \geq 0$) и сходится при всех других x .
- 3°. Интеграл $P(x, t_0)$ расходится при всех $x < 0$ (или $x \leq 0$) и сходится при всех других x .
- 4°. Интеграл $P(x, t_0)$ расходится при всех $x < a$ и $x > b$ (или $x \leq a$ и $x \geq b$) и сходится при всех других x .

Первый случай наблюдается для

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\xi}{1 + \xi^4} \cdot \exp \left[\frac{\xi^2}{4t_0} \right],$$

интеграл

$$P(x, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t_0}} \exp \left[-\frac{-2\xi x + x^2}{4t_0} \right] \frac{\xi}{1 + \xi^4} d\xi$$

расходится при $x \neq 0$ и сходится при $x = 0$.

Второй случай имеет место для

$$\varphi_2(x) = \frac{\xi}{1 + \xi^4} \exp \left[\frac{\xi^2}{4t_0} \right] \quad \text{при } \xi \geq 0 \quad \left(\varphi_2'(\xi) = \exp \left[-\frac{\xi^2}{4t_0} \right], \quad \xi \geq 0 \right),$$

$$\varphi_2(\xi) = 0 \quad \text{при } \xi < 0 \quad \left(\varphi_2'(\xi) = 0, \quad \xi < 0 \right),$$

интеграл

$$P(x, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t_0}} \exp \left[-\frac{-2x\xi + x^2}{4t_0} \right] \frac{\xi}{1 + \xi^4} d\xi$$

$$\left(P'(x, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t_0}} \exp \left[-\frac{-2x\xi + x^2}{4t_0} \right] d\xi \right)$$

сходится при всех x , удовлетворяющих неравенству $x \leq 0$ (или $x < 0$), и расходится при $x > 0$ (или $x \geq 0$).

Третий случай реализуется, если взять $\varphi_3(\xi) = \varphi_2(-\xi)$.

С помощью функций $\varphi_2(\xi)$ и $\varphi_3(\xi)$ можно легко построить пример функции $\varphi_4(\xi)$, для которой интеграл $P(x, t_0)$ сходится только для значений x из интервала (a, b) (исключая или включая концы), что доказывает возможность случая 4°.

§ 4. Перейдем к условиям, при которых данное решение уравнения теплопроводности, определенное в области $-\infty < x < +\infty$, может быть представлено интегралом Пуассона (Poisson). Мы дадим два различных ответа на этот вопрос.

С одной стороны, мы сформулируем условия, накладываемые на функции $u(0, t)$ и $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x}$ (условия Коши (Cauchy)), которые необходимы и достаточны для того, чтобы $u(x, t)$ было представлено интегралом Пуассона.

С другой стороны, мы установим (достаточные) условия, касающиеся порядка возрастания по x решения, представленного интегралом Пуассона, и ограничение, которое обеспечивает единственность решения.

Вернемся к первому условию. Поставим себе следующий вопрос: что можно сказать о $P(0, t)$ и $\frac{\partial P(0, t)}{\partial x}$, если известно, что интеграл $P(x, t)$ сходится при $0 < t < t_0$? Элементарные преобразования дают:

$$\begin{aligned} P(0, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4t}\right] \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) \left[\frac{\varphi(\xi) + \varphi(-\xi)}{2\sqrt{\pi}}\right] d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{z}{t}\right) \psi_1(z) dz = \frac{1}{\sqrt{t}} \Psi_1\left(\frac{1}{t}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(0, t)}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{2t^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{t^{3/2}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) \left[\frac{\varphi(\xi) - \varphi(-\xi)}{4\sqrt{\pi}} \cdot \xi\right] d\xi = \\ &= \frac{1}{t^{3/2}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{z}{t}\right) \psi_2(z) dz = \frac{1}{t^{3/2}} \Psi_2\left(\frac{1}{t}\right), \quad (1) \end{aligned}$$

где положено $z = \frac{\xi^2}{4}$;

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= \frac{\varphi(2\sqrt{z}) + \varphi(-2\sqrt{z})}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{\sqrt{z}}, \\ \psi_2(z) &= \frac{\varphi(2\sqrt{z}) - \varphi(-2\sqrt{z})}{4\sqrt{\pi}} \cdot 2 \end{aligned}$$

(в частности $\psi_2(0) = 0$);

$$\Psi_1(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha z) \psi_1(z) dz,$$

$$\Psi_2(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha z) \psi_2(z) dz,$$

т.е. $\Psi_1(\alpha)$ и $\Psi_2(\alpha)$ — преобразования Лапласа непрерывных функций.

Таким образом приходим к выводу.

Если решение уравнения теплопроводности может быть представлено интегралом Пуассона $P(x, t)$ (при $0 < t < t_0$), то необходимо, чтобы

$$u\left(0, \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}} = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha z) \psi_1(z) dz,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u\left(0, \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \alpha^{-\frac{3}{2}} = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha z) \psi_2(z) dz \quad (\psi_2(0) = 0),$$

т.е. они являются преобразованиями Лапласа⁴⁾ непрерывных функций $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ ($\psi_2(0) = 0$), при этом интегралы сходятся при $\alpha > \frac{1}{t_0}$.

Мы покажем, что эти условия также достаточны.

Допустим, что

$$u\left(0, \frac{1}{\alpha}\right) \alpha^{-\frac{1}{2}} = \int_0^{\infty} \exp(-az) \psi_1(z) dz,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u\left(0, \frac{1}{\alpha}\right) \alpha^{-\frac{3}{2}} = \int_0^{\infty} \exp(-az) \psi_2(z) dz,$$

где интегралы в правых частях сходятся при $\alpha > \alpha_0$ [$\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ непрерывные, $\psi_2(0) = 0$].

⁴⁾ О всех вопросах, связанных с преобразованием Лапласа в вещественной области, см. статью *Widder D.V. The inversion of Laplace integral and the related moment problem // Transactions of the American Mathematical Society. — 1934. — V. 36. — P. 107–200*, где приведены условия, при которых функция вещественной переменной может быть представлена с помощью интеграла Лапласа.

При этих условиях, заменяя α на $\frac{1}{t}$ и осуществляя затем обратное преобразование к (1), получаем:

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) \varphi(\xi) d\xi, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{2t^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) \varphi(\xi) d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где положено

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= \sqrt{\pi} \psi_1\left(\frac{\xi^2}{4}\right) + \frac{2\pi}{\xi} \psi_2\left(\frac{\xi^2}{4}\right), \\ \varphi(-\xi) &= \sqrt{\pi} \psi_1\left(\frac{\xi^2}{4}\right) - \frac{2\pi}{\xi} \psi_2\left(\frac{\xi^2}{4}\right), \end{aligned} \right\} \quad \text{при } \xi \geq 0,$$

а интегралы сходятся при $t < t_0 = \frac{1}{\alpha_0}$.

Определённая таким образом функция $\psi(\xi)$, очевидно, непрерывна. Рассмотрим интеграл

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Согласно § 3 и формулам (2) этот интеграл сходится при $0 < t < t_0$ для произвольного значения x . Эта функция к тому же удовлетворяет уравнению теплопроводности, и кроме того,

$$\begin{aligned} P(0, t) &= u(0, t), \\ \frac{\partial}{\partial x} P(0, t) &= \frac{\partial}{\partial x} u(0, t), \end{aligned}$$

откуда, опираясь на теорему единственности из § 2, приходим к выводу, что $u(x, t) \equiv P(x, t)$.

§ 5. Мы уже сослались на теорему Леви, утверждающую, что если для достаточно большого x ($x > x_0$)

$$|u(x, t)| < x^n, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right| < x^n,$$

где n константа, то условие $u(x, 0) = 0$ влечёт за собой равенство $u(x, t) = 0$ при $t > 0$.

Таким же способом мы докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть

$$f(x) = \max_{0 \leq t \leq t_0} |u(x, t)|;$$

если $u(x, t)$ — решение уравнения теплопроводности и если существует такая постоянная C , что

$$f(x) \cdot \exp(-Cx^2) \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow \infty$, равно как и при $x \rightarrow -\infty$, тогда равенство $u(x, 0) = 0$ приводит к $u(x, t) \equiv 0$ ($0 \leq t \leq t_0$)⁵⁾.

Теорема. Если $\varphi(x)$ не равна тождественно нулю, то существует единственное решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условию предыдущей теоремы и начальному условию $u(x, 0) = \varphi(x)$; кроме того, это решение дается интегралом

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Перейдем к доказательству теоремы.

Допустим, что $u(x, 0) = 0$ и рассмотрим функцию

$$U(x, t) = f(-R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x+R)^2}{4t}\right] + f(R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-R)^2}{4t}\right];$$

эта функция удовлетворяет уравнению теплопроводности. Рассмотрим значения $U(x, t)$ на полосе $-R \leq x \leq R$, $0 \leq t$; на нижней границе $U(x, 0) = 0$, на границах $x = \pm R$ имеем:

$$U(-R, t) \geq f(-R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \geq u(-R, t) \geq -f(-R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \geq -U(-R, t),$$

$$U(R, t) \geq f(R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \geq u(R, t) \geq -f(R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \geq -U(R, t)$$

(при $0 \leq t \leq t_0$).

⁵⁾Эта теорема также доказана совершенно другим способом Пискуновым (М. Piscounoff). Она может быть также доказана с помощью функции Грина (Green).

Функция $U(x, t)$ разрывна в точках $(-R, 0)$ и $(R, 0)$, но очевидно, что значения нижних пределов $\underline{U}(-R, 0)$ и $\underline{U}(R, 0)$ равны нулю. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Если функции $U(x, t)$ и $u(x, t)$ удовлетворяют уравнению теплопроводности внутри прямоугольника $|x| \leq R, 0 \leq t \leq t_0$, и если на трёх сторонах $t = 0, x = \pm R$ имеем $\underline{U}(x, t) \geq \underline{u}(x, t)$, то внутри прямоугольника и на его верхней стороне имеем $\underline{U}(x, t) \geq \underline{u}(x, t)$.

Действительно, на трёх упомянутых сторонах имеем:

$$\underline{v}(x, t) = \underline{U}(x, t) - \underline{u}(x, t) \geq \underline{U}(x, t) - \overline{u}(x, t) \geq 0.$$

Предположим, что $v(x_1, t_1) = -l < 0$ ($|x_1| < R, t_1 > 0$); рассмотрим функцию $V(x, t) = v(x, t) + k(t - t_1)$, k — положительная константа, столь малая, что минимум $V(x, t)$ достигается внутри прямоугольника ($k < \frac{l}{t_1}$). Пусть (x_2, t_2) точка, в которой достигается этот минимум, тогда имеем:

$$\frac{\partial^2 V(x_2, t_2)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x_2, t_2)}{\partial x^2} \geq 0, \quad \frac{\partial V(x_2, t_2)}{\partial t} = \frac{\partial v(x_2, t_2)}{\partial t} + k \leq 0,$$

отсюда вытекает, что выражение $\frac{\partial^2 V(x_2, t_2)}{\partial x^2} - \frac{\partial V(x_2, t_2)}{\partial t}$ положительное. Но с другой стороны это выражение равно $\frac{\partial^2 v(x_2, t_2)}{\partial x^2} - \frac{\partial v(x_2, t_2)}{\partial t} - k = -k$; это противоречие доказывает теорему.⁶⁾

Поскольку решение уравнения теплопроводности не может достигать ни максимума, ни минимума внутри полосы, из предыдущих неравенств получаем

$$U(x, t) - u(x, t) \geq 0 \geq u(x, t) - U(x, t)$$

при $-R \leq x \leq R, t_0 = 0, 0 \leq t \leq t_0, x = \pm R$; следовательно,

$$\left\{ f(-R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x+R)^2}{4t} \right] + f(R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x-R)^2}{4t} \right] \right\} \geq \\ \geq u(x, t) \geq \\ \geq - \left\{ [f(-R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x+R)^2}{4t} \right] + f(R) \cdot \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{(x-R)^2}{4t} \right] \right\}$$

в любом прямоугольнике $-R \leq x \leq R, 0 \leq t \leq t_0$.

⁶⁾См. Petrowsky I. Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitung // Compositio Mathematica. — 1935. — V. 1. — S. 387.

Выберем t настолько малое, что $\frac{1}{4t} > C$, и устремим R к бесконечности; в пределе левая и правая части неравенства обратятся в нуль, так что

$$u(x, t) \equiv 0$$

при $0 \leq t \leq \frac{1}{4C}$. Повторяя то же рассуждение для полосы $\frac{1}{4C} \leq t \leq 2 \cdot \frac{1}{4C}$ и так далее, приходим, наконец, к выводу, что $u(x, t) \equiv 0$ в любой полосе $0 \leq t \leq t_0$. Очевидно, отсюда вытекает следующее

С л е д с т в и е. Два решения $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, удовлетворяющие условиям теоремы и такие, что $u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \varphi(x)$, совпадают для всех значений t :

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

Покажем теперь, что если $\varphi(x) \neq 0$, то решение $u(x, t)$, равное $\varphi(x)$ при $t = 0$ и удовлетворяющее предыдущему условию, представимо интегралом Пуассона:

$$u(x, t) = P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Действительно, если функция $u(x, t)$ [$u(x, 0) = \varphi(x)$] удовлетворяет условию

$$f(x) \cdot \exp(-Cx^2) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{x \rightarrow +\infty} 0,$$

то для любого положительного ε можно найти достаточно большое число X такое, что

$$|\varphi(x)| < \varepsilon \exp(Cx^2) \quad \text{при} \quad |x| > X.$$

Тогда полагая

$$A(\varepsilon) = \max_{-X \leq x \leq X} |\varphi(x)|$$

имеем для любого значения x :

$$|u(x, 0)| = |\varphi(x)| < A(\varepsilon) + \varepsilon \exp(Cx^2).$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] \varphi(\xi) d\xi;$$

имеем:

$$\begin{aligned}
 |P(x, t)| &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] [A(\varepsilon) + \varepsilon \exp(C\xi^2)] d\xi = \\
 &= \frac{A(\varepsilon)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha^2) d\alpha + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\xi^2 - 2x\xi + x^2) - 4tC\xi^2}{4t}\right] \frac{d\xi}{\sqrt{t}} = \\
 &= A(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\left[\xi\sqrt{1-4tC} - \frac{x}{\sqrt{1-4tC}}\right]^2}{4t}\right\} \exp\left(\frac{Cx^2}{1-4tC}\right) d\xi = \\
 &= A(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-4tC}} \exp\left(\frac{Cx^2}{1-4tC}\right) \quad \left(\text{при } t < \frac{1}{4C}\right).
 \end{aligned}$$

Если положить

$$C_1 = \frac{C}{1-4Ct_1}$$

и

$$F(x) = \max_{0 \leq t \leq t_1} P(x, t) \quad \left(t_1 < \frac{1}{4C}\right),$$

то имеем:

$$F(x) \cdot \exp(-C_1x^2) \leq A(\varepsilon) \cdot \exp(-C_1x^2) + \frac{\varepsilon}{1-4t_1C},$$

другими словами

$$F(x) \cdot \exp(-C_1x^2) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{x \rightarrow +\infty} 0;$$

поскольку $u(x, 0) = P(x, 0)$, то можно утверждать, что

$$u(x, t) \equiv P(x, t)$$

при $0 \leq t \leq \min\left(t_0, \frac{1}{4C}\right)$.

В заключение укажем, что среди решений, построенных в § 1 и обращающихся в нуль при $t = 0$: $u(x, 0) = 0$, но не равных нулю тождественно: $u(x, t) \neq 0$, для любого ε можно найти такое решение, что:

$$f(x) = \max |u(x, t)| < \exp(x^{2+\varepsilon}).$$

Пусть действительно $F(t)$ — функция, обращающаяся в нуль при $t = 0$ вместе со всеми производными; пусть к тому же

$$|F^{(n)}(t)| < [kn]!$$

(как обычно $[kn]$ обозначает наибольшее целое, не превосходящее kn); мы обозначим через $[kn]^*$ самое наименьшее целое, превосходящее kn или равное ему (так что либо $[kn] = [kn]^*$, либо $[kn]^* = [kn] + 1$).

Рассмотрим функцию

$$u(x, t) = F(t) + \frac{x^2}{2!} F'(t) + \frac{x^4}{4!} F''(t) + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(n)}(t) + \dots;$$

имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= \max_{0 \leq t < \infty} |u(x, t)| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} |F^{(n)}(t)| \leq \sum \frac{x^{2n} [kn]!}{(2n)!} \leq \sum \frac{x^{2n}}{[(2-k)n]^*}. \end{aligned}$$

Если

$$[(2-k) \cdot n]^* = m, \quad \text{то} \quad (2-k) \cdot n \leq m, \quad \text{и} \quad n \leq \frac{m}{2-k}.$$

Из этого следует, что при $x \geq 1$

$$\sum \frac{x^{2n}}{[(2-k) \cdot n]^*!} \leq \sum' \frac{x^{\frac{2m}{2-k}}}{m!},$$

где индекс ' указывает, что во второй сумме каждому m соответствуют столько слагаемых, сколько существует целых n , для которых $[(2-k) \cdot n]^* = m$. Очевидно, если

$$[(2-k) \cdot n]^* = [(2-k) \cdot (n+1)]^* = \dots = [(2-k) \cdot (n+1)]^* = m,$$

$$[(2-k) \cdot (n-1)] < m < [(2-k) \cdot (n+l+1)]^*,$$

число l равно либо $\left[\frac{1}{2-k} \right]$ либо $\left[\frac{1}{2-k} \right]^*$. Итак,

$$\sum' \frac{x^{\frac{2}{2-k}m}}{m!} \leq \left[\frac{1}{2-k} \right]^* \sum \frac{x^{\frac{2}{2-k}m}}{m!} = \left[\frac{1}{2-k} \right]^* \exp \left(x^{\frac{2}{2-k}} \right).$$

Для любого фиксированного значения ε выберем k такое, что

$$0 < \frac{2}{2-k} < 2 + \varepsilon,$$

или, иначе говоря, такое, что

$$1 < k < 2 - \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} < 2.$$

С таким выбором k при достаточно больших x :

$$f(x) = \max_{0 \leq t < \infty} |u(x, t)| < \exp(x^{2+\varepsilon}),$$

что и требовалось доказать.

§ 6. Перейдем к изучению вопросов единственности в случае полупрямой. Можно поставить следующие задачи:

Найти функцию $u(x, t)$, непрерывную при $x \geq 0, t > 0$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности при $x > 0, t > 0$ и такую, что

a) $u(x, 0) = \varphi(x),$

b₁) $u(0, t) = \mu_1(t)$

(первая краевая задача).

Условие b₁) может быть заменено на

b₂) $\frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = \mu_2(t)$

(вторая краевая задача) или на

b₃) $\frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = h(u(0, t) - \mu_3(t)) \quad (h > 0)$

(третья краевая задача).

Изучение второй и третьей задачи совершенно аналогично первой, так что в последующем изложении мы их опускаем.

Можно также поставить «задачу без начальных условий» (задача Фурье):

Найти непрерывную функцию в области $x \geq 0, t > -\infty$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности для $x > 0$ и для любого значения t и принимающую значение $\mu_1(t)$ при $x = 0$.

Наконец, в § 8 мы рассмотрим новую задачу.

Вернемся к первой краевой задаче. Легко видеть, что решение этой задачи не определено этими условиями однозначно.

Действительно, выбирая функцию $F_1(t)$, как в § 1, и полагая

$$u(x, t) = xF_1(t) + \frac{x^3}{3!} F_1'(t) + \frac{x^5}{5!} F_1''(x) + \dots,$$

получаем решение первой краевой задачи, удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 0, \quad \mu(0, t) = \mu(t) = 0,$$

которые в то же время не равны тождественно нулю.

Чтобы получить единственное решение, нужно добавить дополнительные условия, аналогичные тем, которые были в § 5:

I. Если для

$$f(x) = \max_{0 \leq t \leq t_0} u(x, t)$$

выполняется

$$f(x) \cdot \exp(-Cx^2) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

то из условий $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 0$ следует, что

$$u(x, t) \equiv 0 \quad (t \leq t_0).$$

II. Решение $u(x, t)$, удовлетворяющее условию

$$f(x) \cdot \exp(-Cx^2) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

выражается через свои значения при $t = 0$, $x > 0$ и при $x = 0$, $t > 0$ следующим образом:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \mu(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right] \right\} \varphi(\xi) d\xi,$$

где интегралы сходятся.

§ 7. Рассмотрим теперь задачу Фурье, а именно:

Найти непрерывную функцию в области $x \geq 0, t > -\infty$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности при $x > 0$ для всех значений t и равную $\mu_1(t)$ при $x = 0$.

Условия этой задачи, как и условия предыдущей, не определяют единственное решение.

Действительно, если ряд

$$u(x, t) = xF_1(t) + \frac{x^3}{3!} F_1'(t) + \frac{x^5}{5!} F_1''(t) + \dots$$

сходится, то функция $u(x, t)$ есть решение задачи Фурье, удовлетворяющее условию $u(0, t) = 0$ ($t > -\infty$). Выбирая $F_1(t)$ в виде полиномов степени $0, 1, 2, \dots$, получаем полиномы:

$$u_0(x, t) = kx,$$

$$u_1(x, t) = (k_1 t + k)x + \frac{x^3}{3!} k_1,$$

.....

которые удовлетворяют уравнению теплопроводности и условию

$$u_n(0, t) = 0 \quad (\text{при } t > -\infty).$$

Теперь покажем, что если $u_1(x, t), u_2(x, t)$ непрерывны при $x \geq 0, t > -\infty$, и удовлетворяют уравнению теплопроводности при $x > 0, t > -\infty$, и если их производные по x порядка n равномерно ограничены (т.е. $\left| \frac{\partial^n u_1}{\partial x^n} \right| < M, \left| \frac{\partial^n u_2}{\partial x^n} \right| < M$), то из условия

$$u_1(0, t) = u_2(0, t)$$

следует, что

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

есть полином, степень которого не превосходит n (естественно, он тоже является решением уравнения теплопроводности).

Перейдём к доказательству. Рассмотрим сначала случай $n = 0$.

Покажем, что из условий

$$|u_1(x, t)| < M, \quad |u_2(x, t)| < M, \quad u_1(0, t) = u_2(0, t)$$

следует, что

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

Действительно, функция $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ равномерно ограничена: $|u(x, t)| < 2M$ и удовлетворяет, кроме того, условию $u(0, t) = 0$. В силу выводов § 6 для любой пары $x > 0, t > t_0$ имеем:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] \right\} u(\xi, t_0) d\xi.$$

Положим в этой формуле x и t фиксированными и устремим t_0 к $-\infty$; получим:

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] \right\} \frac{d\xi}{2\sqrt{t-t_0}} = \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\frac{x}{\sqrt{t-t_0}}}^{\infty} \exp(-\alpha^2) d\alpha - \int_{\frac{x}{2\sqrt{t-t_0}}}^{\infty} \exp(-\alpha^2) d\alpha \right\} = \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{4M}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t-t_0}}} \exp(-\alpha^2) d\alpha = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Для $n = 1$ мы покажем, что из условий

$$\left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right| < M, \quad \left| \frac{\partial u_2}{\partial x} \right| < M, \quad u_1(0, t) = u_2(0, t)$$

следует

$$u_1(x, t) = u_2(x, t) + kx,$$

где k — константа. Как и в предыдущем случае, имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] \right\} u(\xi, t_0) d\xi.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] \right\} \right] u(\xi, t_0) d\xi. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| &= \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{x-\xi}{2(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{x+\xi}{2(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] \right\} u(\xi, t_0) \right|_0^{\infty} - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{x-\xi}{2(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] + \frac{x+\xi}{2(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-t_0)} \right] \right\} \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, t_0) d\xi \left| \leq \frac{2M}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \left[2 \int_0^{\infty} \exp(-\alpha) d\alpha \right] = \right. \\ &\quad \left. = \frac{2M}{\sqrt{\pi(t-t_0)}} \xrightarrow{t_0 \rightarrow -\infty} 0. \right. \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0,$$

откуда следует

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) = kx.$$

Случай $n > 1$ сводится к уже рассмотренным случаям (для n чётных — к случаю $n = 0$, для n нечётных — к случаю $n = 1$), дифференцированием $u_1(x, t) - u_2(x, t)$ по t .

Так, для $n = 2$ рассмотрим функцию

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} [u_1(x, t) - u_2(x, t)].$$

Для этой функции, удовлетворяющей уравнению теплопроводности при $x > 0$ и обращающейся в нуль при $x = 0$: $v(0, t) = 0$, имеем неравенство

$$|v(x, t)| < 2M.$$

Если она непрерывна (т.е. не имеет разрыва при $x = 0$), то находимся в условиях случая $n = 0$ и можем записать

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}(u_1(x, t) - u_2(x, t)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1(x, t) - u_2(x, t)) = 0,$$

или

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) = kx.$$

Таким образом, остается лишь убедиться, что производные функции $v(x, t)$ по t непрерывны при $x = 0$. Это вытекает из следующей леммы:

Л е м м а. Все производные функции $u(x, t)$, непрерывной для $x \geq 0$, удовлетворяющей уравнению теплопроводности при $x > 0$ и обращающейся в нуль при $x = 0$, непрерывны при $x = 0$.

Действительно, рассмотрим функцию $U(x, t)$, определенную следующим образом:

$$U(x, t) = u(x, t),$$

$$U(-x, t) = -u(x, t) \quad (x \geq 0).$$

Докажем, что эта функция удовлетворяет уравнению теплопроводности, откуда будет следовать, что производные $\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^n U}{\partial x^n}$ непрерывны при $x = 0$.

Для того, чтобы доказать, что $U(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, рассмотрим полосу $-R \leq x \leq R$, $t \geq t_0$ и решение $V(x, t)$, которое совпадает с $U(x, t)$ на границе этой полосы. Так как краевые условия удовлетворяют равенству

$$V(x, t) = -V(-x, t),$$

это же равенство $V(x, t) = -V(-x, t)$, в силу теоремы единственности, имеет место для всех значений $|x| \leq R$, $t \geq t_0$. Итак,

$$V(0, t) = 0 = u(0, t).$$

Как следствие, имеем:

$$V(x, t) = u(x, t)$$

на границе полосы $0 \leq x \leq R, t \geq t_0$; эти две функции являются решениями уравнения теплопроводности, откуда следует, что

$$V(x, t) \equiv u(x, t) \quad (0 \leq x \leq R, t \geq t_0)$$

и поскольку

$$V(x, t) = -V(-x, t),$$

получаем:

$$V(x, t) = U(x, t),$$

что и требовалось доказать.

Для $n = 3$ имеем

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(u_1(x, t) - u_2(x, t)) = kx,$$

следовательно,

$$u_1(x, t) = u_2(x, t) + kxt + f(x);$$

поскольку правая часть является решением уравнения теплопроводности, то отсюда заключаем:

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) = x(kt + k_1) + \frac{x^3}{3!} k.$$

Для других значений n доказательство полностью аналогично.

§ 8. В этом параграфе рассмотрим следующую задачу ⁷⁾:

Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

определённую при $x > 0, -\infty < t \leq t_0$, если известны её значения

$$u(x, t_0) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad t > t_0.$$

Как и в предыдущих задачах, условия этой задачи не определяют единственное решение.

⁷⁾Эта задача имеет очевидное геофизическое значение.

Действительно, функция

$$u(x, t) = xF_1(t) + \frac{x^3}{3!} F_1'(t) + \frac{x^5}{5!} F_1''(t) + \dots$$

удовлетворяет условиям задачи при $\varphi(x) = 0$, лишь бы функция $F_1(t)$ была выбрана, как в § 1 (в данном случае она определена при $-\infty < t \leq t_0$).

Докажем, что может существовать только одно решение, которое удовлетворяет условиям задачи и кроме того обладает производной $\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n}$, равномерно ограниченной при $x > 0$, $-\infty < t \leq t_0$:

$$\left| \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n} \right| < M.$$

Рассмотрим сначала случай $n = 0$. Допустим, что существуют два решения, определённые при $x > 0$, $-\infty < t \leq t_0$, которые равномерно ограничены в этой области:

$$|u_1(x, t)| < M, \quad |u_2(x, t)| < M$$

и которые совпадают при $t = t_0$:

$$u_1(x, t_0) = u_2(x, t_0).$$

Их разность

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

обращается в нуль при $t = t_0$ и имеем

$$|u(x, t)| < 2M.$$

Предположим, что функция

$$u(0, t) = \mu(t)$$

непрерывна⁸⁾. Известно, что

$$v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{x}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \mu(\tau) d\tau$$

является решением уравнения (I), которое равно $\mu(t)$ при $x = 0$:

$$v(0, t) = \mu(t).$$

⁸⁾ Если $u(0, t)$ не существует, или если она не непрерывна, можно взять в качестве $\mu(t)$ непрерывную функцию $u(x_0, t)$ ($x_0 > 0$) и показать теми же рассуждениями, что и в предыдущем тексте, что $u(x, t) = 0$ при $x > x_0$. Так как число x_0 сколь угодно мало, из этого следует, что $u(x, t) = 0$ для любого $x > 0$.

Поскольку $|\mu(t)| < 2M$, то

$$\begin{aligned} |v(x, t)| &\leq 2M \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \frac{x d\tau}{4(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= 2M \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha^2) d\alpha = 2M. \end{aligned}$$

В силу теоремы, доказанной в § 7, можно утверждать, что

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{x}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \mu(\tau) d\tau.$$

Таким образом получаем (полагая $t_0 = 0$):

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} - \int_{-\infty}^0 \frac{x}{(-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{x}{4(-\tau)}\right] \mu(\tau) d\tau = 0.$$

Полагая $\frac{x^2}{4} = z$ и $\frac{1}{(-\tau)} = \alpha$, имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\infty} \exp(-2\alpha) \bar{\mu}(\alpha) d\alpha, \\ \bar{\mu}(\alpha) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\mu\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha}}. \end{aligned}$$

В силу теоремы Лерха⁹⁾ можно утверждать, что $\bar{\mu}(\alpha) = 0$, следовательно, $\mu(\tau) = 0$, откуда заключаем, что $v(x, t) \equiv 0$ или

$$u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

⁹⁾ Lerch M. Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel // Acta Mathematica. — 1903. — V. 27. — P. 339-352. См. также Picard É. Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles. — Gauthier-Villars, 1927.

Если предположить, что функции $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ не ограничены, но их производные порядка n ограничены, то, опираясь на предыдущие выводы, видим, что

$$\bar{v}(x, t) = \frac{\partial^n v(x, t)}{\partial x^n} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}(u_1(x, t) - u_2(x, t)) = 0,$$

потому что

$$\bar{v}(x, 0) = \varphi^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(x) = 0.$$

Следовательно,

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

есть полином степени не выше n , который удовлетворяет уравнению теплопроводности. Однако легко видеть, что такие полиномы, равные нулю при $t = 0$, равны нулю тождественно.

Итак,

$$u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

Поступило в редакцию 13/II 1935 г.

ОБ УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. Н. Тихонов

В предлагаемой статье изучаются некоторые вопросы, связанные с первой краевой задачей для уравнения теплопроводности.

В § 1 нами рассматривается вопрос, для какого типа областей разрешима эта задача. Установим следующие определения.

Будем называть область \mathfrak{G} фундаментальной областью для уравнения теплопроводности, если для нее разрешима первая краевая задача, т. е. если для любых непрерывных функций: $\psi(P)$, заданной на $\overline{\mathfrak{G}}$, и $\varphi(P, t)$, заданной на границе C этой области \mathfrak{G} для $t \geq 0$, удовлетворяющих условию $\psi(P) = \varphi(P, 0)$ (на C), существует непрерывная функция $u(P, t)$, удовлетворяющая уравнению теплопроводности

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{для } P \in \mathfrak{G}, t > 0)$$

и условиям

$$u(P, 0) = \psi(P) \quad (\text{для } P \in \overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} + C),$$

$$u(P, t) = \varphi(P, t) \quad (\text{для } P \in C, t \geq 0).$$

Аналогично будем называть область \mathfrak{G} фундаментальной областью для уравнения

$$\Delta u - \lambda u = 0,$$

если для любой непрерывной функции $\varphi(P)$, заданной на границе этой области, существует такая непрерывная на $\overline{\mathfrak{G}}$ функция $v(P)$, которая удовлетворяет уравнению внутри области и обращается в заданную функцию на C .

Целью этого параграфа является доказательство следующих теорем.

Теорема 1. *Всякая ограниченная область, фундаментальная для уравнения теплопроводности, является также фундаментальной областью для уравнения Лапласа.*

Теорема 2. *Всякая фундаментальная область для уравнений*

$$\Delta u - \bar{\lambda}u = 0 \quad \text{при некотором } \bar{\lambda} \geq 0$$

является также фундаментальной областью для уравнений

$$\Delta u - \lambda u = 0 \quad \text{при любом } \lambda \geq 0.$$

Теорема 3. *Всякая область, фундаментальная для уравнений*

$$\Delta u - \lambda u = 0 \quad \text{при любом } \lambda, \text{ большем некоторого } \lambda_0,$$

является фундаментальной для уравнения теплопроводности.

В § 2 рассматривается первая краевая задача в несколько расширенной формулировке и доказывается единственность решения этой задачи. В этом параграфе доказывается следующая

Теорема. *Дана ограниченная область \mathfrak{G} с границей C и даны две непрерывные ограниченные функции: $\psi(P)$, определенная для $P \subset \mathfrak{G}$, и $\varphi(P, t)$, определенная для $P \subset C$, $t > 0$. Существует не более одной равномерно-ограниченной функции $u(P, t)$, удовлетворяющей уравнению теплопроводности*

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

для точек $P \subset \mathfrak{G}$ и $t > 0$ и условиям

$$u(P, 0) = \psi(P) \quad (\text{для } P \subset \mathfrak{G}),$$

$$u(P, t) = \varphi(P, t) \quad (\text{для } P \subset C, t > 0).$$

В этой задаче предположение, что задаваемые функции совпадают на C при $t = 0$: $u(P, 0) = \psi(P)$ (для $P \subset C$), заменяется условием ограниченности функции $u(P, t)$. Без этого последнего условия теорема была бы не верна, как то выясняется на примерах.

В § 3 строится функция Грина $G(P, t; P', \tau)$ для первой краевой задачи уравнения теплопроводности для некоторой области \mathfrak{G} при единственном

предположении, что эта область является фундаментальной. Относительно этой функции устанавливаются следующие свойства ее.

Теорема 1. Для любой ограниченной функции $\psi(P)$, определенной и непрерывной на \mathfrak{G} , функция

$$\Pi(P, t) = \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, t; P', \tau) \psi(P') d\omega' \quad (t > t_0)$$

является ограниченной функцией, удовлетворяющей уравнению теплопроводности для $P \subset \mathfrak{G}$ и $t > t_0$ и условиям

$$\Pi(P, t_0) = \psi(P) \quad (\text{для } P \subset \mathfrak{G}),$$

$$\Pi(P, t) = 0 \quad (\text{для } P \subset C, t > 0).$$

Из этой теоремы нетрудно вывести следствие, что, если некоторая область является фундаментальной для первой краевой задачи уравнения теплопроводности, то для этой области разрешима эта задача и в расширенной постановке, единственность решения которой доказывает § 2.

Далее, доказывается, что для фундаментальных областей также разрешимо неоднородное уравнение теплопроводности.

Теорема 2. Если ограниченная функция $\pi(P, t)$, определенная и непрерывная для $P \subset \mathfrak{G}$, $t > t_0$, удовлетворяет внутри области условию Hölder'a, то

$$V(P, t) = \int_{t_0}^t d\tau \left\{ \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, t; P', \tau) \pi(P', \tau) d\omega' \right\}$$

является непрерывной функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = -\pi(P, t)$$

для любых $P \subset \mathfrak{G}$ и $t > 0$ и условиям

$$V(P, 0) = 0 \quad (\text{для } P \subset \overline{\mathfrak{G}}),$$

$$V(P, t) = 0 \quad (\text{для } P \subset C, t \geq 0).$$

Факт существования функции, обладающей перечисленными в этой теореме свойствами, является простым следствием предположения о фундаментальной области \mathfrak{G} . Но та форма, которая придается в теореме этой функции, весьма удобна для приложений.

Наконец, в последней теореме устанавливается соотношение между функцией Грина для уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа.

Последний § [4] посвящен изучению аналитической формы функций Грина для поверхностей типа Ляпунова. При этом рассматривается не только функция Грина для первой краевой задачи, но также и для второй краевой задачи, и устанавливаются некоторые оценки, касающиеся значений функций на поверхности изучаемой области, полезные для приложений.

§ 1

Целью настоящего параграфа является доказательство следующих теорем.

Теорема 1. Всякая ограниченная область, фундаментальная для уравнения теплопроводности, является также фундаментальной областью для уравнения Лапласа.

Теорема 2. Всякая фундаментальная область для уравнений

$$\Delta u - \bar{\lambda}u = 0 \quad \text{при некотором } \bar{\lambda} \geq 0$$

является также фундаментальной областью для уравнений

$$\Delta u - \lambda u = 0 \quad \text{при любом } \lambda \geq 0. \quad [^1]$$

Теорема 3. Всякая область, фундаментальная для уравнений

$$\Delta u - \lambda u = 0 \quad \text{при любом } \lambda, \text{ большем некоторого } \lambda_0,$$

является фундаментальной для уравнения теплопроводности.

Доказательство теоремы 1.

Как известно, не может существовать более одного непрерывного решения уравнения теплопроводности, $u(P, t)$, удовлетворяющего условиям

$$u(P, 0) = \psi(P) \quad (P \in \bar{\mathfrak{G}}),$$

$$u(P, t) = \varphi(P, t) \quad (P \in C, t \geq 0),$$

где $\psi(P)$ и $\varphi(P, t)$ — заданные непрерывные функции, для которых $\psi(P) = \varphi(P, 0)$ для $P \subset C$.

Отметим, кроме того, что если две непрерывные функции $u_1(P, t)$ и $u_2(P, t)$ удовлетворяют уравнению теплопроводности и

$$u_1(P, \theta) \leq u_2(P, \theta) \quad (\text{для всех } P \subset \bar{\mathfrak{G}}),$$

$$u_1(P, t) \leq u_2(P, t) \quad (\text{для всех } P \subset C, t \geq 0),$$

то и

$$u_1(P, t) \leq u_2(P, t) \quad (\text{для всех } P \subset \bar{\mathfrak{G}}, t > 0) \text{ [}^2\text{]}.$$

Л е м м а 1. Если некоторая функция $u_1(P, t)$ непрерывна в области $\bar{\mathfrak{G}}$ при $t \geq 0$, удовлетворяет уравнению теплопроводности для $P \subset \mathfrak{G}$ и $t > 0$ и условию

$$u(P, t) = 0 \quad (\text{для } P \subset C, t \geq t_0 \geq 0),$$

то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(P, t) = 0 \quad (\text{равномерно}),$$

каковы бы ни были значения $u(P, t)$ для $t \leq t_0$.

Действительно, пусть $|u(P, t_0)| < N$ и пусть R — диаметр области \mathfrak{G} . Опишем шар радиуса R вокруг некоторой точки P_0 области \mathfrak{G} так, чтобы \mathfrak{G} лежала внутри этого шара.

Рассмотрим интеграл

$$u_2(P, t) = \Pi(P, t) =$$

$$= \frac{N}{(2\sqrt{\pi})^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{1}{(t-t_0)^{3/2}} \exp\left[-\frac{r_{PP'}^2}{4(t-t_0)}\right] r_{PP'}^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

поместив в рассматриваемую точку начало координат, причем $r_{PP'}$ — расстояние от некоторой точки P до точки P' , координаты которой являются переменными интегрирования.

Эта функция непрерывна в точках $\bar{\mathfrak{G}}$ при $t \geq t_0$, удовлетворяет уравнению теплопроводности внутри области, положительна на C и $u_2(P, t_0) = N$ [3] (для $P \subset \bar{\mathfrak{G}}$).

Следовательно, в силу сделанного ранее замечания,

$$|u_1(P_0, t)| \leq \frac{N}{(2\sqrt{\pi})^3} \cdot 4\pi \int_0^R \exp\left[-\frac{r^2}{4(t-t_0)}\right] \frac{r^2 dr}{\sqrt{(t-t_0)^3}} =$$

$$= N \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{R}{2\sqrt{t-t_0}}} \exp(-\alpha^2) \alpha^2 d\alpha \quad (t \geq t_0).$$

Правая часть не зависит от положения P_0 и стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$, что и доказывает лемму.

Лемма 2. Если функция $u(P, t)$ непрерывна на $\bar{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} + C$ при $t \geq 0$, \mathfrak{G} — фундаментальная область для уравнения

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t},$$

удовлетворяет внутри \mathfrak{G} при $t > 0$ уравнению теплопроводности, равна 0 при $t = 0$: $u(P, 0) = 0$, принимает на C значения $\varphi(P, t)$, непрерывно дифференцируемые по t , причем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(P, 0) = 0,$$

то существует производная

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P, t) = u_1(P, t) \quad \text{для всех значений } P \subset \bar{\mathfrak{G}} \text{ и } t \geq 0,$$

являющаяся непрерывной функцией, удовлетворяющей уравнению теплопроводности, для которой

$$u_1(P, 0) = 0 \quad (\text{при } P \subset \bar{\mathfrak{G}}),$$

$$u_1(P, t) = \frac{\partial \varphi(P, t)}{\partial t} \quad (\text{при } P \subset C, t \geq 0).$$

Действительно, рассмотрим функцию $u_1(P, t)$, удовлетворяющую условиям, сформулированным в лемме 2; такая функция существует в силу предположения о фундаментальности области \mathfrak{G} .

Рассмотрим, далее, функцию

$$\bar{u}(P, t) = \int_0^t u_1(P, \tau) d\tau.$$

Очевидно, что

$$\Delta \bar{u} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \int_0^t \Delta u_1(P, \tau) d\tau - u_1(P, t) = \int_0^t \left(\Delta u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right) d\tau = 0$$

(дифференцирование $\Delta \int_0^t u_1(P, \tau) d\tau$ под знаком интеграла здесь законно, так как нетрудно убедиться, что оператор $\Delta u_1(P, t)$ непрерывен при $t = 0$ [4]) и что

$$\bar{u}(P, 0) = 0 \quad (P \in \bar{\mathfrak{G}}),$$

$$\bar{u}(P, t) = \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} d\tau = \varphi(P, t) \quad (P \in C, t \geq 0).$$

В силу теоремы единственности $\bar{u}(P, t) = u(P, t)$, т. е.

$$u_1(P, t) = \frac{\partial u(P, t)}{\partial t},$$

чем и доказывается лемма 2.

Теорема 1 является непосредственным следствием этих двух лемм.

Действительно, нам надо показать, что для любой непрерывной функции $\varphi(P)$, заданной на контуре C , существует непрерывная функция $v(P)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа и принимающая данные значения на контуре.

Пусть же нам задана некоторая функция $\varphi(P)$. Рассмотрим функцию $\varphi(P, t)$, определенную для $P \in C$ и для $0 \leq t < \infty$, полагая $\varphi(P, t) = \varphi(P)$ для $t \geq 1$, $\varphi(P, 0) = 0$, а для значений $0 \leq t \leq 1$ как-нибудь интерполируя, но так, чтобы $\frac{\partial \varphi(P, t)}{\partial t}$ была непрерывной функцией, обращающейся в нуль при $t = 0$, например, полагая

$$\varphi(P, t) = \varphi(P)(3t^2 - 2t^3) \quad \text{для } 0 \leq t \leq 1,$$

и рассмотрим непрерывное решение уравнения теплопроводности, $u(P, t)$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(P, 0) &= 0 & (P \in \bar{\mathfrak{G}}), \\ u(P, t) &= \varphi(P, t) & (P \in C, t \geq 0). \end{aligned}$$

Покажем, что $u(P, t)$ равномерно сходится к некоторой функции $v(P)$, когда $t \rightarrow \infty$, т. е. каково бы то ни было ε , существует такое $T(\varepsilon)$, что для любого $\bar{t} > T(\varepsilon)$ и любого $t > 0$

$$|u(P, t) - u(P, t + \bar{t})| < \varepsilon \quad (\text{равномерно}).$$

Эта оценка есть непосредственное следствие леммы 1, если заметить, что при любом фиксированном \bar{t} эта разность удовлетворяет уравнению теплопроводности и обращается в нуль на контуре C для $t \geq t_0 = 1$. Таким образом, если обозначить через M максимум функции $u(P, t)$ (он равен максимуму $\varphi(P)$), то в силу оценки, полученной в лемме 1,

$$|u(P, t) - u(P, t + \bar{t})| \leq 2M \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{R}{2\sqrt{t-t_0}}} \exp(-\alpha^2) \alpha^2 d\alpha$$

при любом \bar{t} , что и доказывает наше утверждение.

Итак, существует непрерывная функция $v(P)$ в области \mathfrak{G} , равная

$$v(P) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(P, t).$$

Очевидно, что $v(P)$ на \mathfrak{G} обращается в $\varphi(P)$, и нам остается доказать, что $\Delta v(P) = 0$ внутри \mathfrak{G} . Заметим, что функция

$$u_1(P, t) = \frac{\partial u(P, t)}{\partial t} = \Delta u(P, t)$$

в силу леммы 2 является решением уравнения теплопроводности, которое обращается на C в нуль при $t \geq t_0 = 1$.

Пользуясь вторично леммой 1, получаем, что $\Delta u(P, t)$ равномерно стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Итак, $v(P)$ является равномерным пределом функций $u(P, t)$, зависящих от t как от параметра, причем $\Delta u(P, t) \rightarrow 0$ (равномерно) при $t \rightarrow \infty$.

Отсюда следует, что $v(P)$ — гармоническая функция. Действительно, возьмем какой-либо шар K , ограниченный сферой S , целиком лежащий в области \mathfrak{G} . Тогда для всякой точки $P \in K$ имеем

$$u(P, t) = \iint_{(S)} \frac{\partial G}{\partial n_{P'}}(P, P')u(P', t) d\sigma' - \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, P')\Delta u(P', t) d\omega',$$

где $G(P, P')$ — функция Грина для шара.

Переходя к пределу под знаком интеграла, получаем

$$v(P) = \iint_{(S)} \frac{\partial G}{\partial n_{P'}}(P, P')v(P') d\sigma',$$

что и доказывает гармоничность функции $v(P)$, так как шар K можно выбирать произвольно.

Доказательство теоремы 2.

Пусть нам дана область \mathfrak{G} , являющаяся фундаментальной для некоторого уравнения

$$L(u) = \Delta u - \bar{\lambda}u = 0 \quad (\bar{\lambda} \geq 0).$$

Построим функцию Грина $G(P, P')$, соответствующую этому уравнению для этой области. Элементарным решением для этого уравнения является функция

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\exp(-\mu r_{PP'})}{r_{PP'}} \quad (\mu = \sqrt{\bar{\lambda}}),$$

где $r_{PP'}$ — расстояние между точками $P(x, y, z)$ и $P'(\xi, \eta, \zeta)$ [5], и следовательно, функция Грина определяется, как сумма

$$G(P, P') = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-\mu r_{PP'})}{r_{PP'}} - g(P, P'),$$

где второе слагаемое удовлетворяет уравнению $L(u) = 0$ по переменным $P(x, y, z)$ при заданных ξ, η, ζ , причем $G(P, P') = 0$, когда $P \in C$, т. е.

$$g(P, P') = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-\mu r_{PP'})}{r_{PP'}} \quad (\text{когда } P \in C).$$

Как нетрудно видеть, решение уравнения $L(u) = 0$ не может иметь внутри области \mathfrak{G} положительного максимума или отрицательного минимума.

Отсюда непосредственно следует, что:

во-первых, функция

$$G(P, P') \geq 0,$$

во-вторых,

$$G(P, P') \leq \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-\mu r_{PP'})}{r_{PP'}} \leq \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r_{PP'}},$$

так как функция $g(P, P')$, будучи положительна на контуре, также положительна во всякой точке области \mathfrak{G} .

Покажем, что функция $g(P, P')$ дифференцируема по переменным ξ, η, ζ сколько угодно раз и что эти производные являются непрерывными функциями P и P' , если только $P' \notin C$, причем по P они непрерывны, включая точки C .

Действительно, например, $\frac{\partial g(P, P')}{\partial \xi}$ есть предел разностного отношения

$$\frac{g(P, P'_1) - g(P, P')}{\Delta \xi},$$

которое является решением уравнения $L(u) = 0$ по переменным x, y, z и обращается на C в

$$\frac{1}{\Delta \xi} \cdot \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\exp(-\mu r_{PP'_1})}{r_{PP'_1}} - \frac{\exp(-\mu r_{PP'})}{r_{PP'}} \right],$$

где $r_{PP'_1}$ — расстояние точки P от точки $P'_1(\xi + \Delta \xi, \eta, \zeta)$. Отсюда легко заключить, что предел разностного отношения по ξ для функции $g(P, P')$ существует, равен непрерывной функции $g_\xi(P, P')$, удовлетворяющей уравнению $L(u) = 0$ по переменным x, y, z , совпадающей с функцией

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-\mu r_{PP'})}{r_{PP'}} \right]$$

на C , и что эта функция $g_\xi(P, P')$ является непрерывной функцией P и P' , если только $P' \notin C$. Существование остальных производных доказывается аналогично [6].

Докажем симметрию функции Грина

$$G(P_1, P_2) = G(P_2, P_1).$$

Если граница C области \mathfrak{G} является поверхностью, имеющей во всех точках конечную непрерывную кривизну, то симметрия функции Грина — хорошо известный факт, легко доказываемый при помощи формулы Грина. Если C не является поверхностью упомянутого типа, то аппроксимируем C изнутри поверхностями конечной кривизны, S_n , ограничивающими области \mathfrak{G}_n , так что расстояние любой точки $P \subset S_n$ от C не превосходит δ_n ($\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$).

Пусть

$$G_n(P, P') = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-\mu r_{PP'})}{r_{PP'}} - g_n(P, P')$$

функция Грина для этих областей. Докажем, что

$$G(P, P') = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(P, P'),$$

откуда и будет следовать симметрия функции $G(P, P')$. Если точка P' фиксирована ($P' \subset \mathfrak{G}$), то $G(P, P')$ является непрерывной функцией точки P на $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} + C$, причем $G(P, P') = 0$ для ($P \subset C$).

Пусть задано число ε ; тогда при достаточно большом n :

$$0 \leq G(P, P') \leq \varepsilon \quad \text{для } P \subset \mathfrak{G} - \mathfrak{G}_n,$$

в частности, для $P \subset S_n$ и, следовательно,

$$0 \leq G(P, P') - G_n(P, P') = g(P, P') - g_n(P, P') < \varepsilon$$

всюду внутри \mathfrak{G}_n , так как это неравенство выполняется на S_n , что и доказывает наше утверждение.

Из доказанной симметрии функции $G(P, P')$ следует, что она удовлетворяет уравнению $L(u) = 0$ по переменным ξ, η, ζ и что ее производные по x, y, z любых порядков непрерывны по P' вплоть до границы C , если только $P(x, y, z) \subset \mathfrak{G}$.

Докажем, что если функция $\mu(P')$ непрерывна и ограничена в \mathfrak{G} , то функция

$$v(P) = - \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, P') \mu(P') d\omega'$$

непрерывна и дифференцируема во всякой внутренней точке области \mathfrak{G} и обращается в нуль, когда $P \subset C$. Если же функция $\mu(P')$ удовлетворяет условию Hölder'a в некоторой точке $P \subset \mathfrak{G}$, то

$$L(v(P)) = \mu(P)$$

для этой точки P .

Нетрудно проверить, что интеграл, представляющий функцию $v(P)$, является равномерно сходящимся, откуда следует непрерывность $v(P)$, а также, что $v(P) = 0$ для $P \subset C$. Кроме того, при помощи доказанной непрерывности производных $\frac{\partial g}{\partial x}$, от функции $g(P, P')$ по переменным ξ, η, ζ , легко установить, что производные от $v(P)$ можно получить при помощи дифференцирования под знаком интеграла для всякой точки $P \subset \mathfrak{G}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(P) &= \\ &= - \iiint_{\mathfrak{G}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-\mu r_{PP'})}{r_{PP'}} \right] \mu(P') d\omega' + \iiint_{\mathfrak{G}} \frac{\partial g}{\partial x}(P, P') \mu(P') d\omega', \end{aligned}$$

что доказывает дифференцируемость $v(P)$.

Для того чтобы вычислить $L(v)$ для функции

$$v(P) = - \iiint_{\mathfrak{G}} \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-\mu r_{PP'})}{r_{PP'}} \mu(P') d\omega' + \iiint_{\mathfrak{G}} g(P, P') \mu(P') d\omega',$$

заметим, что, в силу доказанной непрерывности производных $\frac{\partial g}{\partial x}, \dots$ от функций $g(P, P')$, производные от второго слагаемого могут быть вычисляемы при помощи дифференцирования под знаком интеграла, откуда, в силу равенства $L(g) = 0$, следует, что

$$L(v) = L \left[- \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathfrak{G}} \frac{\exp(-\mu r_{PP'})}{r_{PP'}} \mu(P') d\omega' \right],$$

что, как известно [7], равно $\mu(P)$ в тех точках P , в которых функция $\mu(P)$ удовлетворяет условию Hölder'a.

Из доказанных свойств функции Грина получаем, что задача нахождения решения уравнения

$$\Delta u - \lambda u = L(u) - \lambda' u = 0 \quad (\lambda' = \lambda - \bar{\lambda})$$

внутри области \mathfrak{G} , обращающегося в заданную функцию $\varphi(P)$ на C :

$$u(P) = \varphi(P) \quad (\text{для } P \subset C),$$

эквивалентна решению интегрального уравнения

$$u(P) = -\lambda' \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, P') u(P') d\omega' + w(P),$$

где $w(P)$ — функция, удовлетворяющая уравнению

$$L(w) = \Delta w - \bar{\lambda} w = 0 \quad (\text{внутри } \mathfrak{G})$$

и условию

$$w(P) = \varphi(P) \quad (\text{на } C).$$

Действительно, очевидно, что решение дифференциального уравнения удовлетворяет и интегральному уравнению, но и, наоборот, если $u(P)$ непрерывна и удовлетворяет интегральному уравнению, то правая часть этого уравнения дифференцируема во всякой точке $P \subset \mathfrak{G}$, а следовательно, и $u(P)$ также. Отсюда заключаем, что $u(P)$ имеет вторые производные, удовлетворяет уравнению

$$L(u) - \lambda' u = 0 \quad \text{или} \quad \Delta u - \lambda u = 0 \quad (\text{внутри } \mathfrak{G})$$

и принимает на C те же значения, как и $w(P)$:

$$u(P) = \varphi(P) \quad (\text{для } P \subset C),$$

т. е. наше утверждение доказано.

Нам остается доказать, что наше интегральное уравнение разрешимо для любого значения $\lambda \geq 0$ или $\lambda' = \lambda - \bar{\lambda} \geq -\bar{\lambda}$. Заметим, во-первых, что к нашему уравнению приложима теория Fredholm'a, так как, хотя ядро нашего уравнения обращается в бесконечность при $P = P'$, но, как было отмечено,

$$0 \leq G(P, P') \leq \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{PP'}},$$

а в этом случае, как известно, уже первая итерация будет ограничена. Далее, ни одно $\lambda_0 \geq 0$ или $\lambda'_0 = \lambda_0 - \bar{\lambda} \geq -\bar{\lambda}$ не может являться собственным значением уравнения, так как в противном случае существовала бы функция $u_0(P)$, удовлетворяющая однородному уравнению

$$u_0(P) = -\lambda'_0 \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, P') u_0(P') d\omega',$$

которая тем самым обращается в нуль на C . Эта функция одновременно должна удовлетворять уравнению

$$L(u_0) - \lambda'_0 u_0 = 0 \quad \text{или} \quad \Delta u_0 - \lambda_0 u_0 = 0 \quad (\text{внутри } \mathfrak{G}),$$

которое при $\lambda \geq 0$ не может иметь нетривиального решения, обращающегося в нуль на C , как то очевидно на основании принципа максимума.

Сопоставляя результаты, получаем, что если на C задана некоторая непрерывная функция $\varphi(P)$, то, в силу предположения о фундаментальности области \mathfrak{G} , существует непрерывная функция $w(P)$, удовлетворяющая уравнению $L(w) = 0$ и обращающаяся в $\varphi(P)$ на C .

Далее, уравнение

$$u(P) = (\lambda - \bar{\lambda}) \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, P') u(P') d\omega' + w(P)$$

имеет единственное решение при любом $\lambda \geq 0$ и это решение удовлетворяет уравнению

$$\Delta u - \lambda u = 0 \quad (\text{внутри } \mathfrak{G})$$

и условию

$$u(P) = \varphi(P) \quad (\text{на } C),$$

что и доказывает фундаментальность области \mathfrak{G} для уравнения $\Delta u - \lambda u = 0$ при любом $\lambda \geq 0$ [8].

Доказательство теоремы 3.

Доказательство этой теоремы мы будем вести, опираясь на метод, предложенный Rothe [9] для решения уравнения теплопроводности.

Возьмем некоторое $h < \frac{1}{\lambda_0}$ и значения $t_n = nh$. Рассмотрим уравнение

$$\Delta u(x, y, z, t + h) = \frac{u(x, y, z, t + h) - u(x, y, z, t)}{h},$$

отличающееся от уравнения теплопроводности тем, что производная правой части заменена через конечную разность.

Пусть \mathfrak{G} — фундаментальная область для уравнения $\Delta u - \lambda u = 0$ при $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ и пусть заданы непрерывные функции: $\psi(P)$ на $\bar{\mathfrak{G}}$ и $\varphi(P, t)$ на C для $t \geq 0$. Положим

$$u_0^{(h)}(P) = \psi(P)$$

и определим $u_n^{(h)}(P)$ как решение уравнения

$$\Delta u_n^{(h)}(P) - \frac{1}{h} u_n^{(h)}(P) = -\frac{1}{h} u_{n-1}^{(h)}(P) \quad \left(\frac{1}{h} > \lambda_0\right),$$

удовлетворяющее условию

$$u_n^{(h)}(P) = \varphi(P, t_n) \quad (\text{на } C).$$

Эти функции дают нам функцию $u^{(h)}(P, t)$, определенную для $t = t_n = nh$ и равную

$$u^{(h)}(P, t_n) = u_n^{(h)}(P).$$

Установим сперва вспомогательную теорему.

Т е о р е м а . Если $\psi(P)$ имеет на $\bar{\mathfrak{G}}$ непрерывные производные до 4-го порядка, а $\varphi(P, t)$ — производные по t до 2-го порядка,

$$\psi(P) = \varphi(P, 0) \quad \text{и} \quad \Delta\psi(P) = \frac{\partial\varphi(P, 0)}{\partial t} \quad \text{на } C,$$

то $u^{(h)}(P, t)$ сходятся равномерно и определяют непрерывную функцию $u(P, t)$, являющуюся решением уравнения теплопроводности и удовлетворяющую условиям

$$u(P, 0) = \psi(P) \quad (\text{на } \bar{\mathfrak{G}}),$$

$$u(P, t) = \varphi(P, t) \quad (\text{на } C \text{ при } t \geq 0).$$

Эта теорема доказана в цитированной работе Rothe [10] в предположении, что область \mathfrak{G} ограничена поверхностью S , имеющей конечную кривизну. Однако это предположение используется им только для доказательства следующей леммы [11].

Л е м м а . Если функция $w(x, y, z)$ внутри области $\bar{\mathfrak{G}}$, ограниченной поверхностью конечной кривизны, удовлетворяет уравнению

$$\Delta w - \lambda w = \rho(x, y, z)$$

и принимает на границе значения $\varphi(x, y, z)$, то

$$|w(x, y, z)| \leq \frac{1}{\lambda} \alpha + \beta,$$

где

$$\alpha = \max \rho(x, y, z) \quad (\text{для } P(x, y, z) \in \mathfrak{G}),$$

$$\beta = \max \varphi(x, y, z) \quad (\text{для } P(x, y, z) \in S).$$

Мы докажем эту же лемму без предположения, что C есть поверхность конечной кривизны, и этим самым наша вспомогательная теорема будет доказана, а именно мы докажем:

Теорема. Если непрерывная на $\overline{\mathfrak{G}}$ функция $w(P)$ удовлетворяет внутри некоторой ограниченной области уравнению

$$\Delta w(P) - \lambda w(P) = \rho(P),$$

где $\rho(P)$ — непрерывная функция, и на границе

$$w(P) = \varphi(P) \quad (\text{для } P \subset C),$$

то

$$|w(P)| \leq \max\left(\frac{1}{\lambda} \alpha; \beta\right),$$

где по-прежнему

$$\alpha = \max \rho(P) \quad \text{для } P \subset \mathfrak{G}, \quad \beta = \max \varphi(P) \quad \text{для } P \subset C.$$

Чтобы доказать, что

$$|w(P)| \leq \max\left(\frac{1}{\lambda} \alpha; \beta\right),$$

достаточно установить эту оценку только для тех точек P_1 , в которых $w(P)$ достигает отрицательного минимума, и P_2 , в которых $w(P)$ достигает положительного максимума.

Рассмотрим же некоторую точку P_1 , в которой $w(P)$ достигает отрицательного минимума. Либо эта точка лежит на границе и тогда

$$|w(P_1)| \leq \beta \leq \max\left(\frac{1}{\lambda} \alpha; \beta\right),$$

либо эта точка лежит внутри области \mathfrak{G} и тогда $\Delta w(P_1) \geq 0$.

Следовательно,

$$\lambda w(P_1) + \rho(P_1) = \Delta w(P_1) \geq 0;$$

но, так как $\lambda > 0$ и $w(P_1) < 0$, то $\rho(P_1) > 0$, и мы получаем, что

$$\lambda |w(P_1)| = -\lambda w(P_1) \leq \rho(P_1) \leq \alpha;$$

откуда

$$|w(P_1)| \leq \frac{1}{\lambda} \alpha \leq \max\left(\frac{1}{\lambda} \alpha; \beta\right),$$

что доказывает теорему и в этом случае.

Для положительного максимума оценка устанавливается аналогично.

Нам остается доказать, что для области \mathfrak{G} уравнение теплопроводности разрешимо не только для функций $\psi(P)$ и $\varphi(P, t)$, удовлетворяющих условию дифференцируемости, наложенному во вспомогательной теореме.

Пусть даны непрерывные функции: $\psi(P)$ на \mathfrak{G} и $\varphi(P, t)$ на C при $t \geq 0$, удовлетворяющие условию $\psi(P) = \varphi(P, 0)$ на C . Нетрудно видеть, что заданные функции можно аппроксимировать равномерно сходящейся последовательностью функций:

$$\begin{aligned}\psi_n(P) &\rightarrow \psi(P), \\ \varphi_n(P, t) &\rightarrow \varphi(P, t),\end{aligned}$$

которые удовлетворяют условиям вспомогательной теоремы, т. е. $\psi_n(P)$ четырежды, а $\varphi_n(P, t)$ дважды по t непрерывно дифференцируемы и

$$\begin{aligned}\psi_n(P) &= \varphi_n(P, 0) \quad (\text{на } C), \\ \Delta\psi_n(P) &= \frac{\partial\varphi_n(P, 0)}{\partial t} \quad (\text{на } C).\end{aligned}$$

Пусть $u_n(P, t)$ — решения уравнений теплопроводности, определенные при помощи функций $\psi_n(P)$ и $\varphi_n(P, t)$. Последовательности $u_n(P, t)$ равномерно сходятся к некоторой функции $u(P, t)$, так как разность

$$|u_n(P, t) - u_m(P, t)|$$

достигает своего максимума либо при $t = 0$, либо на C . Эта функция, как нетрудно видеть, удовлетворяет уравнению теплопроводности и условиям

$$\begin{aligned}u(P, 0) &= \psi(P) \quad (P \in \overline{\mathfrak{G}}), \\ u(P, t) &= \varphi(P, t) \quad (P \in C, t \geq 0),\end{aligned}$$

т. е. область \mathfrak{G} является фундаментальной областью для уравнения теплопроводности.

§ 2

Рассмотрим первую краевую задачу в несколько расширенной форме. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Дана ограниченная область \mathfrak{G} (в пространстве (x, y, z)) с границей C [12] и даны две непрерывные ограниченные функции: $\psi(P)$, определенная для точек $P \in \mathfrak{G}$, и $\varphi(P, t)$, определенная для $P \in C$ и $t > 0$.*

Существует не более одной равномерно ограниченной функции $u(P, t)$, удовлетворяющей уравнению теплопроводности

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

для точек $P \in \mathfrak{G}$ и $t > 0$ и условиям

$$\begin{aligned} u(P, 0) &= \psi(P) && (\text{для } P \in \mathfrak{G}), \\ u(P, t) &= \varphi(P, t) && (\text{для } P \in C, t > 0) \text{ [13]}. \end{aligned}$$

Отметим, что условия ограниченности функции $u(P, t)$ отбросить нельзя, как это легко показать на примерах [14].

Наше доказательство базируется на следующем, хорошо известном для уравнения теплопроводности принципе.

Пусть функция $u(P, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности для точек P области \mathfrak{G} и $t > t_1$; тогда

1. Если

$$\begin{aligned} \bar{m} &\geq \overline{u(P, 0)} && (\text{для всех } P \in \overline{\mathfrak{G}}), \\ \bar{m} &\geq \overline{u(P, t)} && (\text{для всех } P \in C, t \geq t_1), \end{aligned}$$

то

$$\bar{m} \geq \overline{u(P, t)} \quad (\text{для всех } P \in \mathfrak{G}, t > t_1).$$

2. Если

$$\begin{aligned} \underline{m} &\leq \underline{u(P, 0)} && (\text{для всех } P \in \overline{\mathfrak{G}}), \\ \underline{m} &\leq \underline{u(P, t)} && (\text{для всех } P \in C, t \geq t_1), \end{aligned}$$

то

$$\underline{m} \leq \underline{u(P, t)} \quad \text{для всех } P \in \mathfrak{G}, t > t_1 \text{ [15]}.$$

Отсюда непосредственно следует, что если мы имеем две функции $u_1(P, t)$ и $u_2(P, t)$ удовлетворяющие уравнению теплопроводности внутри области \mathfrak{G} , $t > t_1$, и

$$\begin{aligned} \overline{u_1(P, 0)} &\leq \underline{u_2(P, 0)} && (\text{для } P \in \overline{\mathfrak{G}}), \\ \overline{u_1(P, t)} &\leq \underline{u_2(P, t)} && (\text{для } P \in C, t \geq t_1), \end{aligned}$$

то

$$u_1(P, t) \leq u_2(P, t)$$

для всех $P \in \mathfrak{G}$, $t > t_1$.

Докажем теперь следующую основную теорему.

Теорема. Если $u_1(P, t)$ и $u_2(P, t)$ — (равномерно) ограниченные функции, удовлетворяющие уравнению теплопроводности для точек области \mathfrak{G} при $t > t_0$, то из неравенств:

$$\overline{u_1(P, t_0)} \leq \underline{u_2(P, t_0)} \quad (\text{для } P \subset \mathfrak{G}),$$

$$\overline{u_1(P, t)} \leq \underline{u_2(P, t)} \quad (\text{для } P \subset C, t > t_0)$$

следует

$$u_1(P, t) \leq u_2(P, t)$$

для всех точек $P \subset \mathfrak{G}$ при $t > t_0$.

Рассмотрим разность

$$u_1(P, t) - u_2(P, t).$$

Эта функция удовлетворяет уравнению теплопроводности для точек $P \subset \mathfrak{G}$ при $t > t_0$,

$$\overline{u(P, t)} \leq 0$$

для $t = t_0$, $P \subset \mathfrak{G}$ и $P \subset C$, $t > t_0$ и, кроме того, эта функция равномерно ограничена. Пусть

$$|u(P, t)| < M.$$

Функция $u(P, t_0 + \eta)$ (η — малое число) определена для точек $P \subset \mathfrak{G}$, причем в точках $P \subset C$ функция $u(P, t_0 + \eta) \leq 0$. Кроме того, она обладает следующим свойством: каково бы ни было ε и область $\mathfrak{G}_1: \overline{\mathfrak{G}_1} = \mathfrak{G}_1 + C_1 \subset \mathfrak{G}$, найдется такое η_0 , что для всякого $\eta < \eta_0$

$$u(P, t_0 + \eta) < \varepsilon \quad (P \subset \overline{\mathfrak{G}_1}).$$

Введем вспомогательную функцию $\psi(P)$, полагая

$$\psi(P) = \varepsilon \quad (\text{для } P \subset \overline{\mathfrak{G}_1}),$$

$$\psi(P) = M \quad (\text{для } P \subset \mathfrak{G} - \overline{\mathfrak{G}_1}),$$

$$\psi(P) = 0 \quad (\text{для } P \notin \mathfrak{G}).$$

Очевидно, что

$$\overline{u(P, t_0 + \eta)} \leq \psi(P) \quad (\text{для } P \subset \overline{\mathfrak{G}}).$$

Интеграл Poisson'a

$$\Pi_{\eta}(P, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^3 \iiint_{\mathfrak{G}} \left[\frac{1}{\sqrt{t - (t_0 + \eta)}}\right]^3 \exp\left[\frac{r_{PP'}^2}{4(t - (t_0 + \eta))}\right] \psi(P') d\omega',$$

распространенный на все пространство, где $r_{PP'}$ — расстояние между фиксированной точкой P и переменной точкой P' , представляет, как известно, решение уравнения теплопроводности для $t \geq t_0 + \eta$

$$\underline{\Pi_{\eta}(P, t_0 + \eta)} = \psi(P) \geq \overline{u(P, t_0 + \eta)} \quad (P \in \mathfrak{G}).$$

Очевидно также, что

$$\Pi_{\eta}(P, t) \geq 0 \geq \overline{u(P, t)} \quad (P \in C, t \geq t_0 + \eta),$$

откуда следует, что вообще

$$\Pi_{\eta}(P, t) \geq u(P, t) \quad (P \in \mathfrak{G}, t \geq t_0 + \eta).$$

Таким образом

$$\begin{aligned} u(P, t) &\leq \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^3 \left\{ \varepsilon \iiint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{4(t - (t_0 + \eta))}\right] \frac{d\xi d\eta d\zeta}{(\sqrt{t - (t_0 + \eta)})^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M}{(\sqrt{t - (t_0 + \eta)})^3} \text{mes}(\mathfrak{G} - \overline{\mathfrak{G}}_1) \right\} = \\ &= \varepsilon + \frac{M}{(\sqrt{t - (t_0 + \eta)})^3} \text{mes}(\mathfrak{G} - \overline{\mathfrak{G}}_1) \quad (\text{для } t > t_0 + \eta), \end{aligned}$$

причем эта оценка имеет место при любом ε и области $\overline{\mathfrak{G}}_1$, если только η достаточно мало. Отсюда получаем, что

$$u(P, t) \leq 0 \quad \text{или} \quad u_1(P, t) \leq u_2(P, t),$$

что и требовалось доказать.

Теорема единственности для первой краевой задачи является непосредственным следствием доказанной теоремы.

§ 3

Пусть нам дана некоторая область \mathfrak{G} , являющаяся фундаментальной для уравнения теплопроводности. Иными словами, мы предполагаем, что для любых непрерывных функций: $\psi(P)$, заданной на $\overline{\mathfrak{G}}$, и $\varphi(P, t)$, заданной на C , границе области \mathfrak{G} , при $t \geq 0$, и совпадающих на C , при $t = 0$: $\psi(P) = \varphi(P, 0)$, для $P \subset C$ существует непрерывная функция $u(P, t)$, удовлетворяющая уравнению теплопроводности

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

внутри области при $t > 0$ и условиям

$$\begin{aligned} u(P, 0) &= \psi(P) & (P \subset \overline{\mathfrak{G}}), \\ u(P, t) &= \varphi(P, t) & (P \subset C, t \geq 0). \end{aligned}$$

Нашей задачей является построить функцию Грина [16] для области \mathfrak{G} и установить некоторые ее свойства.

Рассмотрим функцию

$$U(P, t; P', \tau) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right)^3 \exp \left[-\frac{r_{PP'}}{4(t-\tau)} \right],$$

где $r_{PP'}$ — расстояние между точками $P(x, y, z)$ и $P'(\xi, \eta, \zeta)$, являющуюся элементарным решением для уравнения теплопроводности. Очевидно, что эта функция зависит от переменных P, P' и $\alpha = t - \tau$ и удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным $P(x, y, z)$ и $\alpha = t - \tau$ или $P'(\xi, \eta, \zeta)$ и $\alpha = t - \tau$.

Назовем функцией Грина функцию

$$\begin{aligned} G(P, t; P', \tau) &= U(P, t; P', \tau) - u(P, t; P', \tau) & (\text{для } t \geq \tau), \\ G(P, t; P', \tau) &= 0 & (\text{для } t < \tau), \end{aligned}$$

где $u(P, t; P', \tau)$ является решением уравнения теплопроводности по переменным P и t при фиксированных $P' \subset \mathfrak{G}$ и τ , для которого

$$\begin{aligned} u(P, t; P', \tau) &= 0 & (\text{для } P \subset \overline{\mathfrak{G}}), \\ u(P, t; P', \tau) &= U(P, t; P', \tau) & (\text{для } P \subset C, t \geq \tau). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $u(P, t; P', \tau)$ зависит только от трех переменных P, P' и $\alpha = t - \tau$; следовательно, функция Грина зависит от тех же переменных:

$$G(P, t; P', \tau) = G(P, P'; \alpha) = U(P, P'; \alpha) - u(P, P'; \alpha) \quad (\alpha = t - \tau).$$

Отметим, что так как решение уравнения теплопроводности не может иметь отрицательного минимума внутри области, то, во-первых,

$$0 \leq G(P, t; P', \tau),$$

во-вторых, так как $U(P, t; P', \tau)$ неотрицательна, то и $u(P, t; P', \tau)$ обладает этим же свойством, откуда следует, что

$$G(P, t; P', \tau) \leq U(P, t; P', \tau).$$

Покажем, что функция

$$\Pi(P', \alpha) = \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, P'; \alpha) \psi(P) d\omega,$$

где $\psi(P)$ — некоторая непрерывная ограниченная функция, заданная на \mathfrak{G} , такова, что

$$\Pi(P', \alpha) = \psi(P') \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Действительно,

$$\Pi(P', \alpha) = \iiint_{\mathfrak{G}} U(P, P'; \alpha) \psi(P) d\omega + \iiint_{\mathfrak{G}} u(P, P'; \alpha) \psi(P) d\omega;$$

первое слагаемое, как известно, при $\alpha \rightarrow 0$ стремится к $\psi(P')$, а второе, как нетрудно видеть, при фиксированном P' и $\alpha \rightarrow 0$ равномерно стремится к нулю, так как

$$\max_{P \in \mathfrak{G}} u(P, P'; \alpha) = \max_{P \in C} U(P, P'; \alpha) \quad (P' \in \mathfrak{G});$$

откуда и следует наше утверждение.

Покажем, что существуют производные функции $G(P, P'; \alpha)$ по переменным ξ, η, ζ любого порядка и что эти производные являются непрерывными функциями своих аргументов, если $P'(\xi, \eta, \zeta) \notin C$ и $\alpha > 0$ [17].

Действительно, если точка P_1 имеет координаты $\xi + \Delta\xi, \eta, \zeta$, то производная $\frac{\partial u}{\partial \xi}(P, P'; \alpha)$ является пределом разностного отношения

$$\frac{u(P, P'_1; \alpha) - u(P, P'; \alpha)}{\Delta\xi},$$

которое является решением уравнения теплопроводности по переменным $P(x, y, z)$, α и обращается в нуль при $\alpha = 0$ и в

$$\frac{U(P, P'_1; \alpha) - U(P, P'; \alpha)}{\Delta\xi}$$

на C . Отсюда следует, что предел разностного отношения по ξ от функции u существует и является непрерывной функцией $u_\xi(P, P'; \alpha)$, удовлетворяющей уравнению теплопроводности по P , α и обращающейся в

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}(P, P'; \alpha)$$

на C ; следовательно, $\frac{\partial G}{\partial \xi}(P, P'; \alpha)$ существует и непрерывна по P, P' и α , если $P' \notin C$ и $\alpha > 0$, причем по P эта функция непрерывна, включая точки C .

Существование других производных, а также $\frac{\partial G}{\partial t}$, доказывается аналогично.

Докажем симметрию функции Грина

$$G(P_1, P_2; \alpha) = G(P_2, P_1; \alpha)$$

или

$$G(P_1, t; P_2, \tau) = G(P_2, t; P_1, \tau).$$

Эта формула легко доказывается для функций Грина, соответствующих областям, ограниченными поверхностями с конечной кривизной.

Для поверхностей такого типа имеет место формула

$$\begin{aligned}
 & \int_{\varepsilon}^{\alpha_0 - \varepsilon} d\alpha \left\{ \iiint_{\mathfrak{G}} \frac{\partial}{\partial \alpha} [G(P, P_1; \alpha) \cdot G(P, P_2; \alpha_0 - \alpha)] d\omega \right\} = \\
 & = \int_{\varepsilon}^{\alpha_0 - \varepsilon} d\alpha \left\{ \iiint_{\mathfrak{G}} \frac{\partial}{\partial \alpha} [G(P, P_2; \alpha_0 - \alpha) \cdot \Delta G(P, P_1; \alpha) - \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - G(P, P_1; \alpha) \cdot \Delta G(P, P_2; \alpha_0 - \alpha)] d\omega \right\} = \\
 & = \int_{\varepsilon}^{\alpha_0 - \varepsilon} d\alpha \left\{ \iint_C [G(P, P_2; \alpha_0 - \alpha) \cdot \frac{\partial G(P, P_1; \alpha)}{\partial n_P} - \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - G(P, P_1; \alpha) \cdot \frac{\partial G(P, P_2; \alpha_0 - \alpha)}{\partial n_P}] d\sigma \right\},
 \end{aligned}$$

так как функция Грина имеет в этом случае все производные, требуемые этой формулой. Меняя в первом интеграле порядок интегрирования, получаем

$$\iiint_{\mathfrak{G}} G(P, P_1; \alpha) \cdot G(P, P_2; \alpha_0 - \alpha) d\omega \Big|_{\varepsilon}^{\alpha_0 - \varepsilon} = 0.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, в силу отмеченного свойства функций $\Pi(P', \alpha)$ получаем, что

$$G(P_2, P_1; \alpha) = G(P_1, P_2; \alpha).$$

Если же область \mathfrak{G} ограничена множеством C , не являющимся поверхностью конечной кривизны, то аппроксимируем область \mathfrak{G} областями \mathfrak{G}_n , ограниченными поверхностями конечной кривизны S_n таким образом, что расстояние любой точки $P \subset S_n$ от C не превосходит числа δ_n ($\delta_n \rightarrow 0$).

Пусть

$$G_n(P, P'; \alpha) = U(P, P'; \alpha) - u_n(P, P'; \alpha)$$

функции Грина для этих областей. Докажем, что

$$G(P, P'; \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(P, P'; \alpha),$$

откуда и будет следовать симметрия функции Грина в общем случае. Если точка P' фиксирована ($P' \subset \mathfrak{G}$), то $G(P, P'; \alpha)$ является непрерывной функцией точки P на $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} + C$, причем $G(P, P'; \alpha) = 0$ для $P \subset C$.

Пусть задано ε ; тогда, при достаточно большом n , $G(P, P'; \alpha) < \varepsilon$ (для $P \subset \mathfrak{G} - \mathfrak{G}_n$, в частности, для $P' \subset S_n$) и, следовательно,

$$0 \leq G(P, P'; \alpha) - G_n(P, P'; \alpha) = u(P, P'; \alpha) - u_n(P, P'; \alpha) < \varepsilon$$

всюду внутри \mathfrak{G}_n , так как это неравенство выполняется на S_n , что и доказывает наше утверждение.

Из доказанной симметрии функции Грина получаем, что она удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным P', α и что производные ее по x, y, z существуют во всякой точке $P \subset \mathfrak{G}$, $t > 0$ и являются непрерывными функциями для всяких $P \subset \mathfrak{G}$, $P' \subset \overline{\mathfrak{G}}$ и $\alpha > 0$.

Отсюда следует, что

$$\Pi(P, \alpha) = \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, P'; \alpha) \psi(P') d\omega$$

является функцией, дифференцируемой под знаком интеграла по x, y, z, α для $P \subset \mathfrak{G}$, $\alpha > 0$, что эта функция удовлетворяет уравнению теплопроводности и условию

$$\Pi(P, \alpha) = \psi(P) \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Нашей ближайшей задачей теперь является доказать непрерывность функции Грина, когда обе точки P и P' приближаются к C . Функция Грина была определена, когда $P \subset \overline{\mathfrak{G}}$, а $P' \subset \mathfrak{G}$. Положим

$$G(P_0, P'_0; \alpha) = 0 \quad (\text{когда } P_0, P'_0 \subset C)$$

и докажем, что $G(P, P'; \alpha)$ непрерывна при $P = P_0$ и $P' = P'_0$, если $\alpha \geq \alpha_0 > 0$.

Для этого надо для любого ε доказать существование такого $\delta(\varepsilon)$, что если

$$\overline{PP_0} < \delta; \quad \overline{P'P'_0} < \delta, \quad |\alpha - \alpha_0| < \delta,$$

то

$$|G(P, P'; \alpha) - G(P_0, P'_0; \alpha)| = |G(P, P'; \alpha)| < \varepsilon.$$

Как было отмечено,

$$G(P, P'; \alpha) \leq U(P, P'; \alpha) \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \right)^3.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $v(P, \alpha)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности для $P \subset \mathfrak{G}$, $\alpha > \frac{\alpha_0}{3}$ и условиям

$$v\left(P, \frac{\alpha_0}{3}\right) = N = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\frac{\alpha_0}{3}}} \right)^3 \quad (P \subset \overline{\mathfrak{G}}),$$

$$v(P, t) = \varphi(P, t) \quad \left(P \subset C, t \geq \frac{\alpha_0}{3} \right),$$

где функция $\varphi(P, t)$ — какая угодно непрерывная функция, удовлетворяющая требованиям

$$\varphi\left(P, \frac{\alpha_0}{3}\right) = N,$$

$$\varphi(P, t) = 0 \quad \left(\text{для } t \geq 2\frac{\alpha_0}{3} \right),$$

$$N \geq \varphi(P, t) \geq 0 \quad \left(\text{для } \frac{\alpha_0}{3} \leq t \leq 2\frac{\alpha_0}{3} \right).$$

Такая функция $v(P, t)$ существует в силу предположений, сделанных относительно области \mathfrak{G} .

Нетрудно видеть, что при любом положении точки P'

$$0 \leq G(P, P'; \alpha) \leq v(P, \alpha) \quad \left(\text{при } \alpha > \frac{\alpha_0}{3} \right),$$

так как функция Грина удовлетворяет уравнению теплопроводности и, кроме того, имеют место следующие неравенства:

$$G\left(P, P'; \frac{\alpha_0}{3}\right) \leq N = v\left(P, \frac{\alpha_0}{3}\right) \quad (P \subset \overline{\mathfrak{G}}),$$

$$G(P, P'; \alpha) \leq v(P, \alpha) \quad \left(P \subset C, \alpha \geq \frac{\alpha_0}{3} \right).$$

Далее, так как $v(P, \alpha) = 0$ для $P \subset C$ и $\alpha > 2\frac{\alpha_0}{3}$, то для любого ε существует такое $\delta(\varepsilon)$, что если $\rho(P, C)$, расстояние точки P от C , меньше $\delta(\varepsilon)$, то

$$0 \leq v(P, \alpha) \leq \varepsilon.$$

Таким образом мы доказали, что существует такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$G(P, P'; \alpha) \leq \varepsilon,$$

если

$$\rho(P, C) < \delta, \quad \alpha > 2 \frac{\alpha_0}{3}, \quad P' \subset \bar{\mathfrak{G}},$$

чем и доказана непрерывность функции $G(P, P'; \alpha)$ в точках P_0, P'_0 , принадлежащих C . Отсюда следует, что $G(P, P'; \alpha)$ является равномерно непрерывной функцией своих аргументов при $\alpha \geq \alpha_1 > 0$.

Рассмотрим определенную нами ранее функцию $\Pi(P, \alpha)$. Из только что доказанного непосредственно следует, что

$$\Pi(P, \alpha) = 0 \quad (\text{для } P \subset C, \alpha > 0).$$

Сопоставляя результаты, установленные нами относительно функции $\Pi(P, \alpha)$, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Для любой ограниченной функции $\psi(P)$, определенной и непрерывной на \mathfrak{G} , функция*

$$\Pi(P, \alpha) = \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, P'; \alpha) \psi(P) d\omega \quad (\alpha = t - \tau)$$

является ограниченной функцией, удовлетворяющей уравнению теплопроводности для $P \subset \mathfrak{G}$ и $\alpha > 0$ и условиям

$$\Pi(P, 0) = \psi(P) \quad (P \subset \mathfrak{G}),$$

$$\Pi(P, \alpha) = 0 \quad (P \subset C, \alpha = t - \tau > 0).$$

Из доказанной теоремы легко заключить, что если \mathfrak{G} — фундаментальная область, т. е. для нее разрешима первая краевая задача для непрерывных функций $\psi(P)$ ($P \subset \bar{\mathfrak{G}}$) и $\varphi(P, t)$ ($P \subset C, t \geq 0$), для которых $\psi(P) = \varphi(P, 0)$, то для этой области разрешима краевая задача в расширенной форме, которая была сформулирована в § 2.

Кроме того, из доказанной теоремы непосредственно вытекает следующая формула для функций Грина:

$$G(P, P'; \alpha_1 + \alpha_2) = \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, P_1; \alpha_1) \cdot G(P_1, P'; \alpha_2) d\omega_1$$

или

$$G(P, t; P', \tau) = \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, t; P_1, t_1) G(P_1, t_1; P', \tau) d\omega_1.$$

Докажем еще следующую теорему.

Теорема 2. Если ограниченная функция $\pi(P, t)$, определенная и непрерывная для $P \in \mathfrak{G}$, $t > t_0$, удовлетворяет во всякой точке условию Hölder'a, то

$$V(P, t) = - \int_{t_0}^t d\tau \left\{ \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, P'; t - \tau) \pi(P', \tau) d\omega' \right\}$$

является непрерывной функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = \pi(P, t)$$

для любых $P \in \mathfrak{G}$ и $t > t_0$ и условиям

$$V(P, t_0) = 0 \quad (P \in \overline{\mathfrak{G}}),$$

$$V(P, t) = 0 \quad (P \in C, t \geq 0).$$

Положим

$$V(P, t) = V_1(P, t) + V_2(P, t) =$$

$$= - \int_{t_0}^t d\tau \left\{ \iiint_{\mathfrak{G}} U(P, P'; t - \tau) \pi(P', \tau) d\omega' \right\} + \int_{t_0}^t d\tau \left\{ \iiint_{\mathfrak{G}} u(P, P'; t - \tau) \pi(P', \tau) d\omega' \right\}.$$

В силу доказанных свойств производных функций $u(P, P'; \alpha)$ непосредственно получаем, что

$$\Delta V_2 - \frac{\partial V_2}{\partial t} = 0.$$

Функция же $V_1(P, t)$ как известно [18], удовлетворяет уравнению

$$\Delta V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial t} = \pi(P, t),$$

что и доказывает, что $V(P, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta V - \frac{\partial V}{\partial t} = \pi(P, t).$$

Чтобы убедиться в том, что выполнено начальное условие, заметим, что

$$0 \leq G(P, P'; t - \tau) \leq U(P, P'; t - \tau) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi(t - \tau)}} \right)^3 \exp \left[-\frac{r_{PP'}}{4(t - \tau)} \right],$$

откуда следует, обозначая через M максимум функции $\pi(P, t)$, что

$$\begin{aligned} |V(P, t)| &\leq \\ &\leq M \cdot \int_{t_0}^t d\tau \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{4(t - \tau)} \right] \frac{d\xi d\eta d\zeta}{(2\sqrt{t - \tau})^3} \right\} = \\ &= M \cdot \int_{t_0}^t d\tau = M(t - t_0). \end{aligned}$$

Из этой оценки получаем, что при любом $P \subset \overline{\mathfrak{G}}$

$$V(P, t_0) = 0.$$

Чтобы доказать, что краевое условие удовлетворено, положим

$$\begin{aligned} V(P, t) &= \overline{V}(P, t) + \overline{\overline{V}}(P, t) = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} d\tau \left\{ \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, P'; t - \tau) \pi(P', \tau) d\omega' \right\} - \\ &\quad - \int_{t_1}^t d\tau \left\{ \iiint_{\mathfrak{G}} G(P, P'; t - \tau) \pi(P', \tau) d\omega' \right\}, \end{aligned}$$

где t_1 — любое число, $t_0 \leq t_1 < t$. Из доказанной ранее равномерной непрерывности функции $G(P, P'; \alpha)$ при $\alpha \geq \alpha_1 > 0$ непосредственно следует, что $\overline{V}(P, t) = 0$ для $P \subset C$.

Далее, пользуясь только что приведенной оценкой, получаем, что

$$|\overline{\overline{V}}(P, t)| < M(t - t_1),$$

а следовательно, и

$$|V(P, t)| \leq M(t - t_1) \quad (P \subset C)$$

при любом $t_1: t_0 \leq t_1 < t$, откуда и вытекает, что

$$V(P, t) = 0 \quad (\text{для } P \in C),$$

чем и доказывается теорема.

Оканчивая этот параграф, укажем соотношение, имеющее место между функциями Грина для уравнения Лапласа и уравнения теплопроводности.

Теорема 3. *Функция Грина для уравнения Лапласа $G(P, P')$ и функция Грина для уравнения теплопроводности $G(P', P; t - \tau)$ связаны следующим соотношением:*

$$G(P, P') = \int_{\tau}^{\infty} G(P, P'; t - \tau) dt = \int_0^{\infty} G(P, P'; \alpha) d\alpha.$$

Отметим, во-первых, что

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\infty} U(P, P'; t - \tau) dt &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^3 \int_{\tau}^{\infty} \exp \left[-\frac{r_{PP'}}{4(t - \tau)} \right] \frac{dt}{(2\sqrt{t - \tau})^3} = \\ &= \frac{1}{4\pi r_{PP'}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{r^2}{4a} \right) \frac{r da}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi r_{PP'}}. \end{aligned}$$

Функция Грина для уравнения Лапласа равна

$$G(P, P') = \frac{1}{4\pi r_{PP'}} - g(P, P').$$

Функция Грина для уравнения теплопроводности равна

$$G(P, P'; t - \tau) = U(P, P'; t - \tau) - u(P, P'; t - \tau),$$

и, как было отмечено,

$$\int_{\tau}^{\infty} U(P, P'; t - \tau) dt = \frac{1}{4\pi r_{PP'}};$$

таким образом остается доказать, что

$$\int_{\tau}^{\infty} u(P, P'; t - \tau) dt = g(P, P'),$$

иными словами, что существует

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\tau}^T u(P, P'; t - \tau) dt$$

и является гармонической функцией, удовлетворяющей условию

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\tau}^T u(P, P'; t - \tau) dt = \frac{1}{4\pi r_{PP'}} \quad (\text{для } P \subset C).$$

Рассмотрим функцию

$$v(P, P'; T - \tau) = \int_{\tau}^T u(P, P'; t - \tau) dt = \int_0^{T-\tau} u(P, P'; \alpha) d\alpha.$$

В силу доказанных свойств непрерывности производных функций $u(P, P'; \alpha)$ нетрудно видеть, что производные функции v можно находить при помощи дифференцирования под знаком интеграла.

Таким образом

$$\begin{aligned} \Delta_P v - \frac{\partial v}{\partial T} &= \int_0^{T-\tau} \Delta_P u(P, P'; \alpha) d\alpha - u(P, P'; T - \tau) = \\ &= \int_0^{T-\tau} \left[\Delta_P u(P, P'; \alpha) - \frac{\partial}{\partial \alpha} u(P, P'; \alpha) \right] d\alpha, \end{aligned}$$

т. е. функция v удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Далее, очевидно, что

$$v(P, P'; 0) = 0$$

и что на C

$$\begin{aligned} v(P, P'; T - \tau) &= \int_{\tau}^T u(P, P'; t - \tau) dt = \\ &= \int_{\tau}^T U(P, P'; t - \tau) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi r_{PP'}}. \end{aligned}$$

Отсюда уже легко заключить, что существует предел функции $v(P, P'; T - \tau)$ при $T \rightarrow \infty$ и что он совпадает с функцией $g(P, P')$, чем и доказано, что

$$G(P, P') = \int_{\tau}^{\infty} G(P, P'; t - \tau) dt = \int_0^{\infty} G(P, P'; \alpha) d\alpha.$$

§ 4

1. Рассмотрим некоторое тело T 3-мерного пространства, которое мы не предполагаем связным, ограниченное поверхностью S . Мы будем предполагать, что поверхность S является поверхностью типа Ляпунова [19], т. е.:

1. В каждой точке $P \in S$ существует нормаль.

2. Направление нормали меняется непрерывно при непрерывном движении P , и, более того,

$$\theta_{PP'} \leq E \cdot r_{PP'}^{\lambda},$$

где $\theta_{PP'}$ — угол между нормальными в точках P, P' , $r_{PP'}$ — расстояние между ними, а λ и E — константы, причем $0 < \lambda \leq 1$.

3. Существует такое число d , что всякая прямая, параллельная нормали в точке P , встречает не более одного раза кусок поверхности S , содержащийся в сфере радиуса d вокруг P .

Отметим, что, если обозначить через φ угол между $\overrightarrow{P'P}$ и внутренней нормалью в точке P' , $n(P')$, то

$$\cos \varphi \leq b \cdot r_{PP'}^{\lambda}.$$

Будем обозначать через $\omega_P(r)$ совокупность точек P' поверхности S , для которых

$$r_{PP'} \leq r.$$

Очевидно, что $\omega_P(r)$ есть замкнутое множество, лежащее на S , и мы можем говорить о площади $\omega_P(r)$, которую будем обозначать через $\Omega_P(r)$. Докажем, что существуют такие числа a и A , что

$$ar^2 \leq \Omega_P(r) \leq Ar^2.$$

Действительно, если $r < d$ и если для точек P' , лежащих на $\omega_P(r)$,

$$\cos(n(P), n(P')) > \frac{1}{2},$$

то, беря касательную плоскость в точке P , получаем

$$\Omega_P(r) = \iint_{\omega_P(r)} d\sigma \leq \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\rho d\rho \cdot d\varphi}{\cos(n(P), n(P'))} \leq 2\pi r^2,$$

так как $\omega_P(r)$ проектируется на касательную плоскость в область $\overline{\omega_P(r)}$,

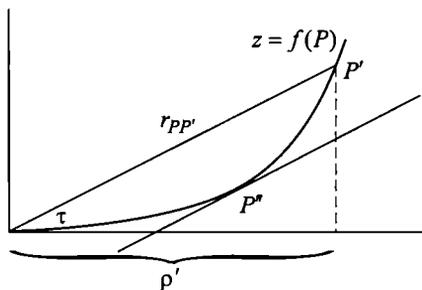


Рис. 1

целиком лежащую в круге радиуса r . Далее, возьмем некоторое сечение, проходящее через нормаль в точке P . Пусть $z = f(\rho)$ — уравнение линии пересечения этой плоскости и поверхности S . Очевидно, что хорда PP' образует с осью ρ угол τ , равный углу, образованному касательной к кривой $z = f(\rho)$ в некоторой точке P'' , и что этот угол меньше угла $\theta_{PP''}$, т. е.

$$r_{PP'}^2 = (\rho')^2(1 + \operatorname{tg}^2 \tau) \leq (\rho')^2(1 + \operatorname{tg}^2(Er_{PP''}^\lambda)) < 2(\rho')^2,$$

если r таково, что

$$\operatorname{tg} Er^\lambda < 1.$$

Таким образом мы получаем, что $\overline{\omega_P(r)}$ покрывает на касательной плоскости в точке P круг радиуса $\rho_0 = \frac{r}{\sqrt{2}}$; откуда,

$$\Omega(r) = \iint_{\omega_P(r)} d\sigma = \iint_{\omega_P(r)} \frac{\rho d\varphi d\psi}{\cos \theta_{PP'}} \geq \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \rho d\varphi d\psi = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \frac{r^2}{2} = \frac{\pi}{2} r^2.$$

Итак, для достаточно малых r существуют такие a и A , что

$$ar^2 < \Omega(r) < Ar^2,$$

и так как $\Omega(r)$ величина, ограниченная при любых r , то возможно выбрать a и A так, что это неравенство будет выполнено для любых r ($0 \leq r \leq R$), где R — диаметр нашей области, причем a и A можно считать не зависящими от P .

Заметим, что функция $\Omega_P(r)$ является не убывающей, полунепрерывной (справа) функцией r . В дальнейшем нам придется часто оценивать интегралы вида

$$I = \iint_{(S)} F(r_{PP'}) d\sigma,$$

где F — непрерывная функция $r_{PP'}$ расстояния P' от некоторой точки P . Нетрудно видеть, что

$$I = \int_0^{\infty} F(r) d\Omega(r),$$

где интеграл берется в смысле Stieltjes'a и интегрирующей функцией является $\Omega_P(r)$.

Обозначим через $r = r(\Omega)$ функцию, обратную $\Omega = \Omega_P(r)$; тогда нетрудно видеть, что, принимая Ω за независимое переменное, будем иметь

$$I = \int_0^S F(r(\Omega)) d\Omega,$$

где S есть площадь всей поверхности (S) . В частности, если $F(r)$ является положительной убывающей функцией, то

$$|I| \leq \int_0^S F\left(\sqrt{\frac{\Omega}{A}}\right) d\Omega.$$

2. Будем обозначать через

$$U(P, t; P', \tau) = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right]^3 \exp \left[-\frac{r_{PP'}^2}{4(t-\tau)} \right]$$

и рассмотрим потенциалы, аналогичные потенциалам простого и двойного слоев

$$V(P, t) = \int_0^t d\tau \left\{ \iint_{(S)} U(P, t; P', \tau) \nu(P', \tau) d\sigma' \right\},$$

$$W(P, t) = \int_0^t d\tau \left\{ \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P, t; P', \tau) \mu(P', \tau) d\sigma' \right\}.$$

Очевидно, что они представляют, решения уравнения теплопроводности, и, кроме того, нетрудно доказать следующие два свойства этих потенциалов, аналогичные свойствам обыкновенных ньютоновских потенциалов.

С в о й с т в о 1. Функция $V(P, t)$ является всюду непрерывной функцией своих аргументов, если $\nu(P, t)$ ограничена.

Действительно, рассмотрим какое-нибудь число $t_1 < t$ и положим

$$V(P, t) = \int_0^{t_1} d\tau \left\{ \iint_{(S)} U(P, t; P', \tau) \nu(P', \tau) d\sigma' \right\} + \int_{t_1}^t d\tau \left\{ \iint_{(S)} U(P, t; P', \tau) \nu(P', \tau) d\sigma' \right\} = V_1(P, t) + V_2.$$

Первое слагаемое непрерывно в точке (P, t) . Оценим второе слагаемое. Возьмем на поверхности (S) точку P_1 , ближайшую к P (или одну из них, если их несколько). Очевидно, что

$$r_{P_1 P'} \leq r_{P_1 P} + r_{PP'} \leq 2r_{PP'},$$

так как, по условию, $r_{PP'} \geq r_{PP_1}$.

Пусть $|\nu| < M$; тогда

$$\begin{aligned}
 V_2(P, t) &\leq M \int_{t_1}^t d\tau \iint_{(S)} \exp \left[- \left(\frac{1}{2} r_{P_1 P'} \right)^2 \cdot \frac{1}{4(t-\tau)} \right] \frac{d\sigma'}{(2\sqrt{\pi}(t-\tau))^3} \leq \\
 &\leq M \int_{t_1}^t d\tau \int_0^S \exp \left[- \frac{\Omega}{16A(t-\tau)} \right] \frac{d\Omega}{(2\sqrt{\pi}(t-\tau))^3} \leq \\
 &\leq \frac{2AM}{(\sqrt{\pi})^3} \int_{t_1}^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^S \exp \left[- \frac{\Omega}{16A(t-\tau)} \right] \frac{d\Omega}{16A(t-\tau)} \leq \\
 &\leq \frac{2AM}{(\sqrt{\pi})^3} \int_{t_1}^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^\infty \exp(-z) dz = \frac{4AM}{(\sqrt{\pi})^3} \sqrt{t-t_1},
 \end{aligned}$$

где новое переменное $\Omega = \Omega_{P_1}(r)$.

Отсюда непосредственно следует утверждаемая непрерывность.

С в о й с т в о 2. Функция $W(P, t)$ разрывна на (S) , причем имеют место следующие формулы:

$$W_i(P_0, t) = \lim_{P_i \rightarrow P_0} W(P_i, t) = W(P_0, t) + \frac{1}{2} \mu(P_0, t),$$

$$W_e(P_0, t) = \lim_{P_e \rightarrow P_0} W(P_e, t) = W(P_0, t) - \frac{1}{2} \mu(P_0, t),$$

если $\mu(P, t)$ — непрерывная функция, где P_0 — точка поверхности (S) , P_i лежит внутри, а P_e вне области.

Доказательство этой формулы мы сведем к аналогичным и хорошо известным формулам для ньютоновского потенциала.

Положим

$$\begin{aligned}
 W(P, t) &= I(P, t) + W^{(0)}(P, t) = \\
 &= \int_0^t d\tau \left\{ \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P, t; P', \tau) [\mu(P', \tau) - \mu(P', t)] d\sigma' \right\} + \\
 &\quad + \iint_{(S)} \mu(P', t) \cdot \left\{ \int_0^t \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P, t; P', \tau) d\tau \right\} d\sigma'.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 W^{(0)}(P, t) &= \iint_{(S)} \mu(P', t) \left\{ \int_0^t \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P, t; P', \tau) d\tau \right\} d\sigma' = \\
 &= \iint_{(S)} \mu(P', t) \left\{ \int_0^t \exp \left[-\frac{r_{PP'}^2}{4(t-\tau)} \right] \frac{r_{PP'} \cos \varphi}{2(t-\tau)} \frac{d\tau}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^3} \right\} d\sigma'.
 \end{aligned}$$

Последний интеграл легко вычисляется. Полагая вместо τ новую переменную равной

$$z = \frac{r_{PP'}}{2\sqrt{t-\tau}}; \quad dz = \frac{r_{PP'} d\tau}{4(\sqrt{t-\tau})^3},$$

получаем

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \exp \left[-\frac{r_{PP'}^2}{4(t-\tau)} \right] \cdot \frac{r_{PP'} \cos \varphi}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^3} \frac{d\tau}{2(t-\tau)} = \\
 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r_{PP'}^2} \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{r_{PP'}}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \exp(-z^2) z^2 dz.
 \end{aligned}$$

Таким образом

$$W^{(0)}(P, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} \frac{\cos \varphi}{r_{PP'}^2} \bar{\mu} d\sigma,$$

где

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}(P, P'; t) = \mu(P', t) \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{r_{PP'}}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \exp(-z^2) z^2 dz, \quad [22]$$

причем разрывы этого интеграла хорошо известны.

Итак,

$$\begin{aligned} W_i^{(0)}(P_0, t) &= W^{(0)}(P_0, t) + \frac{1}{2} \mu(P_0, t) = \\ &= \int_0^t d\tau \left\{ \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P_0, t; P', \tau) \mu(P', t) d\sigma' \right\} + \frac{1}{2} \mu(P_0, t), \end{aligned}$$

$$W_i^{(0)}(P_0, t) = W^{(0)}(P_0, t) - \frac{1}{2} \mu(P_0, t),$$

так как $\bar{\mu}(P_0, P_0; t) = \mu(P_0, t)$, и для окончания теоремы нам остается доказать непрерывность $I(P, t)$ при рассматриваемом значении t .

Положим

$$I(P, t) = I_1(P, t) + I_2(P, t) = \int_0^{t_1} d\tau \left\{ \quad \right\} + \int_{t_1}^t d\tau \left\{ \quad \right\} \quad (0 \leq t_1 < t).$$

Первое слагаемое непрерывно при рассматриваемом значении t , каково бы ни было t_1 , и для доказательства непрерывности $I_2(P, t)$ остается доказать, что при подходящем значении t_1 функция $I_2(P, t)$ меньше любого заданного числа ε .

Положим

$$\mu(P', \tau) - \mu(P', t) = \gamma(P', \tau)$$

и пусть $|\gamma(P', \tau)| < \gamma_0$, при $t_1 \leq \tau \leq t$, причем γ_0 может быть задано произвольно, если t_1 выбрать соответственно. Видоизменяя немного рассуждения с $W^{(0)}(P, t)$, будем иметь

$$\begin{aligned} I_2(P, t) &= \\ &= \iint_{(S)} d\sigma \int_{t_1}^t \exp \left[-\frac{r_{PP'}^2}{4(t-\tau)} \right] \cdot \frac{r_{PP'} \cos \varphi}{2(t-\tau)} \gamma(P', \tau) \cdot \frac{d\tau}{(2\sqrt{\pi}(t-\tau))^3}. \end{aligned}$$

Положим по-прежнему

$$z = \frac{r_{PP'}}{2\sqrt{t-\tau}}; \quad dz = \frac{r_{PP'}}{4(\sqrt{t-\tau})^3}$$

и обозначим через $\gamma(P, P'; z)$ функцию γ после введения туда новой переменной z . Тогда

$$|I_2(P, t)| = \left| \iint_{(S)} \frac{\cos \varphi}{r_{PP'}^2} \cdot \bar{\mu} d\sigma \right| \leq \gamma_0 \cdot K,$$

где $\bar{\mu} = \bar{\mu}(P, P'; z)$, причем

$$|\bar{\mu}(P, P'; z)| = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{r_{PP'}}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \exp(-z^2) z^2 |\gamma(P, P'; z)| dz < \gamma_0,$$

так как $|\gamma(P, P'; z)|$ всегда меньше γ_0 и

$$K = \max_{P \subset S} \left(\iint_{(S)} \frac{\cos \varphi}{r_{PP'}^2} d\sigma \right)$$

некоторое ограниченное число.

Собирая полученные для $W^{(0)}(P, t)$ и $I(P, t)$ результаты, получаем, что

$$W_i(P_0, t) = \frac{1}{2} \mu(P_0, t) + W(P_0, t) = \frac{1}{2} \mu(P_0, t) + \int_0^t d\tau \left\{ \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P_0, t; P', \tau) \mu(P', \tau) d\sigma' \right\},$$

$$W_e(P_0, t) = -\frac{1}{2} \mu(P_0, t) + W(P_0, t).$$

Повторяя буквально это доказательство, нетрудно убедиться, что нормальные производные потенциала простого слоя разрывны на поверхности (S) и что имеют место следующие формулы, аналогичные известным формулам для ньютоновского потенциала:

$$\left(\frac{\partial V(P_0, t)}{\partial n} \right)_i = -\frac{1}{2} \nu(P_0, t) + \left(\frac{\partial V(P_0, t)}{\partial n} \right)_0,$$

$$\left(\frac{\partial V(P_0, t)}{\partial n} \right)_e = \frac{1}{2} \nu(P_0, t) + \left(\frac{\partial V(P_0, t)}{\partial n} \right)_0$$

(n — внутренняя нормаль), где

$$\left(\frac{\partial V(P_0, t)}{\partial n}\right)_0 = \int_0^t d\tau \left\{ \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P_0}}(P_0, t; P', \tau) \nu(P', \tau) d\sigma' \right\}.$$

Рассмотрим потенциал, аналогичный потенциалу простого слоя

$$\begin{aligned} \bar{V}_\tau(P', t) &= \int_\tau^t d\theta \left\{ \iiint_{(S)} U(P, \theta; P', \tau) \nu(P, \theta) d\sigma \right\} = \\ &= \int_\tau^t d\theta \left\{ \iiint_{(S)} U(P, P'; \theta - \tau) \nu(P, \theta) d\sigma \right\}, \end{aligned}$$

который, очевидно, удовлетворяет уравнению теплопроводности по P' и t , и выясним поведение этого интеграла на поверхности (S) . Изменим знак переменного θ , положив $\bar{\theta} = -\theta$; тогда

$$\bar{V}_\tau = \int_{-t}^{-\tau} d\bar{\theta} \left\{ \iiint_{(S)} U(P, P'; (-\tau) - \bar{\theta}) \bar{\nu}(P, \bar{\theta}) d\sigma \right\},$$

где $\bar{\nu}(P, \bar{\theta}) = \nu(P, -\bar{\theta})$. Таким образом \bar{V}_τ является обычным потенциалом простого слоя; следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{V}_\tau}{\partial n_{P'}}\right)_i &= -\frac{1}{2} \bar{\nu}(P, -\tau) + \\ &+ \int_{-t}^{-\tau} d\bar{\theta} \left\{ \iiint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P'_0}}(P, P'; (-\tau) - \bar{\theta}) \bar{\nu}(P, \bar{\theta}) d\sigma \right\}. \end{aligned}$$

Переходя обратно к переменной θ и функции ν , получим

$$\left(\frac{\partial \bar{V}_\tau(P', t)}{\partial n_{P'}}\right)_i = -\frac{1}{2} \bar{\nu}(P'_0, \tau) + \left(\frac{\partial V_\tau}{\partial n_{P'}}\right)_0$$

и аналогично

$$\left(\frac{\partial \bar{V}_\tau(P', t)}{\partial n_{P'}}\right)_e = +\frac{1}{2} \bar{\nu}(P'_0, \tau) + \left(\frac{\partial V_\tau}{\partial n_{P'}}\right)_0,$$

где

$$\left(\frac{\partial \bar{V}_\tau(P', t)}{\partial n_{P'}} \right)_0 = \int_\tau^t d\theta \left\{ \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P'_0}}(P, \theta; P'_0, \tau) \nu(P, \theta) d\sigma \right\}.$$

3. Обратимся к построению функций Грина. Покажем, что

$$G(P, t; P', \tau) = \mu_0(P, t; P', \tau) - 2\mu_1(P, t; P', \tau) + \dots \\ \dots + (-1)^n \cdot 2^n \mu_n(P, t; P', \tau) + \dots,$$

где

$$\mu_0(P, t; P', \tau) = U(P, t; P', \tau),$$

$$\mu_1(P, t; P', \tau) = \int_\tau^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P_1}}(P, t; P_1, \theta_1) U(P_1, \theta_1; P', \tau) d\sigma_1 \right\},$$

.....

$$\mu_m(P, t; P', \tau) = \int_\tau^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P_1}}(P, t; P_1, \theta_1) \mu_{m-1}(P_1, \theta_1; P', \tau) d\sigma_1 \right\},$$

Пользуясь равномерной сходимостью этого ряда, которая будет доказана несколько позже, нетрудно убедиться, что этот ряд действительно представляет функцию Грина. В самом деле, каждое слагаемое при фиксированном P' представляет потенциал двойного слоя и удовлетворяет уравнению теплопроводности; следовательно, и весь ряд — также. Кроме того, когда точка P_i (изнутри) стремится к точке $P_0 \subset S$, то предельное значение в P_0 будет равно нулю

$$\lim_{P_i \rightarrow P_0} G(P, t; P', \tau) = \\ = \mu_0(P_0, t; P', \tau) - 2 \left[\mu_1(P_0, t; P', \tau) + \frac{1}{2} \mu_0(P_0, t; P', \tau) \right] + \\ + 2^2 \left[\mu_2(P_0, t; P', \tau) + \frac{1}{2} \mu_1(P_0, t; P', \tau) \right] - \dots = 0,$$

что и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим производную $\frac{\partial G}{\partial n_{P'}}(P, t; P', \tau)$ ($P' \subset S$). Для изучения этой функции нам будет удобно преобразовать выражения для функций $\mu(P_0, t; P', \tau)$.

Очевидно, что $\mu_1(P_0, t; P', \tau)$ можно рассматривать, как потенциал простого слоя \bar{V} по переменному P' :

$$\mu_1(P_0, t; P', \tau) = \int_{\tau}^t d\theta \left\{ \iint_{(S)} \nu_0(P, t; P_1, \theta_1) U(P_1, \theta_1; P', \tau) d\sigma_1 \right\},$$

где

$$\nu_0(P, t; P_1, \theta_1) = \frac{\partial U}{\partial n_{P_1}}(P, t; P_1, \theta_1).$$

Докажем, что каждое μ_m является потенциалом простого слоя \bar{V} , что

$$\text{I. } \mu_m(P, t; P', \tau) =$$

$$= \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \nu_{m-1}(P, t; P_1, \theta_1) U(P_1, \theta_1; P', \tau) d\sigma_1 \right\},$$

где

$$\nu_m(P, t; P', \tau) = \frac{\partial \mu_m}{\partial n_{P'}}(P, t; P', \tau) =$$

$$= \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \nu_{m-1}(P, t; P_1, \theta_1) \cdot \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P_1, \theta_1; P', \tau) d\sigma_1 \right\} \quad (P' \subset S),$$

и что функция $\nu_m(P, t; P', \tau)$ ($P' \subset S$) связана рекуррентными формулами

$$\text{II. } \nu_m(P, t; P', \tau) =$$

$$= \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P_1}}(P, t; P_1, \theta_1) \cdot \nu_{m-1}(P_1, \theta_1; P', \tau) d\sigma_1 \right\} \quad (P' \subset S).$$

Действительно, предполагая их верными для m , получаем

$$\begin{aligned}
 \mu_{m+1}(P, t; P', \tau) &= \\
 &= \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P_1}}(P, t; P_1, \theta_1) \left[\int_{\tau}^{\theta_1} d\theta_2 \iint_{(S)} \nu_{m-1}(P_1, \theta_1; P_2, \theta_2) \times \right. \right. \\
 &\times U(P_2, \theta_2; P', \tau) d\sigma_2 \left. \right] d\sigma_1 \left. \right\} = \int_{\tau}^t d\theta_2 \left\{ \iint_{(S)} \left[\int_{\theta_2}^t d\theta_1 \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P_1}}(P, t; P_1, \theta_1) \times \right. \right. \\
 &\times \nu_{m-1}(P_1, \theta_1; P_2, \theta_2) d\sigma_1 \left. \right] U(P_2, \theta_2; P', \tau) d\sigma_2 \left. \right\} = \\
 &= \int_{\tau}^t d\theta_2 \left\{ \iint_{(S)} \nu_m(P, t; P_2, \theta_2) \cdot U(P_2, \theta_2; P', \tau) d\sigma_2 \right\},
 \end{aligned}$$

что и доказывает формулу I нашей индукции.

Исходя из определения ν , имеем ($P' \subset S$)

$$\nu_{m+1}(P, t; P', \tau) = \int_{\tau}^t d\theta_2 \left\{ \iint_{(S)} \nu_m(P, t; P_2, \theta_2) \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P_2, \theta_2; P', \tau) d\sigma_2 \right\}.$$

Пользуясь формулой II и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned}
 \nu_{m+1}(P, t; P', \tau) &= \\
 &= \int_{\tau}^t d\theta_2 \left\{ \iint_{(S)} \left[\int_{\theta_2}^t d\theta_1 \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P_1}}(P, t; P_1, \theta_1) \nu_{m-1}(P_1, \theta_1; P_2, \theta_2) d\sigma_1 \right] \times \right. \\
 &\times \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P_2, \theta_2; P', \tau) d\sigma_2 \left. \right\} = \int_{\tau}^t d\theta_1 \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P_1}}(P, \theta; P_1, \theta_1) \times \\
 &\times \left[\int_{\tau}^{\theta_1} d\theta_2 \iint_{(S)} \nu_{m-1}(P_1, \theta_1; P_2, \theta_2) \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P_2, \theta_2; P', \tau) d\sigma_2 \right] d\sigma_1 = \\
 &= \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P_1}}(P, t; P_1, \theta_1) \nu_m(P_1, \theta_1; P', \tau) d\sigma_1 \right\},
 \end{aligned}$$

что доказывает формулу II проводимой индукции, а тем самым и самую индукцию.

Теперь уже легко получить выражение для $\frac{\partial G}{\partial n_{P'}}$. Пользуясь равномерной сходимостью ряда, составленного из функций ν_m , которая будет доказана несколько позже, можем написать

$$G(P, t; P', \tau) = U(P, t; P', \tau) - \int_{\tau}^t d\theta \left\{ \iint_{(S)} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m 2^{m+1} \nu_m(P, t; P_1, \theta_1) \right] \cdot U(P_1, \theta_1; P', \tau) d\sigma_1 \right\}.$$

Пользуясь, кроме того, формулами, определяющими ν_m , и свойством нормальных производных потенциала простого слоя \bar{V} у поверхности (S) , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{P' \rightarrow P'_0} \frac{\partial G}{\partial n_{P'}}(P, t; P', \tau) &= \nu_0(P, t; P'_0, \tau) - \\ &- \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m 2^{m+1} \nu_{m+1}(P, t; P'_0, \tau) \right] - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m 2^{m+1} \nu_m(P, t; P'_0, \tau) \right] \right\} = \\ &= 2 \{ \nu_0(P, t; P'_0, \tau) - 2\nu_1(P, t; P'_0, \tau) + 2^2 \nu_2(P, t; P'_0, \tau) - \dots \}. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n_{P'}}(P, t; P', \tau) &= \\ &= 2 \cdot \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P, t; P', \tau) - 2 \{ 2\nu_1(P, t; P', \tau) - 2^2 \nu_2(P, t; P', \tau) + \dots \}. \end{aligned}$$

4. Наши предшествующие заключения основаны на утверждении о том, что ряд, составленный из $2^m \mu_m(P, t; P', \tau)$, представляющий $G(P, t; P', \tau)$, и ряд, составленный из $2^m \nu_m(P, t; P', \tau)$, сходятся равномерно. Очевидно, в силу соотношения I, что достаточно доказать только равномерную сходимость ряда, составленного из $2^m \nu_m(P, t; P', \tau)$, так как отсюда будет следовать равномерная сходимость ряда $2^m \mu_m(P, t; P', \tau)$.

Обратимся к доказательству равномерной сходимости ряда, составленного из функций $2^m \nu_m(P, t; P', \tau)$, когда $P \in \overline{\mathcal{G}}$, а $P' \in S$. Эти функции определяются следующими равенствами:

$$\nu_0(P, t; P', \tau) = \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P, t; P', \tau),$$

$$\nu_m(P, t; P', \tau) =$$

$$= \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P_1}}(P, t; P_1, \theta_1) \cdot \nu_{m-1}(P_1, \theta_1; P', \tau) d\sigma_1 \right\} \quad (P' \in S).$$

Заметим, что каждое $\nu_m(P, t; P', \tau)$ при фиксированном P' удовлетворяет уравнению теплопроводности и так как, кроме того, $\nu_m(P, \tau; P', \tau) = 0$, то эта функция достигает максимума в некоторой точке $P_0 \in S$. При приближении точки P к $P_0 \in S$ имеем, что

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \nu_m(P, t; P', \tau) = \nu_m(P_0, t; P', \tau) + \frac{1}{2} \nu_{m-1}(P_0, t; P', \tau) \quad (P' \in S).$$

Обозначим через $\omega_m(t_0, \tau_0)$ максимум $\nu_m(P, t; P', \tau)$, когда $\tau_0 \leq \tau \leq t \leq t_0$:

$$\omega_m(t_0, \tau_0) = \max \nu_m(P, t; P', \tau) \quad (P, P' \in S, \tau_0 \leq \tau \leq t \leq t_0).$$

Если мы докажем, что при m , большем некоторого m_0 , такой максимум действительно существует и что

$$\sum 2^m \omega_m(t_0, \tau_0)$$

является рядом, сходящимся при любых t_0, τ_0 , то этим и будет доказана равномерная сходимость ряда, составленного из функций $2^m \nu_m(P, t; P', \tau)$. на которой были основаны предшествующие рассуждения.

Сделаем предварительную оценку интеграла

$$W(P, t) = \int_{\tau}^t d\theta \left\{ \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P, t; P', \theta) \mu(P', \theta) d\sigma' \right\},$$

где $\mu(P', \tau)$ — некоторая функция, для которой

$$|\mu(P, \tau)| \leq f(\tau).$$

В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned}
 |W(P, t)| &\leq \int_{\tau}^t f(\theta) \left\{ \iint_{(S)} \left| \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P, t; P', \theta) \right| d\sigma' \right\} d\theta = \\
 &= \int_{\tau}^t f(\theta) \left\{ \iint_{(S)} \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\theta)}} \right]^3 \frac{r|\cos\varphi|}{2(t-\theta)} \exp\left[-\frac{r^2}{4(t-\theta)}\right] d\sigma' \right\} d\theta \leq \\
 &\leq \frac{E}{2(2\sqrt{\pi})^3} \int_{\tau}^t f(\theta) \left\{ \iint_{(S)} \frac{r_{PP'}^{1+\lambda}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} \exp\left[-\frac{r_{PP'}^2}{4(t-\theta)}\right] d\sigma \right\} d\theta \leq \\
 &\leq \left(\frac{A}{a}\right)^{\frac{1+\lambda}{2}} \frac{E \cdot A}{(\sqrt{\pi})^3 2^{1-\lambda}} \int_{\tau}^t \frac{f(\theta)}{(t-\theta)^{1-\frac{\lambda}{2}}} \times \\
 &\times \left\{ \int_0^S \left[\frac{\Omega}{4A(t-\theta)} \right]^{\frac{1+\lambda}{2}} \exp\left[-\frac{\Omega}{4A(t-\theta)}\right] \frac{d\Omega}{4A(t-\theta)} \right\} d\theta \leq \\
 &\leq \frac{A}{(\sqrt{\pi})^3 2^{1-\lambda}} \left(\frac{A}{a}\right)^{\frac{1+\lambda}{2}} \times E \int_{\tau}^t \frac{f(\theta)}{(t-\theta)^{1-\frac{\lambda}{2}}} \int_0^{\infty} \exp(-z) z^{\frac{1+\lambda}{2}} dz = \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{2}\right)}{(\sqrt{\pi})^3 2^{1-\lambda}} \left(\frac{A}{a}\right)^{\frac{1+\lambda}{2}} A \times E \int_{\tau}^t \frac{f(\theta)}{(t-\theta)^{1-\frac{\lambda}{2}}} d\theta = \\
 &= B \cdot \int_{\tau}^t \frac{f(\theta)}{(t-\theta)^{1-\frac{\lambda}{2}}} d\theta,
 \end{aligned}$$

где B — константа. Допустим, что для некоторого номера m функция $\nu_m(P, t; P', \tau)$ является ограниченной функцией.

Пусть $|\nu_m(P, t; P', \tau)| \leq C$; тогда

$$|\nu_{m+1}(P, t; P', \tau)| \leq CB \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{(t-\theta)^{1-\frac{\lambda}{2}}} = CB \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)} \cdot (t-\tau)^{\frac{\lambda}{2}},$$

$$\begin{aligned} |\nu_{m+2}(P, t; P', \tau)| &\leq CB^2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)} \cdot \int_{\tau}^t \frac{(\theta-\tau)^{\frac{\lambda}{2}}}{(t-\theta)^{1-\frac{\lambda}{2}}} d\theta = \\ &= CB^2 \frac{\Gamma^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+2\frac{\lambda}{2}\right)} \cdot (t-\tau)^{2\cdot\frac{\lambda}{2}}, \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} |\nu_{m+k}(P, t; P', \tau)| &\leq CB^k \frac{\Gamma^{k-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+(k-1)\frac{\lambda}{2}\right)} \cdot \int_{\tau}^t \frac{(\theta-\tau)^{(k-1)\cdot\frac{\lambda}{2}}}{(t-\theta)^{1-\frac{\lambda}{2}}} d\theta = \\ &= CB^k \frac{\Gamma^k\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+k\frac{\lambda}{2}\right)} \cdot (t-\tau)^{k\cdot\frac{\lambda}{2}}, \end{aligned}$$

.....

Таким образом, если некоторая $\nu_m(P, t; P', \tau)$ равномерно ограничена, то ряд $2^m \omega_m(t_0, \tau_0)$ сходится при любых значениях t_0, τ_0 .

Итак, нам остается доказать для некоторого номера m ограниченность функции $\nu_m(P, t; P', \tau)$ при $P, P' \subset S$.

Допустим, что

$$|\nu_m(P, t; P', \tau)| \leq \frac{M_m}{(t-\tau)^{\gamma_m}} \exp \left[-\delta_m \frac{r_{PP'}^2}{4(t-\tau)} \right],$$

где M_m, γ_m, δ_m — некоторые постоянные, причем $(\gamma_m < 2, \delta_m < 1)$.

Функция ν_0 удовлетворяет этому неравенству, так как

$$\begin{aligned}
 |\nu_0(P, t; P', \tau)| &= \left| \frac{\partial U}{\partial n}(P, t; P', \tau) \right| = \\
 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right)^3 \frac{r_{PP'} \cos \varphi}{2(t-\tau)} \exp \left[-\frac{r_{PP'}^2}{4(t-\tau)} \right] \leq \\
 &\leq \frac{E}{(2\sqrt{\pi})^3} \cdot A_0 \cdot \frac{1}{(t-\tau)^{2-\frac{\lambda}{2}}} \exp \left[-\delta_0 \frac{r^2}{4(t-\tau)} \right] = \\
 &= \frac{M_0}{(t-\tau)^{\gamma_0}} \exp \left[-\delta_0 \frac{r^2}{4(t-\tau)} \right] \quad \left(\gamma_0 = 2 - \frac{\lambda}{2} \right),
 \end{aligned}$$

причем в последнем неравенстве мы пользуемся тем, что

$$z^{1+\lambda} \exp(-z^2) \leq A_0 \exp \left[-\delta_0 z^2 \right]$$

или

$$z^{1+\lambda} \exp \left[-(1-\delta_0)z^2 \right] < A_0 \quad (\delta_0 < 1).$$

Итак, наше основное неравенство для $m = 0$ доказано.

Мы докажем, что

$$\gamma_{m+1} = \gamma_m - \frac{\lambda}{2} \quad \text{или} \quad \gamma_m = \gamma_0 - m \cdot \frac{\lambda}{2} = 2 - (m+1) \frac{\lambda}{2};$$

для наименьшего m , для которого

$$\gamma_m = \gamma_0 - m \cdot \frac{\lambda}{2} = 2 - (m+1) \cdot \frac{\lambda}{2} = p < 0, \quad \text{т. е.} \quad m = \left[\frac{1}{\lambda} \right] - 1,$$

получим, что

$$|\nu_m| \leq \frac{M_m}{(t-\tau)^{\gamma_m}} \exp \left[-\delta_m \cdot \frac{r^2}{4(t-\tau)} \right] \leq C(t-\tau)^p \quad (C = M_m; p > 0),$$

откуда будет следовать равномерная сходимости ряда $2^m \nu_m(P, t; P', \tau)$ для любого промежутка $\tau_0 \leq \tau \leq t \leq t_0$, которую нам надо доказать.

Итак, рассмотрим интеграл, который потребуется нам несколько раз в дальнейшем:

$$I = \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \frac{M}{(t - \theta_1)^q} \exp \left[-\delta \frac{r_{PP'}^2}{4(t - \theta_1)} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{M_n}{(\theta_1 - \tau)^{\gamma_n}} \exp \left[-\delta_n \frac{r_{P_1P'}^2}{4(\theta_1 - \tau)} \right] d\sigma_1 \right\} \quad (\delta > \delta_n).$$

Разобьем поверхность интегрирования на две части \bar{S} , $\bar{\bar{S}}$, полагая \bar{S} состоящей из тех точек P_1 , где

$$r = r_{PP_1} < r' = r_{P_1P'},$$

а $\bar{\bar{S}}$ из остальных, т. е. где $r' \leq r$. Далее, назовем через S_1 совокупность тех точек P_1 , для которых

$$r = r_{PP_1} \leq \frac{1}{4} r_0 = \frac{1}{4} r_{PP'}.$$

Очевидно, что $S_1 \subset \bar{S}$, так как если $P_1 \in S_1$, то

$$r' = r_{P_1P'} \geq r_0 - r \geq \frac{3}{4} r_0 > r.$$

Обозначим через S_2 совокупность остальных точек \bar{S} . Разбивая аналогичным образом на части $\bar{\bar{S}}$, получаем разбиение на четыре части

$$S_1, \quad \text{где } r \leq \frac{r_0}{4},$$

$$S_2, \quad \text{где } \frac{r_0}{4} < r \leq r',$$

$$S_3, \quad \text{где } r > r' > \frac{r_0}{4},$$

$$S_4, \quad \text{где } \frac{r_0}{4} \geq r'.$$

Разобьем интеграл I на четыре части, полагая

$$I_k = \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S_k)} \frac{M}{(t - \theta_1)^q} \exp \left[-\delta \frac{r^2}{4(t - \theta_1)} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{M_n}{(\theta_1 - \tau)^{\gamma_n}} \exp \left[-\delta_n \frac{r'^2}{4(\theta_1 - \tau)} \right] d\sigma_1 \right\} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

1. Оценим I_1 . Заметим, что для точек $P_1 \subset S_1$ имеем

$$\begin{aligned} (r')^2 &= r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \alpha \geq r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \geq \\ &\geq r^2 + r_0^2 - 2r_0 \frac{r_0}{4} = r^2 + \frac{r_0^2}{2}; \end{aligned}$$

так как $\delta_n < \delta$, то

$$\begin{aligned} I_1 &\leq M \cdot M_n \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \frac{1}{(t-\theta_1)^q (\theta_1-\tau)^{\gamma_n}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[-\delta_n \left[\frac{r^2}{4(t-\theta_1)} + \frac{(r')^2}{4(\theta_1-\tau)} \right] \right] d\sigma_1 \right\} \leq \\ &\leq M \cdot M_n \int_{\tau}^t \exp \left[-\delta_n \cdot \frac{r_0^2}{2} \cdot \frac{1}{4(\theta_1-\tau)} \right] \frac{d\theta_1}{(t-\theta_1)^{q-1} (\theta_1-\tau)^{\gamma_n-1}} \times \\ &\quad \times \iint_{(S)} \exp \left[-\delta_n \frac{r^2(t-\tau)}{4(t-\theta_1)(\theta_1-\tau)} \right] \frac{d\theta_1}{(t-\theta_1)(\theta_1-\tau)} \leq \\ &\leq \frac{M M_n}{(t-\tau)} \cdot \frac{4A}{\delta_n} \exp \left[-\frac{\delta_n}{2} \cdot \frac{r_0^2}{4(t-\tau)} \right] \int_{\tau}^t \frac{d\theta_1}{(t-\theta_1)^{q-1} (\theta_1-\tau)^{\gamma_n-1}} \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \exp \left[-\delta_n \cdot \frac{\Omega(t-\tau)}{4A(t-\theta_1)(\theta_1-\tau)} \right] \cdot \frac{\delta_n}{4A} \cdot \frac{d\Omega(t-\tau)}{(t-\theta_1)(\theta_1-\tau)} \leq \\ &\leq \frac{M \cdot M_n}{(t-\tau)} \cdot \frac{4A}{\delta_n} \exp \left[-\frac{\delta_n}{2} \cdot \frac{r_0^2}{4(t-\tau)} \right] \times \\ &\quad \times \frac{\Gamma(q) \cdot \Gamma(\gamma_n)}{\Gamma(1+q+\gamma_n)} \cdot \frac{1}{(t-\tau)^{\gamma_n-(3-q)}} = \\ &= \frac{M_{n+1}^{(1)}}{(t-\tau)^{\gamma_n-(2-q)}} \cdot \exp \left[-\frac{\delta_n}{2} \cdot \frac{r_0^2}{4(t-\tau)} \right]. \end{aligned}$$

2. Оценим интеграл I_2 :

$$\begin{aligned}
 I_2 &\leq M \cdot M_n \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S_2)} \frac{1}{(t-\theta_1)^q (\theta_1-\tau)^{\gamma_n}} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \exp \left[-\delta_n \left[\frac{r^2}{4(t-\theta_1)} + \frac{(r')^2}{4(\theta_1-\tau)} \right] \right] d\sigma_1 \right\} \leq \\
 &\leq M \cdot M_n \int_{\tau}^t \frac{d\theta_1}{(t-\theta_1)^{q-1} (\theta_1-\tau)^{\gamma_n-1}} \times \\
 &\quad \times \left\{ \iint_{(S_2)} \exp \left[-\delta_n \frac{r^2(t-\tau)}{4(t-\theta_1)(\theta_1-\tau)} \right] \cdot \frac{d\sigma_1}{(t-\theta_1)(\theta_1-\tau)} \right\} \leq \\
 &\leq \frac{M \cdot M_n}{(t-\tau)} \cdot \frac{4A}{\delta_n} \int_{\tau}^t \frac{d\theta_1}{(t-\theta_1)^{q-1} (\theta_1-\tau)^{\gamma_n-1}} \times \\
 &\quad \times \left\{ \int_{\Omega(\frac{r_0}{4})}^{\infty} \exp \left[-\delta_n \frac{\Omega(t-\tau)}{4A(t-\theta_1)(\theta_1-\tau)} \right] \cdot \frac{\delta_n}{4A} \cdot \frac{d\Omega(t-\tau)}{(t-\theta_1)(\theta_1-\tau)} \right\} \leq \\
 &\leq \frac{M \cdot M_n}{(t-\tau)} \cdot \frac{4A}{\delta_n} \cdot \exp \left[-\delta_n \frac{\Omega(\frac{r_0}{4})}{4A(t-\tau)} \right] \int_{\tau}^t \frac{d\theta_1}{(t-\theta_1)^{q-1} (\theta_1-\tau)^{\gamma_n-1}} = \\
 &= \frac{M \cdot M_n}{(t-\tau)} \cdot \frac{4A}{\delta_n} \cdot \exp \left[-\delta_n \frac{a}{16A} \cdot \frac{r_0^2}{4(t-\tau)} \right] \times \\
 &\quad \times \frac{\Gamma(q) \cdot \Gamma(\lambda_n)}{\Gamma(1+q+\gamma_n)} \frac{1}{(t-\tau)^{\gamma_n-(3-q)}} = \\
 &= \frac{M_{(n+1)}^{(2)}}{(t-\tau)^{\gamma_n-(2-q)}} \cdot \exp \left[-\delta_n \frac{a}{16A} \cdot \frac{r_0^2}{4(t-\tau)} \right].
 \end{aligned}$$

Интегралы I_3 и I_4 оцениваются аналогично I_2 и I_1 .

Таким образом, называя

$$\delta_{m+1} = \min\left(\frac{\delta_m}{2}, \frac{\delta_m \cdot a}{16A}\right), \quad M_{m+1} = \sum_{k=1}^4 M_{m+1}^{(k)} \quad \text{и} \quad \gamma_{m+1} = \gamma_m - (2 - q),$$

получаем, что

$$|I(P, t; P', \tau)| \leq \frac{M_{m+1}}{(t - \tau)^{\gamma_{m+1}}} \exp\left[-\delta_{m+1} \frac{r_0^2}{4(t - \tau)}\right],$$

где $r_0 = r_{PP'}$.

В применении к нашему случаю будем иметь

$$\begin{aligned} |\nu_{m+1}(P, t; P', \tau)| &= \\ &= \left| \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n}(P, t; P_1, \theta_1) \cdot \nu_m(P_1, \theta_1; P', \theta') d\sigma \right\} \right| \leq \\ &\leq \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \frac{M_0}{(t - \theta_1)^{\gamma_0}} \cdot \exp\left[-\delta_0 \frac{r^2}{4(t - \theta_1)}\right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{M_m}{(\theta_1 - \tau)^{\gamma_m}} \cdot \exp\left[-\delta_m \cdot \frac{(r')^2}{4(\theta_1 - \tau)}\right] d\sigma_1 \right\}. \end{aligned}$$

Пользуясь предшествующей оценкой, где $M = M_0$, а

$$q = \gamma_0 = 2 - \frac{\lambda}{2},$$

получаем, что

$$|\nu_{m+1}(P, t; P', \tau)| \leq \frac{M_{m+1}}{(t - \tau)^{\gamma_{m+1}}} \exp\left[-\delta_{m+1} \cdot \frac{r_0^2}{4(t - \tau)}\right],$$

причем

$$\gamma_{m+1} = \gamma_m - (2 - q) = \gamma_m - \frac{\lambda}{2},$$

чем и доказана равномерная сходимость ряда, составленного из функций

$$2^m \nu_m(P, t; P', \tau).$$

5. Аналогично можно произвести изучение функции Грина

$$G_{II}(P, t; P', \tau),$$

соответствующей второй краевой задаче уравнения теплопроводности. Эта функция определяется как

$$G_{II}(P, t; P', \tau) = U(P, t; P', \tau) - u_{II}(P, t; P', \tau),$$

где $u_{II}(P, t; P', \tau)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности по P, t при фиксированных P', τ , по P', t при фиксированных P, τ и условиям

$$u_{II}(P, \tau; P', \tau) = 0,$$

$$\frac{\partial u_{II}(P, t; P', \tau)}{\partial n_{P'}} = \frac{\partial U}{\partial n_{P'}}(P, t; P', \tau) \quad \text{для } P' \subset S,$$

так что

$$\frac{\partial G_{II}(P, t; P', \tau)}{\partial n_{P'}} = 0 \quad \text{для } P' \subset S.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} G_{II}(P, t; P', \tau) &= \mu_0(P, t; P', \tau) + 2\mu_1(P, t; P', \tau) + \\ &+ 2^2\mu_2(P, t; P', \tau) + \dots + 2^m\mu_m(P, t; P', \tau) + \dots = U(P, t; P', \tau) + \\ &+ \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \left[\sum_{m=0}^{\infty} 2^m \nu_m(P, t; P_1, \theta_1) \right] \cdot U(P_1, \theta_1; P', \tau) d\sigma_1 \right\}. \end{aligned}$$

Действительно, очевидно, что этот ряд удовлетворяет уравнению теплопроводности, поставленным начальным условиям и

$$\begin{aligned} \lim_{P' \rightarrow P'_0 \subset S} \frac{\partial G_{II}(P, t; P', \tau)}{\partial n_{P'}} &= \frac{\partial U(P, t; P', \tau)}{\partial n_{P'}} + \\ &+ \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \left[\sum_{m=0}^{\infty} 2^m \nu_m(P, t; P_1, \theta_1) \right] U(P_1, \theta_1; P'_0, \tau) d\sigma_1 \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} 2^m \nu_m(P, t; P'_0, \tau) \right] = 0, \end{aligned}$$

в силу определения функций $\nu_m(P, t; P', \tau)$.

Сделаем оценку значений $\mu_m(P, t; P', \tau)$, когда P и P' находятся на S , которая весьма полезна при решении задач математической физики.

Предварительно нам надо произвести некоторые вспомогательные оценки, аналогичные предшествующим.

Пусть некоторая функция

$$|\nu(P, t)| < f(t).$$

Оценим интеграл

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(P', t) &= \int_{\tau}^t d\theta \left\{ \iiint_{(S)} \nu(P, \theta) \cdot U(P, \theta; P', \tau) d\sigma \right\} \leq \\ &\leq \int_{\tau}^t f(\theta) d\theta \left\{ \iiint_{(S)} \exp \left[-\frac{r^2}{4(\theta - \tau)} \right] \frac{d\sigma}{(2\sqrt{\pi(\theta - \tau)})^3} \right\} \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^3 \cdot \frac{A}{2} \cdot \int_{\tau}^t \frac{f(\theta)}{\sqrt{\theta - \tau}} \cdot \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{\Omega}{4A(\theta - \tau)} \right] \frac{d\Omega}{4A(\theta - \tau)} = \\ &= B \cdot \int_{\tau}^t \frac{f(\theta)}{\sqrt{\theta - \tau}} d\theta. \end{aligned}$$

Функция Грина $G_{II}(P, t; P', \tau)$ была определена нами как раз составленной из слагаемых

$$\mu_m(P, t; P', \tau) = \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iiint_{(S)} \nu_m(P, t; P_1, \theta_1) U(P_1, \theta_1; P', \tau) d\sigma_1 \right\},$$

причем нами было доказано, что, начиная с некоторого номера m_0 , функции $\nu_m(P, t; P', \tau)$ ограничены и образуют ряд, равномерно сходящийся. Отсюда и из только что приведенной оценки следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu_m(P, t; P', \tau)$$

является ограниченной функцией, когда τ и t меняются в некоторых пределах τ_0, t_0 .

Рассмотрим теперь $\mu_m(P, t; P', \tau)$ при $m < m_0$

$$|\mu_m(P, t; P', \tau)| \leq \int_{\tau}^t d\theta_1 \left\{ \iint_{(S)} \frac{M_n}{(t - \theta_1)^{\gamma_m}} \exp \left[-\delta_m \frac{r^2}{4(t - \theta_1)} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{M}{(\theta_1 - \tau)^q} \exp \left[-\frac{(r')^2}{4(\theta_1 - \tau)} \right] d\sigma_1 \right\},$$

причем здесь

$$M = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \right)^3, \quad q = \frac{3}{2}.$$

Пользуясь предшествующей оценкой и тем, что $2 - q = \frac{1}{2} > 0$, получаем

$$|\mu_m(P, t; P', \tau)| \leq \frac{M'_m}{(t - \tau)^{\gamma_m - \frac{1}{2}}} \exp \left[-\delta'_m \frac{r_{PP'}^2}{4(t - \tau)} \right],$$

где M'_m и δ'_m — константы, $\gamma_m - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$.

Неравенство только усилится, если, выбрав

$$M' = \max(M'_1, M'_2, \dots, M'_{m_0-1}) \quad \text{и} \quad \delta = \min(\delta'_1, \dots, \delta'_{m_0-1}),$$

мы напишем

$$|\mu_m(P, t; P', \tau)| < \frac{M'}{(t - \tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\delta' \frac{r^2}{4(t - \tau)} \right].$$

Так как ряд из μ_m , начиная с m_0 , ограничен, то, увеличивая подходящим образом M' (зависящим от интервала (t_0, τ_0) , в котором меняется τ, t), получаем, что

$$G_{II}(P, t; P', \tau) < \frac{M'}{(t - \tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\delta \frac{r^2}{4(t - \tau)} \right].$$

Сделаем оценку величины

$$F(t, \tau) = \max_{(P \subset S)} \iint_{(S)} G_{II}(P, t; P', \tau) d\sigma',$$

которая, очевидно, дается формулой

$$F(t, \tau) \leq \frac{M'}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \frac{4A}{\delta} \cdot \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{\delta \Omega}{4A(t-\tau)} \right] \frac{\delta d\Omega}{4A(t-\tau)} = \\ = \frac{M'}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \frac{4A}{\delta} = \frac{F_0}{\sqrt{t-\tau}},$$

где F_0 — константа, зависящая от (τ_0, t_0) , т. е. от интервала изменения τ и t .

Примечания

[1] Этой теореме можно придать несколько более общую форму, рассматривая вместо $\Delta u - \lambda u = 0$ уравнение

$$\Delta u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} - \lambda u = 0$$

(a, b, c — постоянны). Действительно, это уравнение при помощи введения новой неизвестной функции v , определяемой соотношением

$$u = \exp \left[-\frac{1}{2} (ax + by + cz) \right] v,$$

сводится к уравнению

$$\Delta v - \left(\lambda + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} \right) v = 0,$$

причем, если $\lambda > 0$, то

$$\lambda + \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2) > 0$$

и тем более. Так как произведенная замена касается только неизвестной функции, то область, для которой ставится краевая задача, при этом остается неизменной. Последующие доказательства проводятся для пространства 3-х измерений, хотя метод относится к любому числу измерений.

[2] Доказательство этих утверждений, даже в форме несколько более общей, дается в основной теореме § 2 настоящей работы. См. также примечание [15].

[3] Доказательство этих хорошо известных свойств интеграла Poisson'a для двух переменных x и t см., например, *Goursat. Cours d'Analyse*, Vol. III, ch. XXIX.

[4] Действительно, рассмотрим функцию $u_1^*(P, t)$, определенную на $\bar{\mathfrak{G}}$ при $t \geq t_0$, где $t_0 < 0$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности для $P \subset \mathfrak{G}$, $t > t_0$ и условиям

$$u_1^*(P, t_0) = 0 \quad (\text{для } P \subset \bar{\mathfrak{G}}),$$

$$u_1^*(P, t) = 0 \quad (\text{для } P \subset C, t_0 \leq t \leq 0),$$

$$u_1^*(P, t) = u_1(P, t) \quad (\text{для } P \subset C, 0 \leq t).$$

Очевидно, в силу теоремы единственности, что $u_1^*(P, t) = u_1(P, t)$ при $t \geq 0$, чем и доказано, что Δu_1 непрерывен при $t = 0$.

[5] Относительно функции $\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{PP'}} \exp(-\mu r_{PP'})$ и свойств потенциалов, образованных при помощи этой функции см., например, *Стеклов. Основные задачи математической физики*. Ч. II, гл. V.

[6] Аналогичным методом доказывается следующая

Теорема. Если функция $G(P, \lambda)$, удовлетворяющая уравнению $L(u) = 0$ внутри фундаментальной для этого уравнения области \mathfrak{G} , принимает на границе ее C значения $\varphi(P, \lambda)$ непрерывные и дифференцируемые по λ k раз, то существуют также производные $G(P, \lambda)$ по λ до порядка k , являющиеся непрерывными функциями P в $\bar{\mathfrak{G}}$.

[7] См., например, цитированную в [5] книгу *Стеклова* или более подробно, статью *Petrini. Sur les dérivées premières et secondes du potentiel // Acta Math.* — 1908. — V. XXXI. — P. 127.

[8] Применение теории Hilbert'a-Schmidt'a дает, что только для счетного числа значений $\lambda: \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ область \mathfrak{G} не является фундаментальной для уравнения $\Delta u - \lambda u = 0$, причем, как доказано, все λ_i отрицательны.

[9] *Rothe E. Wärmeleitungsgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten I Math. Ann.* — 1931. — B. 104. — S. 340.

[10] В цитированной работе *E. Rothe* функция φ полагается равной нулю, что не является ограничением, так как там рассматривается неоднородное уравнение. Однако при сделанных предположениях о функции φ теорема доказывается тем же методом без каких-либо изменений.

[11] См. цитированную в [9] статью *E. Rothe*, Hilfsätze, I und II.

[12] В настоящем параграфе мы не будем более предполагать, что \mathfrak{G} является фундаментальной областью.

[13] Будем обозначать, как обычно,

$$\underline{u}(P_0, t_0) = \lim_{\delta(v) \rightarrow 0} \left[\inf_v u(P, t) \right]; \quad \overline{u}(P_0, t_0) = \lim_{\delta(v) \rightarrow 0} \left[\sup_v u(P, t) \right],$$

где v — некоторая окрестность точки (P_0, t_0) в пространстве четырех измерений x, y, z, t и $\delta(v)$ — диаметр этой окрестности. Равенство $u(P, t) = a$ (a — некоторое число) мы понимаем в том смысле, что

$$\underline{u}(P, t) = \overline{u}(P, t) = a.$$

[14] Функция

$$U(x, t) = \frac{x}{(\sqrt{t})^3} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

как известно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

и условиям

$$U(0, t) = 0 \quad (t \geq 0); \quad U(x, 0) = 0 \quad (x > 0).$$

Но $U(x, t) \not\equiv 0$. Легко построить аналогичные примеры в пространстве. Рассмотрим какую-либо фундаментальную область \mathfrak{G} и ограниченную функцию $U(P, t)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{внутри } \mathfrak{G} \text{ и для } t > 0)$$

и условиям

$$U(P, 0) = 1,$$

$$U(P, t) = 0 \quad (\text{на границе}).$$

Сопоставляя результаты §§ 1 и 3, нетрудно доказать, что существует производная этой функции

$$U_1(P, t) = \frac{\partial U}{\partial t}(P, t) \quad (\text{всюду, кроме } P \in C, t = 0),$$

являющаяся решением уравнения теплопроводности, удовлетворяющим условиям

$$U_1(P, 0) = 0 \quad (P \in \mathfrak{G}),$$

$$U_1(P, t) = 0 \quad (P \in C, t > 0),$$

причем, очевидно, что $U_1(P, t) \neq 0$.

[15] Ввиду простоты мы воспроизведем

Доказательство. Пусть

$$U(P_0, t_0) > \bar{m}, \quad P_0 \in \mathfrak{G}, \quad t_0 > t_1.$$

Рассмотрим функцию

$$v(P, t) = U(P, t) - k(t - t_0),$$

где $k > 0$ и столь мало, чтобы функция $v(P, t)$ на множестве

$$P \in \bar{\mathfrak{G}}, \quad t_1 \leq t \leq t_0$$

достигала максимума в точке

$$\bar{P}_0, \bar{t}_0, \quad \bar{P}_0 \in \mathfrak{G}, \quad \bar{t}_0 > t_1.$$

Тогда в этой точке

$$\Delta v \leq 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial t} \geq 0$$

и

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta U - \frac{\partial U}{\partial t} + k \leq 0,$$

что противоречит предположению, так как в этой точке

$$\Delta U - \frac{\partial U}{\partial t} + k = k > 0.$$

Доказательство для минимума аналогично. Сравни *Petrowsky J. Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung // Compos. Math. — 1935. — V. 1. — P. 383.*

[16] Это построение подобно построению функции Грина для уравнения $\Delta u - \lambda u = 0$ ($\lambda \geq 0$), приведенному в § 1.

[17] Аналогичным методом доказывается следующая

Теорема. Если функция $U(P, t; \lambda)$, удовлетворяющая уравнению теплопроводности внутри фундаментальной для этого уравнения области \mathfrak{G} , принимает на границе S этой области и при $t = 0$ непрерывные значения, дифференцируемые по λ k раз, то существуют также производные $U(P, t; \lambda)$ по λ до порядка k , являющиеся непрерывными функциями P, t и λ .

[18] См. *Geurey*, Equations aux dérivées partielles du type parabolique // Journ. de math. pures et appl. (6). — 1913. — V. 9. — P. 410.

[19] По поводу поверхностей типа Ляпунова см., например, *Gunter N.* La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique, Ch. I — Gauthier-Villars, 1934.

[20] См. *Gunter N.*, op. cit., p. 25.

[21] Эти свойства потенциалов хорошо известны и многократно доказывались. См., например, *Levi E. E.* // Annali de Matematica. — 1908. *Geurey*, op. cit. [18], но ввиду простоты доказательств, мы воспроизведем их для полноты изложения.

[22] Отметим, что

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha^2) \alpha^2 d\alpha = \left[-\frac{1}{2} \cdot \exp(-\alpha^2) \cdot e \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha^3) d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Поступила в редакцию
7 апреля 1937 г.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕРМОПАРЫ

А. Н. Тихонов

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 21 VIII 1935)

Всякий прибор, внесенный в физическое поле для измерения его величины, вносит с собой изменение поля. Показания прибора дают нам, вообще говоря, действительную величину измененного поля, а не ту, которая нас должна интересовать, т. е. которая была бы, если бы естественный ход поля не нарушался внесенным в него прибором.

При измерении температуры поля термопарой происходит отток тепла из поля в термопару, что и вызывает изменение температурного поля (отмеченное обстоятельство имеет тем большее влияние, чем меньше теплопроводность измеряемого тела). Это явление чистой теплопроводности осложняется тем обстоятельством, что при прохождении возникающего в термопаре электрического тока через спай (явление Peltier), также и вдоль всей проволоки (джоулево тепло) происходит выделение тепла.

Нашей задачей является установить соотношение между наблюдаемой температурой $u^*(t)$ в точке измерения и температурой $u^*(t)$, которая была бы в этой точке, если бы температура поля не подвергалась изменению, зависящему от перечисленных обстоятельств:

- 1) начальное тепловое состояние термопары и теплоотток в термопару.
- 2) явление Peltier,
- 3) выделение в термопаре джоулева тепла.

Будем считать, что измеряется температура однородной проволоки бесконечной длины. Термопару будем представлять в виде двух спаянных на концах однородных (но различных) проволок бесконечной длины, причем один спай (находящийся в бесконечности) поддерживается при постоянной (нулевой) температуре, а другой в некоторый момент $t = 0$ соприкасается с точкой проволоки, температуру которой измеряем.

Относительно термопары мы сделаем следующие предположения.

1. Если разность температур равна u , то в термопаре возникает электрический ток силы $i = \varphi(u)$.

2. Если через спай проходит электрический ток силы i в течение промежутка времени Δt , то в нем выделяется количество тепла $Q = F(i) \cdot \Delta t$ (явление Peltier).

3. Если через термопару проходит электрический ток силы i в течение промежутка времени Δt , то на единицу длины первой проволоки выделяется количество тепла, равное $f_1 \cdot \Delta t$, а на единицу длины второй проволоки $f_2 \cdot \Delta t$.

Обычно считают, что такие функции имеют вид

$$\varphi(u) = \alpha \cdot u; \quad F(i) = \beta \cdot i; \quad f_1(i) = \gamma_1 \cdot i^2; \quad f_2(i) = \gamma_2 \cdot i^2,$$

где $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ постоянны, но нам нет в этом никакой необходимости, и мы будем принимать, что они являются некоторыми непрерывными функциями своих аргументов.

Уравнения распределения температур в проволоках термопары будут:

$$k_j \frac{\partial^2 u_j(x, t)}{\partial x^2} + f_j[\varphi[u_j(0, t)]] = c_j \rho_j \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t}, \quad (j = 1, 2) \quad (1), (2)$$

где $k_1, k_2, c_1, c_2, \rho_1, \rho_2$ — соответствующие физические постоянные.

Пусть $\overline{u(x, t)}$ — температура проволоки без изменений, вносимых термопарой. Эта функция могла бы быть определена при помощи значений $u(x, 0)$ (т. е. в момент начала измерений) и уравнения теплопроводности

$$k \frac{\partial^2 \overline{u(x, t)}}{\partial x^2} = c \rho \frac{\partial \overline{u(x, t)}}{\partial t}; \quad (3)$$

k, c, ρ — константы изучаемой проволоки.

$u(x, t)$, действительная температура проволоки, удовлетворяет тому же уравнению (3) для всех $x \neq 0$; при $x = 0$, т. е. в точке измерения, имеет место отток тепла.

Пусть $q_0(t)$ — поток тепла через точку $x = 0$; тогда

$$k \left[\frac{\partial u(\varepsilon, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(-\varepsilon, t)}{\partial x} \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} q_0(t). \quad (4)$$

Условия, связывающие температуры проволоки и термопары, состоят из двух частей.

Во-первых, мы должны приравнять температуры проволоки и термпары в точке измерения.

Во-вторых, подсчитать тепловые потоки в этой точке, притекающие и вытекающие.

Эти условия дают

$$u_1(0, t) = u_2(0, t) = u(0, t) [= u^*(t)], \quad (5)$$

$$q_0(t) + Q(t) = q_1(t) + q_2(t), \quad (6)$$

где

$$q_j(t) = -k_j \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (j = 1, 2) \quad (7), (8)$$

тепловые потоки в проволоке термпары и

$$Q(t) = F[\varphi[u^*(t)]] \quad (9)$$

тепло, возникающее в спае.

Кроме того, должны быть удовлетворены начальные условия

$$u(x, 0) = \overline{u(x, 0)}; \quad u_1(x, 0) = \psi_1(x); \quad u_2(x, 0) = \psi_2(x), \quad (10)$$

где $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — заданные функции, представляющие начальное тепловое состояние термпары.

Таким образом, мы должны решить систему уравнений (1), (2), (3)

$$\left. \begin{aligned} k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - c\rho \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= 0; \quad (x \neq 0) \\ k_1 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - c_1\rho_1 \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} &= -f_1[\varphi[u_1(0, t)]]; \\ k_2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} - c_2\rho_2 \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} &= -f_2[\varphi[u_2(0, t)]] \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

с условиями (5), (6)

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= u_1(0, t) = u_2(0, t), \\ q_0(t) + Q(t) &= q_1(t) + q_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

где $q_0(t), q_1(t), q_2(t), Q(t)$ определяются формулами (4), (7), (8), (9) и начальными условиями (10):

$$u(x, 0) = \overline{u(x, 0)}; \quad u_1(x, 0) = \psi_1(x); \quad u_2(x, 0) = \psi_2(x). \quad (C)$$

Нетрудно видеть, что

$$u(x, t) = \overline{u(x, t)} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a}{\sqrt{t-\tau}} \exp \left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \frac{q_0(\tau)}{k} d\tau, \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho} \right), \quad (11)$$

так как в этом случае $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (3), условию (4) и имеет начальное значение $u(x, 0) = \overline{u(x, t)}$.

Функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ берутся в виде

$$\begin{aligned} u_j = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{a_j}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_j^2(t-\tau)} \right] - \right. \\ & \left. - \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a_j^2(t-\tau)} \right] \right\} \frac{1}{c_j\rho_j} f_j[\varphi[u_j(0, \tau)]] d\xi d\tau + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a_j}{\sqrt{t-\tau}} \exp \left[-\frac{x^2}{4a_j^2(t-\tau)} \right] \mu_j(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{a_j}{\sqrt{t}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_j^2 t} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a_j^2 t} \right] \right\} \psi_j(\xi) d\xi, \\ & \left(a_j^2 = \frac{k_j}{c_j\rho_j} \right), \quad (j = 1, 2), \quad (12) \end{aligned}$$

где $\mu_j(\tau)$ — неизвестные функции; причем для того, чтобы удовлетворялось условие (5), нужно, чтобы

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = a_2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \\ = \overline{u(0, t)} - \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{q_0(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad [= u^*(t)]. \quad (13) \end{aligned}$$

Вычислим

$$\begin{aligned}
 q_j(t) &= -k \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{k_j}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{\xi}{2a_j(t-\tau)^{3/2}} \times \\
 &\quad \times \exp \left[-\frac{\xi^2}{4a_j^2(t-\tau)} \right] \frac{1}{c_j \rho_j} f_j[\varphi[u_j(0, \tau)]] d\xi d\tau + \frac{1}{2} k_j \mu_j(\tau) - \\
 &\quad - \frac{k_j}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{2a_j t^{3/2}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{4a_j^2 t} \right] \psi_j(\xi) d\xi = -\frac{k_j a_j}{c_j \rho_j} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_j[\varphi[u_j(0, \tau)]]}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_j \mu_j(\tau) - \frac{k_j}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{2a_j t^{3/2}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{4a_j^2 t} \right] \psi_j(\xi) d\xi. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (6) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
 q_0(t) &= \frac{1}{2} k_1 \mu_1(\tau) + \frac{1}{2} k_2 \mu_2(\tau) - \frac{k_1 a_1}{c_1 \rho_1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_1[\varphi[u(0, \tau)]]}{\sqrt{t-\tau}} d\tau - \\
 &\quad - \frac{k_2 a_2}{c_2 \rho_2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_2[\varphi[u(0, \tau)]]}{\sqrt{t-\tau}} d\tau - \frac{k_1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{2a_1 t^{3/2}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{4a_1^2 t} \right] \psi_1(\xi) d\xi - \\
 &\quad - \frac{k_2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{2a_2 t^{3/2}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{4a_2^2 t} \right] \psi_2(\xi) d\xi - F[\varphi[u(0, \tau)]]. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Исключим из уравнений (13) и (15) все неизвестные функции $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$.

Установим предварительно некоторые соотношения

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad &\int_0^T \frac{1}{\sqrt{T-t}} \left\{ \int_0^t \frac{f[\varphi[u(0, \tau)]]}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right\} dt = \\
 &= \int_0^T f[\varphi[u(0, \tau)]] \left\{ \int_\tau^T \frac{dt}{\sqrt{(T-t)(t-\tau)}} \right\} d\tau = \pi \int_0^T f[\varphi[u(0, \tau)]] d\tau.
 \end{aligned}$$

(b) Если некоторая ограниченная функция удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (0 \leq x < \infty),$$

то

$$v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \left[-2 \frac{\partial v(0, \tau)}{\partial x}\right] d\tau.$$

Положим

$$v(x, t) = \frac{a}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right] \quad (\xi > 0).$$

Эта функция ограничена и удовлетворяет уравнению теплопроводности, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right] &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \left\{ \frac{\xi}{a\tau^{3/2}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2\tau}\right] \right\} d\tau. \end{aligned}$$

В частности, при $x = 0$

$$\frac{a}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right] \equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \frac{\xi}{a\tau^{3/2}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2\tau}\right] \right\} d\tau.$$

Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T-t}} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{at^{3/2}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right] \psi(\xi) d\xi \right\} dt = \\ = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2T}\right] \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Пользуясь последним звеном равенства (13) и (а) и (б), непосредственно получаем

$$\begin{aligned}
 \overline{u(0, t)} &= \overline{u^*(t)} = u(0, t) + \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{q_0(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \\
 &= u(0, t) + \frac{ak_1}{2k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \frac{ak_2}{2k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau - \\
 &- \frac{aa_1^3}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^T f_1[\varphi[u(0, \tau)]] d\tau - \frac{aa_2^3}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^T f_2[\varphi[u(0, \tau)]] d\tau - \\
 &- \frac{ak_1}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a_1^2 t}\right] \psi_1(\xi) d\xi - \\
 &- \frac{ak_2}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a_2^2 t}\right] \psi_2(\xi) d\xi - \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{F[\varphi[u(0, \tau)]]}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.
 \end{aligned}$$

Как уже упоминалось, функции φ , f_1 , f_2 , F имеют вид

$$\varphi(u) = \alpha \cdot u; \quad F(i) = \beta \cdot i; \quad f_1(i) = \gamma_1 \cdot i^2; \quad f_2(i) = \gamma_2 \cdot i^2.$$

Так что можно получить

$$\begin{aligned}
 \overline{u^*(t)} &= u^*(t) \left[1 + \frac{a}{2k} \left(\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2} \right) \right] - \frac{aa_1^3}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^T f_1[\varphi[u(0, \tau)]] d\tau - \\
 &- \frac{aa_2^3}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^T f_2[\varphi[u(0, \tau)]] d\tau - \frac{ak_1}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a_1^2 t}\right] \psi_1(\xi) d\xi - \\
 &- \frac{ak_2}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a_2^2 t}\right] \psi_2(\xi) d\xi - \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{F[\varphi[u(0, \tau)]]}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.
 \end{aligned}$$

В таком случае

$$\begin{aligned} \overline{u^*(t)} = u^*(t) & \left[1 + \frac{a}{2k} \left(\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2} \right) \right] + \\ & + \frac{a}{k} \cdot \frac{\alpha^2}{2\sqrt{\pi}} (\gamma_1 a_1^3 + \gamma_2 a_2^3) \int_0^t u^*(\tau)^2 d\tau + \frac{a}{k} \cdot \frac{\alpha\beta}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u^*(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \\ & + \frac{a}{k} \left\{ \frac{k_1}{a_1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{4a_1^2 t} \right] \psi_1(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. - \frac{k_2}{a_2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{a_1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{4a_2^2 t} \right] \psi_2(\xi) d\xi \right\}. \end{aligned}$$

Это и есть выражение функции $\overline{u^*(t)}$, представляющей искомую температуру, через $u^*(t)$, температуру наблюдаемую. Первое слагаемое в этом выражении представляет поправку на чистый отток тепла, если начальная температура термопары равна нулю, т. е. температуре конца, поддерживаемого при постоянной температуре, второе — поправку на джоулево тепло, третье — на явление Peltier и, наконец, четвертое — на начальное распределение тепла в термопаре.

В частности, если проволока, температура которой измеряется, одинакового качества с термопарой, т. е. их константы a и k одинаковы, начальные распределения

$$\psi_1(\xi) = \psi_2(\xi) = 0,$$

т. е. равны той температуре, при которой поддерживается второй конец, и мы пренебрегаем эффектом джоулева тепла и явления Peltier, то

$$\overline{u^*(t)} = 2u^*(t).$$

Итак, при указанных условиях мгновенно устанавливается постоянная температура, равная 50% той, которую мы определяем.

Научно-исследовательский институт математики
при Московском государственном университете

Поступило 27 VII 1935

THÉORIE MATHÉMATIQUE DU COUPLE THERMOÉLECTRIQUE

Par A. Tichonov (Tychonoff)

(Présenté par S. N. Bernstein, de l'Académie, le 21. VIII. 1935)

Tout appareil qu'on introduit dans un champ physique pour en mesurer l'intensité provoque une certaine altération de ce champ. Notre appareil nous donne donc l'intensité du champ modifié et non pas celle du champ initial qui nous intéresse en réalité.

Quand on mesure la température à l'aide du couple thermoélectrique une partie de la chaleur passe dans le couple, d'où provient une certaine altération du champ thermique (l'influence de ce fait est d'autant plus grande que la conductibilité du corps est plus faible). Ce phénomène purement thermique se complique par le fait que le courant électrique produit un dégagement de chaleur en passant par la soudure du couple thermoélectrique (effet de Peltier) de même qu'en passant le long du fil (chaleur de Joule).

Nous voulons établir la relation entre la température $u^*(t)$ observée et la température $\overline{u^*(t)}$ qui existerait en ce point sans l'altération causée par les facteurs susmentionnés:

- 1) l'état thermique initial du couple et l'écoulement de chaleur qui s'y dirige;
- 2) l'effet de Peltier;
- 3) le dégagement de la chaleur de Joule.

Soit à mesurer la température d'un fil homogène infini, le couple thermoélectrique se composant de deux fils infinis homogènes (mais différents) dont les extrémités soient soudées; l'une d'entre elles (celle qui se trouve à l'infini) maintenue à une température constante (zéro), et la seconde mise à un moment $t = 0$ en contact avec le point dont on veut savoir la température.

Nous ferons de plus les suppositions suivantes:

1. Si la différence de température des deux soudures est u il se produit dans le couple un courant électrique d'intensité $i = \varphi(u)$
2. Le courant d'intensité i passant par la soudure durant le temps Δt produit une certaine quantité de chaleur $Q = F(i) \cdot \Delta t$ (effet de Peltier).
3. Le courant d'intensité i passant par le premier fil du couple durant le temps Δt produit une quantité de chaleur égale à $f_1(i) \cdot \Delta t$ et celui passant par le second fil la quantité $f_2(i) \cdot \Delta t$.

Ordinairement on admet que ces fonctions sont de la forme de

$$\varphi(u) = \alpha \cdot u; \quad F(i) = \beta \cdot i; \quad f_1(i) = \gamma_1 \cdot i^2; \quad f_2(i) = \gamma_2 \cdot i^2,$$

$\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ étant des constantes. Mais nous n'avons pas besoin de cette restriction et supposons seulement que ce sont des fonctions continues de leurs arguments.

Les équations de la distribution de la chaleur dans les fils du couple thermoélectrique sont

$$k_j \frac{\partial^2 u_j(x, t)}{\partial x^2} + f_j[\varphi[u_j(0, t)]] = c_j \rho_j \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t}, \quad (j = 1, 2) \quad (1), (2)$$

$k_1, k_2, c_1, c_2, \rho_1, \rho_2$ étant des constantes physiques.

Soit $\overline{u(x, t)}$ la température qu'aurait le fil sans l'altération due à l'introduction du couple. Cette fonction pourrait être définie par les valeurs $\overline{u(x, 0)}$ qu'elle prend au moment quand on commence la mesure, et par l'équation de la chaleur

$$k \frac{\partial^2 \overline{u(x, t)}}{\partial x^2} = c \rho \frac{\partial \overline{u(x, t)}}{\partial t}; \quad (3)$$

où k, c, ρ — sont des constantes du fil.

La température réelle du fil $u(x, t)$ satisfait à la même équation (3) pour tous les $x \neq 0$; pour $x = 0$ (au point de la mesure) il se produit un écoulement de chaleur dans le couple. Soit $q_0(t)$ le flux à travers le point $x = 0$; nous avons

$$q_0(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k \left[\frac{\partial u(\varepsilon, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(-\varepsilon, t)}{\partial x} \right]. \quad (4)$$

Les conditions par lesquelles sont liées les températures du fil et du couple thermoélectrique se composent de deux parties: premièrement il faut égaler les

températures du fil et du couple en leur point de contact; en second lieu, il faut évaluer les quantités de chaleur qui affluent en ce point et qui en partent.

Ces conditions nous donnent:

$$u_1(0, t) = u_2(0, t) = u(0, t) [= u^*(t)] \quad (5)$$

$$q_0(t) + Q(t) = q_1(t) + q_2(t) \quad (6)$$

où

$$q_j(t) = -k_j \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (j = 1, 2) \quad (7), (8)$$

sont les flux de chaleur dans les fils du couple et

$$Q(t) = F[\varphi[u^*(t)]] \quad (9)$$

la chaleur dégagée dans la soudure.

De plus on doit satisfaire aux conditions initiales

$$u(x, 0) = \overline{u(x, 0)}; \quad u_1(x, 0) = \psi_1(x); \quad u_2(x, 0) = \psi_2(x) \quad (10)$$

où $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ sont des fonctions données caractérisant l'état thermique initial du couple thermoélectrique.

Nous avons donc à résoudre le système (A) d'équations (1), (2), (3)

$$\left. \begin{aligned} k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - c\rho \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= 0; \quad (x \neq 0) \\ k_1 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - c_1\rho_1 \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} &= -f_1[\varphi[u_1(0, t)]]; \\ k_2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} - c_2\rho_2 \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} &= -f_2[\varphi[u_2(0, t)]] \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

avec les conditions

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= u_1(0, t) = u_2(0, t), \\ q_0(t) + Q(t) &= q_1(t) + q_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

les fonctions $q_0(y)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$, $Q(t)$ étant définies par les formules (4), (7), (8), (9) et les conditions initiales (10):

$$u(x, 0) = \overline{u(x, 0)}; \quad u_1(x, 0) = \psi_1(x); \quad u_2(x, 0) = \psi_2(x). \quad (C)$$

Si l'on prend

$$u(x, t) = \overline{u(x, t)} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \frac{q_0(\tau)}{k} d\tau, \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right), \quad (11)$$

la fonction $u(x, t)$ satisfait à l'équation (3), à la condition (4) et possède les valeurs initiales requises.

Les fonctions $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$ sont à prendre sous la forme

$$\begin{aligned} u_j = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{a_j}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_j^2(t-\tau)}\right] - \right. \\ & \left. - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a_j^2(t-\tau)}\right] \right\} \frac{1}{c_j\rho_j} f_j[\varphi[u_j(0, \tau)]] d\xi d\tau + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a_j}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a_j^2(t-\tau)}\right] \mu_j(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{a_j}{\sqrt{t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_j^2 t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a_j^2 t}\right] \right\} \psi_j(\xi) d\xi, \\ & \left(a_j^2 = \frac{k_j}{c_j\rho_j}\right), \quad (j = 1, 2), \quad (12) \end{aligned}$$

où $\mu_j(t)$ ($j = 1, 2$) sont des fonctions inconnues; pour que la condition (5) soit remplie, il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau &= a_2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \\ &= \overline{u(0, t)} - \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{q_0(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad [= u^*(t)]. \quad (13) \end{aligned}$$

Évaluons $q_j(t)$ ($j = 1, 2$)

$$\begin{aligned}
 q_j(t) &= -k \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{k_j}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{\xi}{2a_j(t-\tau)^{3/2}} \times \\
 &\quad \times \exp \left[-\frac{\xi^2}{4a_j^2(t-\tau)} \right] \frac{1}{c_j\rho_j} f_j[\varphi[u_j(0, \tau)]] d\xi d\tau + \frac{1}{2}k_j\mu_j(\tau) - \\
 &\quad - \frac{k_j}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{2a_j t^{3/2}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{4a_j^2 t} \right] \psi_j(\xi) d\xi = -\frac{k_j a_j}{c_j\rho_j} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_j[\varphi[u_j(0, \tau)]]}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \\
 &\quad + \frac{1}{2}k_j\mu_j(\tau) - \frac{k_j}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{2a_j t^{3/2}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{4a_j^2 t} \right] \psi_j(\xi) d\xi. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Donc l'équation (6) peut s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned}
 q_0(t) &= \frac{1}{2}k_1\mu_1(\tau) + \frac{1}{2}k_2\mu_2(\tau) - \frac{k_1 a_1}{c_1\rho_1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_1[\varphi[u(0, \tau)]]}{\sqrt{t-\tau}} d\tau - \\
 &\quad - \frac{k_2 a_2}{c_2\rho_2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_2[\varphi[u(0, \tau)]]}{\sqrt{t-\tau}} d\tau - \frac{k_1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{2a_1 t^{3/2}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{4a_1^2 t} \right] \psi_1(\xi) d\xi - \\
 &\quad - \frac{k_2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{2a_2 t^{3/2}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{4a_2^2 t} \right] \psi_2(\xi) d\xi - F[\varphi[u(0, \tau)]]. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant éliminer des équations (13) et (15) les fonctions inconnues $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$.

Nous utiliserons à cet effet les deux remarques suivantes:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad &\int_0^T \frac{1}{\sqrt{T-t}} \left\{ \int_0^t \frac{f[\varphi[u(0, \tau)]]}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right\} dt = \\
 &= \int_0^T f[\varphi[u(0, \tau)]] \left\{ \int_\tau^T \frac{dt}{\sqrt{(T-t)(t-\tau)}} \right\} d\tau = \pi \int_0^T f[\varphi[u(0, \tau)]] d\tau.
 \end{aligned}$$

(b) Pour toute fonction bornée satisfaisant à l'équation de la conductibilité calorifique

$$a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (0 \leq x < \infty),$$

on a

$$v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \left[-2 \frac{\partial v(0, \tau)}{\partial x}\right] d\tau.$$

Cela posé, considérons

$$v(x, t) = \frac{a}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right] \quad (\xi > 0).$$

cette fonction est bornée et satisfait à l'équation de la conductibilité calorifique, donc

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right] &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \left\{ \frac{\xi}{a\tau^{3/2}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2\tau}\right] \right\} d\tau. \end{aligned}$$

En particulier pour $x = 0$ nous obtenons

$$\frac{a}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right] \equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \frac{\xi}{a\tau^{3/2}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2\tau}\right] \right\} d\tau.$$

De là on conclut que

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T-t}} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{at^{3/2}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right] \psi(\xi) d\xi \right\} dt = \\ = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2T}\right] \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

En utilisant le dernier membre de l'égalité (13) et les remarques (a), (b) on voit immédiatement

$$\begin{aligned}
 \overline{u(0, t)} &= \overline{u^*(t)} = u(0, t) + \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{q_0(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \\
 &= u(0, t) + \frac{ak_1}{2k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \frac{ak_2}{2k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau - \\
 &- \frac{aa_1^3}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^T f_1[\varphi[u(0, \tau)]] d\tau - \frac{aa_2^3}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^T f_2[\varphi[u(0, \tau)]] d\tau - \\
 &- \frac{ak_1}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a_1^2 t}\right] \psi_1(\xi) d\xi - \\
 &- \frac{ak_2}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a_2^2 t}\right] \psi_2(\xi) d\xi - \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{F[\varphi[u(0, \tau)]]}{\sqrt{t-\tau}} d\tau
 \end{aligned}$$

ou, en définitive,

$$\begin{aligned}
 \overline{u^*(t)} &= u^*(t) \left[1 + \frac{a}{2k} \left(\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2} \right) \right] - \frac{aa_1^3}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^T f_1[\varphi[u(0, \tau)]] d\tau - \\
 &- \frac{aa_2^3}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^T f_2[\varphi[u(0, \tau)]] d\tau - \frac{ak_1}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a_1^2 t}\right] \psi_1(\xi) d\xi - \\
 &- \frac{ak_2}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a_2^2 t}\right] \psi_2(\xi) d\xi - \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{F[\varphi[u(0, \tau)]]}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.
 \end{aligned}$$

Nous avons déjà mentionné que les fonctions φ , f_1 , f_2 , F ont la forme de:

$$\varphi(u) = \alpha \cdot u; \quad F(i) = \beta \cdot i; \quad f_1(i) = \gamma_1 \cdot i^2; \quad f_2(i) = \gamma_2 \cdot i^2.$$

Dans ce cas on obtient

$$\begin{aligned} \overline{u^*(t)} = & u^*(t) \left[1 + \frac{a}{2k} \left(\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2} \right) \right] + \\ & + \frac{a}{k} \cdot \frac{\alpha^2}{2\sqrt{\pi}} (\gamma_1 a_1^3 + \gamma_2 a_2^3) \int_0^t u^*(\tau)^2 d\tau + \frac{a}{k} \cdot \frac{\alpha\beta}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u^*(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \\ & + \frac{a}{k} \left\{ \frac{k_1}{a_1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{4a_1^2 t} \right] \psi_1(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. - \frac{k_2}{a_2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{a_1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{4a_2^2 t} \right] \psi_2(\xi) d\xi \right\}. \end{aligned}$$

C'est bien la forme de la fonction $\overline{u^*(t)}$ qui représente la température cherchée en termes de $u^*(t)$, température mesurée. Le premier membre dépend seulement de la perte de chaleur qui aurait lieu si la température initiale du couple thermoélectrique était égale à zéro, c.-à-d. à la température de la soudure maintenue à un niveau fixe; le second dépend de la chaleur de Joule, le troisième de l'effet de Peltier, et enfin le quatrième de la distribution initiale de la chaleur dans le couple.

En particulier, si le fil dont on mesure la température a les mêmes qualités thermiques que le couple, c.-à-d. si leurs constantes a , k sont égales et si les distributions initiales sont

$$\psi_1(\xi) = \psi_2(\xi) = 0,$$

c.-à-d. si la température dans tous les points du couple thermoélectrique est égale à celle de la soudure à l'infini, et si l'on néglige les effets de Peltier et de Joule, — alors on a

$$\overline{u^*(t)} = u^*(t) \cdot 2.$$

Donc, dans ces conditions s'établit instantanément une température constante égale à 50% de celle qu'on veut déterminer.

Unstitut de Mathématiques
de l'Université de Moscou

К СТАТЬЕ М. А. ВЕЛИКАНОВА «ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА»

А. Тихонов
(Москва)

Целью настоящей заметки является устранение некоторой неточности, допущенной при выводе уравнений стока в статье М. А. Великанова¹⁾.

Рассмотрим какую-либо смачиваемую поверхность. Для изучения явления стока воды по этой поверхности выберем на ее карте криволинейные координаты x и y следующим образом. Пусть $x = \text{const}$ — уравнение горизонталей поверхности, а $y = \text{const}$ — уравнение линий стока — ортогональных траекторий к семейству $x = \text{const}$. Пусть $\xi = \varphi(xy)$ и $\eta = \psi(xy)$ являются декартовыми координатами карты, так что в формуле линейного элемента длины

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

коэффициенты имеют следующее значение²⁾:

$$E = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$G = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2.$$

Журнал геофизики. — 1933. — Т. III, вып. 1. — С. 86–92.

¹⁾См. Великанов М. А. Гидромеханический анализ поверхностного стока // Журнал геофизики. — 1931. № 1–2. — С. 193–206. *Примеч. редактора:* член-корреспондент АН СССР М. А. Великанов — ученик академика А. Н. Колмогорова, ведущий советский гидролог.

²⁾ $F = 0$, так как линии $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ ортогональны.

Площадь элемента, ограниченного линиями x , $x + dx$, y , $y + dy$ равна $d\omega = I dx dy$ (где $I = \frac{D(\xi, \eta)}{D(xy)}$ — детерминант Якоби).

Обратимся к подсчету баланса влаги в элементе поверхности, расположенном над $MM'M''M'''$, бесконечно малом элементе карты (рис. 1).

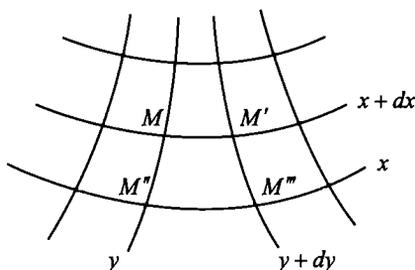


Рис. 1

Обозначим через h смачивание по отношению к единице площади карты за единицу времени, через p — интенсивность потерь и q — интенсивность поверхностного стекания, т. е. количества влаги, протекающей в единицу времени через единицу длины горизонтали поверхности в направлении убывающих значений x .

За промежуток времени dt над стороной $M''M'''$ протекает количество влаги, равное

$$q(xy) \cdot \sqrt{G} dy dt,$$

так как длина горизонтали, проектирующейся в $M''M'''$, равна длине $M''M'''$, которая равна $\sqrt{G} dy$. Количество влаги, протекающее над MM' , равно:

$$q(x + dx, y) \cdot \sqrt{G(x + dx, y)} \cdot dy dt.$$

Таким образом над элементом $MM'M''M'''$ остается количество влаги, равное

$$\frac{\partial}{\partial x} (q\sqrt{G}) dx dy dt = \frac{\partial}{\partial x} (q\sqrt{G}) \frac{d\omega}{I} dt.$$

Изменение количества влаги за счет смачивания и потерь в элементе поверхности, расположенном над $MM'M''M'''$, равно:

$$(h - p) d\omega dt,$$

так как h и p — величины смачивания и потерь, отнесенные к единице площади карты.

Обозначим через $z(x, y, t)$ толщину стекающего слоя, измеряемую в направлении, перпендикулярном плоскости карты.

Тогда приращение количества влаги над элементом $MM'M''M'''$ за промежуток времени dt равно:

$$\frac{\partial z}{\partial t} dw dt.$$

Сопоставляя полученные результаты, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{I} \frac{\partial}{\partial x} (q\sqrt{G}) + (h - p),$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{I} \sqrt{G} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + (h - p) + \frac{q}{I} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{G}).$$

Это уравнение совпадает с данным М. А. Великановым, если поверхность такова, что y можно принять за длину горизонталей.

Предположим, следуя М. А. Великанову, что зависимость между скоростью, толщиной стекающего слоя и углом наклона поверхности выражается следующей формулой:

$$bv^2 = giz,$$

где b — коэффициент «шероховатости» поверхности.

Кроме того,

$$q = z \cdot v,$$

откуда получаем:

$$z = \frac{b}{gi} v^2, \quad q = \frac{b}{gi} v^3.$$

Подставляя эти величины в уравнение стока, получим:

$$2v \frac{\partial v}{\partial t} - 3v^2 \frac{\sqrt{G}}{I} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{gi}{b} (h - p) + \frac{v^2}{I} \cdot \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x}.$$

Изучим подробнее сток с наклонной полуплоскости. Горизонтالي этой поверхности — линии $x = \text{const}$, линии стока $y = \text{const}$ (рис. 2).

Масштаб на карте мы можем выбрать таким образом, чтобы x являлось расстоянием по оси x , а y — расстоянием по оси y ; тогда $dw = dx dy$, $I = 1$, $G = 1$.

Начальные условия задачи таковы: при $t = 0$ и произвольном x ($x > 0$) $v = 0$, так как в начальный момент на всей плоскости отсутствует стекание; при $x = 0$ и любом t ($t > 0$) $v = 0$.

Величина y не входит в наше уравнение, так что мы можем говорить, что изучаем сток вдоль наклонной линии.

Для решения задачи мы должны взять характеристики, проходящие через начальную кривую, состоящую из положительной полуоси x и положительной полуоси t (рис. 3).

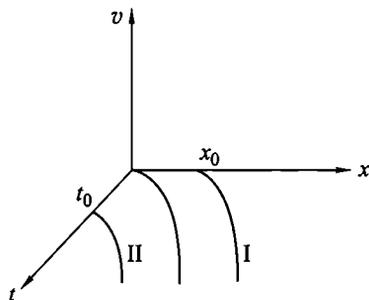


Рис. 3

Через точку $x_0 = \alpha$ ($\alpha > 0$), $t_0 = 0$, $v_0 = 0$ проходит характеристика:

$$v^2 = \frac{gia}{b} \cdot t, \quad v^3 = \frac{gia}{b} \cdot (x - \alpha).$$

Ее проекция на плоскость xt (исключаем из этих уравнений v) имеет уравнение:

$$t^3 \cdot \frac{gia}{b} = (x - \alpha)^2$$

и лежит в области I (рис. 3), где

$$x > \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot t^{\frac{3}{2}}.$$

Для точек области I, таким образом, имеем:

$$v = \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot t.$$

Через точку $x_0 = 0$, $t_0 = \beta$ ($\beta > 0$), $v_0 = 0$ проходит характеристика:

$$v^2 = \frac{gia}{b} \cdot (t - \beta), \quad v^3 = \frac{gia}{b} \cdot x.$$

Ее проекция на плоскость xt имеет уравнение:

$$\frac{gia}{b} \cdot (t - \beta)^3 = x^2,$$

и лежит в области II (рис. 3), где

$$x < \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot t^{\frac{3}{2}}.$$

Для точек области II, таким образом, имеем:

$$v = \sqrt[3]{\frac{gia}{b}} \cdot x.$$

Итак, функция v , являющаяся решением нашего уравнения, определена следующим образом:

$$v = \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot t, \text{ если } x > \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot t^{\frac{3}{2}}, \text{ т. е. точка } (xt) < I,$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{gia}{b}} \cdot x, \text{ если } x < \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot t^{\frac{3}{2}}, \text{ т. е. точка } (xt) < II.$$

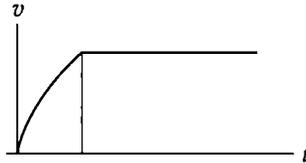


Рис. 4. $t = \sqrt[3]{\frac{b}{gia}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

Распределение скоростей в точке x в зависимости от времени определяется кривой (рис. 4):

$$v = \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot t, \text{ если } t \leq \sqrt[3]{\frac{b}{gia}} \cdot x^{\frac{2}{3}},$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{gia}{b}} \cdot x, \text{ если } t \geq \sqrt[3]{\frac{b}{gia}} \cdot x^{\frac{2}{3}}.$$

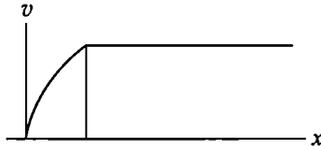


Рис. 5. $x = \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T^{\frac{3}{2}}$

Распределение скоростей в момент $t = T$ определяется кривой (рис. 5)⁴⁾.

$$v = \sqrt[3]{\frac{gia}{b} \cdot x}, \text{ если } x \leq \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T^{\frac{3}{2}},$$

$$v = \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T, \text{ если } x \geq \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T^{\frac{3}{2}}.$$

Если метеорологические условия в момент $t = T$ меняются (прекращается дождь), то при $t > T$ уравнения характеристик будут другими. Чтобы исследовать сток после прекращения дождя, решим следующую задачу.

Положим $h - p = 0$ ($t > T$) и исследуем сток, определяемый новым уравнением с начальными условиями:

$$\text{при } x_0 = 0, \quad t_0 > T, \quad v_0 = 0;$$

$$\text{при } x_0 > 0, \quad t_0 = T, \quad v_0 = f(x_0)$$

(определяется рис. 4).

Уравнение в таком случае будет:

$$2v \frac{\partial v}{\partial t} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Уравнение характеристик:

$$\frac{dt}{2v} = \frac{dx}{3v^2} = \frac{dv}{0}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\psi_1 = v = C_1 \quad \text{или} \quad v = v_0,$$

$$\psi_2 = \frac{3v_0}{2} \cdot t - x = C_2 \quad \text{или} \quad \frac{3v_0}{2} \cdot (t - T) = x - x_0.$$

⁴⁾Напомним, что $z = \frac{bv^2}{gi}$ и $q = \frac{bv^2}{gi}$, так что, определив v в зависимости от x и t , нам известны также толщина стекающего слоя v и расход воды q .

При $x_0 = 0$ и $t = T$, $v_0 = 0$ — характеристика, проходящая через эту точку, совпадает с осью t ;

при x_0 , меняющемся от 0 до $\sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T^{\frac{3}{2}}$, характеристиками являются прямые линии с угловыми коэффициентами:

$$\frac{3}{2} v_0 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{gia}{b}} \cdot x_0 ;$$

для $x_0 \geq \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T^{\frac{3}{2}}$ характеристиками являются параллельные прямые с угловым коэффициентом:

$$\frac{3}{2} v_0 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T .$$

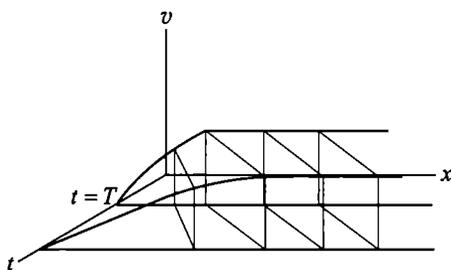


Рис. 6

Вдоль каждой характеристики скорость сохраняет постоянное значение, которое может быть определено по значению $v_0 = f(x_0)$ при $t = T$. Таким образом, ход стока воды после прекращения дождя весьма легко и наглядно определяется графически (рис. 6).

Аналитическое определение этого хода совершается следующим образом: если нам задано какое-либо значение x , t , то $v(x, t) = f(x_0)$, где x_0 — та точка прямой $t = T$, в которой начинается характеристика, проходящая через точку с координатами x , t .

Для определения x_0 по заданным x и t имеем уравнение:

$$\frac{3}{2} v_0 (t - T) = x - x_0,$$

где

$$v_0 = f(x_0) = \sqrt[3]{\frac{gia}{b}} \cdot x_0 = \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T,$$

$$x_0 \leq \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T^{\frac{3}{2}}, \quad x_0 \geq \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T^{\frac{3}{2}}.$$

Решим это уравнение относительно x_0 .

Преобразуем его сперва (для значений $x_0 \leq \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T^{\frac{3}{2}}$) к виду:

$$(x_0 - x)^3 + D \cdot (x_0 - x) + D \cdot x = 0,$$

где

$$D = \frac{27}{8} \cdot \frac{gia}{b} \cdot (t-T)^3,$$

откуда по формуле Кардано:

$$\begin{aligned} x_0 - x &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \cdot D \cdot x + \sqrt{\frac{1}{4}[D \cdot x]^3 + \frac{1}{27}[D]^3}} + \\ &+ \sqrt[3]{-\frac{1}{2} D \cdot x - \sqrt{\frac{1}{4}[D \cdot x]^3 + \frac{1}{27}[D]^3}} = \\ &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{gia}{b}} (t-T) \left\{ \sqrt[3]{-\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{D}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{D}{27}}} \right\}, \end{aligned}$$

или, преобразуя, пользуясь формулой $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$:

$$\begin{aligned} x_0 - x &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{gia}{b}} \cdot (t-T) \times \\ &\times \frac{-x}{\left(-\frac{x}{2} + S\right)^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{x}{2} - S\right)^{\frac{2}{3}} - \left(-\frac{x}{2} + S\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{x}{2} - S\right)^{\frac{1}{3}}}, \end{aligned}$$

где

$$S = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{D}{27}} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{gia}{b} \cdot (t-T)^3}.$$

Таким образом,

$$x_0 = x + \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{gia}{b}} \cdot (t - T) \times \frac{-x}{\left(-\frac{x}{2} + S\right)^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{x}{2} - S\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot (t - T)}. \quad (\text{A})$$

В этой формуле все корни имеют их арифметическое значение. Эта формула имеет место, если $x_0 \leq \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T^{\frac{3}{2}}$.

Если же получаемое значение $x_0 \geq \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T^{\frac{3}{2}}$, то его нужно заменить через

$$x_0 = x - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot (t - T). \quad (\text{B})$$

При фиксированном значении t две последние формулы определяют кривую, представляющую распределение скоростей в момент t , графическое построение которой произведено на рис. 6. Если же фиксировать x , то получим распределение скоростей в точке x в зависимости от времени.

При этом надо различать следующие случаи.

1. Дождь продолжался сравнительно долго, так что для рассматриваемого значения x : $T > \sqrt{\frac{b}{gia}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$.

Тогда значение скоростей в точке x для $t < T$ определяется рис. 3 и формулами, к нему относящимися.

При определении скоростей при $t > T$ надо воспользоваться формулой (A), так как в этой формуле $x_0 < x < \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T^{\frac{3}{2}}$.

Сопоставляя эти результаты, получаем:

$$v = \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot t, \quad \text{если } t \leq \sqrt[3]{\frac{b}{gia}} \cdot x^{\frac{2}{3}};$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{gia}{b}} \cdot x, \quad \text{если } \sqrt[3]{\frac{b}{gia}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \leq t \leq T,$$

а также

$$v = \sqrt[3]{\frac{gia}{b} \left[x - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{gia}{b}} \cdot (t - T) \frac{x}{\left(-\frac{x}{2} + S\right)^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{x}{2} - S\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{gia}{b}} (t - T)} \right]},$$

для $t > T$. График этой кривой представлен на рис. 7.

Очевидно, что при $t \rightarrow \infty v \rightarrow 0$, так как выражение в фигурных скобках стремится к нулю, ибо все три члена в знаменателе при больших значениях t мало отличаются друг от друга.

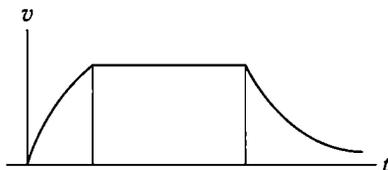


Рис. 7. $t = \sqrt[3]{\frac{b}{gia}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

2. Если $T < \sqrt[3]{\frac{b}{gia}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$, то функция $v(xt)$ определяется следующим образом:

$$v = \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot t \quad \text{для } t \leq T,$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{gia}{b}} \cdot T \quad \text{для } T \leq t \leq t_0,$$

где t_0 определяется из формулы (В):

$$\sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T^{\frac{3}{2}} = x - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{gia}{b}} \cdot T \cdot (t - T),$$

и для $t \geq t_0$

$$v = \left\{ \frac{gia}{b} \left[x - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{gia}{b}} \cdot (t - T) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{x}{\left(-\frac{x}{2} + S\right)^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{x}{2} - S\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{gia}{b}} \cdot (t - T)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

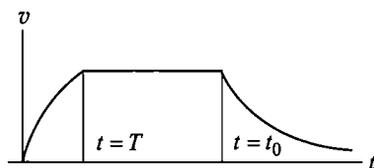


Рис. 8

График этой функции представлен на рис. 8.

Теоретический сектор Государственного
геофизического института

ZUM ARTIKEL VON HERRN WELIKANOW «HYDROMECHANISCHE
BETRACHTUNG DES OBERIRDISCHEN ABFLUSSES»

A. Tichonow (Moskau)

(Zusammenfassung)

Dieser artikei, ist der Gleichungen des oberirdischen Abflusses von Herrn Welikanow gewidmet. Hier wird nämlich eine Ungenauigkeit beseitigt, die bei der Feststellung dieser Gleichungen zugelassen wurde. Ausserdem wird hier genau der Fall des Abflusses von einer geneigten Ebene behandelt.

ОБ ОСТЫВАНИИ ТЕЛ ПРИ ЛУЧЕИСПУСКАНИИ, СЛЕДУЮЩЕМ ЗАКОНУ STEFAN'А–BOLTZMANN'А

А. Н. Тихонов

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом)

В статье подробно изучается задача об остывании равномерно нагретого полуограниченного слоя $0 \leq x < \infty$ в пустоте. При этом принимается, что внутри тела температура подчинена уравнению теплопроводности, а на поверхности имеет место закон Stefan'а–Boltzmann'а. Аналогично трактуются и некоторые другие задачи.

Настоящая статья посвящена вопросу об изменении температуры твердого тела, если на поверхности происходит лучеиспускание, следующее закону Stefan'а–Boltzmann'а. При этом может случиться, что тело не только излучает теплоту, но и само получает ее как извне, так и благодаря источникам тепла, находящимся внутри тела¹⁾.

Мы дадим решение этой задачи для однородных тел одного, двух или трех измерений произвольной формы, считая поток тепла, поступающий из внешнего пространства, известной величиной (которая может меняться от места на поверхности и от времени).

Решение задачи будет получено нами при помощи сведения ее к нелинейному интегральному уравнению типа Volterra, для которого дается метод решения при помощи последовательных приближений.

Однако, чтобы не загромождать основную идею излишними деталями, мы приведем в § 1–3 и 6 решение простейшей задачи, рассматривая остывание однородного, полуограниченного тела в пустоте, а в § 4, 5 рассмотрим более общий случай.

Изв. АН СССР. Отделение математических и естественных наук. Серия географическая. — 1937. — № 3. — С. 461–479.

¹⁾Например, тепло, возникающее внутри тела (Земли) благодаря радиоактивному распаду.

§ 1.

Рассмотрим однородное тело, температура которого $u(x, t)$ зависит только от времени t и одной геометрической переменной x , которую будем считать меняющейся от 0 до ∞ (бесконечная полупрямая). Эта функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho} = \text{const} \right), \quad (1)$$

где k — теплопроводность, ρ — плотность, а c — удельная теплоемкость данного тела. Если $u(x, t)$ обозначает абсолютную температуру тела и излучение происходит в пустоту, то на поверхности (при $x = 0$) поток тепла, $k \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}$, согласно закону Stefan'a–Boltzmann'a пропорционален 4-й степени температуры, т. е.

$$k \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \sigma \cdot [u(0, t)]^4. \quad (2)$$

Допустим, кроме того, что в некоторый момент времени, назовем его $t = 0$, нам дано распределение температуры внутри тела, $u(x, 0)$, равное некоторой постоянной температуре T_0 :

$$u(x, 0) = T_0. \quad (3)$$

Нашей задачей является найти ограниченное решение²⁾ уравнения теплопроводности (1) с граничными условиями (2) при $x = 0$ и начальными данными (3).

Обозначим через $\nu(t)$ термический градиент у поверхности тела

$$\nu(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t). \quad (4)$$

Всякое ограниченное решение уравнения теплопроводности (1), удовлетворяющее условию (3) и имеющее $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \nu(t)$, как известно, представляется в виде:

$$u(x, t) = T_0 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \nu(\tau) d\tau, \quad (5)$$

²⁾Условие ограниченности необходимо, иначе задача будет иметь несколько решений (см. *Tychonoff A. Theoremes d'unicite pour l'equation de la chaleur // Математический сборник. — 1935. — Т. 42, № 2. — Р. 199–215 (франц.)*). Единственность решения у изучаемой задачи при поставленных условиях следует из самого метода решения.

и нам остается определить функцию $\nu(t)$ так, чтобы удовлетворялось условие (2). Как было отмечено,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \nu(t).$$

Далее,

$$u(0, t) = T_0 - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (6)$$

Таким образом, для того, чтобы удовлетворялось условие (2), нужно, чтобы функция $\nu(t)$ удовлетворяла соотношению:

$$k \cdot \nu(t) = \sigma \left[T_0 - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right]^4, \quad (7)$$

которое является нелинейным интегральным уравнением.

Упростим уравнение (7), вынося T_0 за скобку и деля на σT_0^4 :

$$\frac{k}{\sigma T_0^4} \cdot \nu(t) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{a}{T_0} \cdot \frac{\sigma T_0^4}{k} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left(\nu(\tau) \cdot \frac{k}{\sigma T_0^4} \right) d\tau \right]^4.$$

Введем новые переменные z, ζ , полагая

$$t = \gamma^2 \cdot z, \quad \tau = \gamma^2 \cdot \zeta; \quad (8)$$

при этом уравнение преобразуется к виду ³⁾:

$$\frac{k}{\sigma T_0^4} \nu(\gamma^2 z) = \left[1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{a}{T_0} \cdot \frac{\sigma T_0^4}{k} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{z-\zeta}} \left(\nu(\gamma^2 \zeta) \cdot \frac{k}{\sigma T_0^4} \right) d\zeta \right]^4.$$

Положим

$$\varphi(z) = \nu(\gamma^2 z) \cdot \frac{k}{\sigma T_0^4} \quad (9)$$

³⁾Заметим, что внутри квадратных скобок стоит величина $\frac{1}{T_0} u(0, t)$, которая, как то ясно физически, меняется в пределах от 1 до 0.

и выберем

$$\gamma = \sqrt{\pi} \cdot \frac{T_0}{a} \cdot \frac{k}{\sigma T_0^4}; \quad (10)$$

тогда для определения $\varphi(z)$ получаем уравнение:

$$\varphi(z) = \left[1 - \int_0^z \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta \right]^4. \quad (11)$$

Если мы решим это уравнение, то

$$\nu(t) = \frac{\sigma T_0^4}{k} \cdot \varphi\left(\frac{t}{\gamma^2}\right). \quad (12)$$

Таким образом, процесс остывания (поток у поверхности) всякого равномерно нагретого неограниченно простирающегося в одну сторону тела при выборе соответствующих масштабов времени и температуры определяется одной и той же кривой $\varphi(z)$. Способ нахождения решения уравнения (11) будет дан в § 2.

§ 2.

Назовем $V(z, \varphi)$ ($z > 0$) функционалом Volterra, если V есть число, зависящее от значения параметра z и от значений функции $\varphi(\zeta)$ в промежутке $0 \leq \zeta < z$.

Рассмотрим функциональное уравнение⁴⁾

$$\varphi(z) = V(z, \varphi). \quad (13)$$

Допустим, что функционал $V(z, \varphi)$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. Если $\varphi(\zeta)$ — непрерывная функция своего аргумента, то $V(z, \varphi)$ определен и является непрерывной функцией переменного z .

⁴⁾Уравнение (11) принадлежит к рассматриваемому нами типу, где

$$V(z, \varphi) = \left[1 - \int_0^z \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta \right].$$

2°. Если $\varphi_1(\zeta)$ и $\varphi_2(\zeta)$ — непрерывные функции ζ и

$$|\varphi_1(\zeta)| < M, \quad |\varphi_2(\zeta)| < M \quad (\text{для } 0 \leq \zeta \leq Z),$$

то

$$|V(z, \varphi_1) - V(z, \varphi_2)| \leq \int_0^z K(z, \zeta; M, Z) |\varphi_1(\zeta) - \varphi_2(\zeta)| d\zeta$$

для $0 \leq z \leq Z$, причем функция

$$K(z, \zeta; M, Z) = \frac{N_Z(M)}{(z - \zeta)^p},$$

где $0 \leq p < 1$, а $N_Z(M)$ — некоторая константа, зависящая от M и от Z .

Нетрудно видеть, что функция, приведенная в сноске (4), удовлетворяет поставленным условиям. Что условие 1° удовлетворено, — это очевидно. Покажем, что условие 2° также удовлетворено. Обозначим через $v(z, \varphi)$ функционал

$$v(z, \varphi) = \left[1 - \int_0^z \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z - \zeta}} d\zeta \right];$$

тогда

$$V(z, \varphi) = v(z, \varphi)^4$$

и

$$\begin{aligned} |V(z, \varphi_1) - V(z, \varphi_2)| &= |v(z, \varphi_1) - v(z, \varphi_2)| \cdot |v(z, \varphi_1)^3 + \\ &+ v(z, \varphi_1)^2 v(z, \varphi_2) + v(z, \varphi_1) v(z, \varphi_2)^2 + v(z, \varphi_2)^3|. \end{aligned}$$

Но если $|\varphi(z)| < M$ для $0 \leq z < Z$, то

$$|v(z, \varphi)| \leq 1 + 2M\sqrt{Z}$$

и, кроме того,

$$|v(z, \varphi_1) - v(z, \varphi_2)| \leq \int_0^z \frac{|\varphi_1(\zeta) - \varphi_2(\zeta)|}{\sqrt{z - \zeta}} d\zeta.$$

Таким образом,

$$|V(z, \varphi_1) - V(z, \varphi_2)| \leq \int_0^z K(z, \zeta; M, Z) |\varphi_1(\zeta) - \varphi_2(\zeta)| d\zeta,$$

где

$$K(z, \zeta; M, Z) = \frac{4(1 + 2M\sqrt{Z})^3}{\sqrt{z - \zeta}}.$$

Теорема. Если функционал $V(z, \varphi)$ удовлетворяет условиям 1° и 2°, то уравнение (13)

$$\varphi(z) = V(z, \varphi)$$

имеет единственное решение в некотором промежутке $0 \leq z \leq z_0$.

Мы докажем эту теорему методом последовательных приближений. Рассмотрим функциональное преобразование

$$\psi(z) = V(z, \varphi), \tag{14}$$

преобразующее функцию $\varphi(z)$ в функцию $\psi(z)$. Определим такое z_0 , чтобы непрерывная функция $\varphi(z)$, для которой $|\varphi(z)| < M$ при $0 \leq z \leq z_0$, преобразовывалась в функцию $\psi(z)$, обладающую тем же свойством. Это можно сделать следующим образом. Пусть $f(z) = V(z, 0)$ — эта функция, по условию, непрерывна; обозначим через L_1 максимум этой функции на некотором отрезке $0 \leq z \leq Z$: $|f(z)| \leq L_1$. Для функции $\varphi(z)$, для которой $|\varphi(z)| \leq M$ ($M > L_1$), получаем:

$$|V(z, \varphi) - V(z, 0)| \leq M \int_0^z K(z, \zeta; M, Z) d\zeta = M \cdot N(M) \frac{z^{1-p}}{1-p}$$

или

$$|\psi(z)| = |V(z, \varphi)| \leq L_1 + M \cdot N(M) \frac{z^{1-p}}{1-p}. \tag{15}$$

Очевидно, что для любого $M > L_1$ можно найти такое z_0 , ($z_0 \leq Z$), чтобы

$$L_1 + M \cdot N(M) \frac{z_0^{1-p}}{1-p} = M \left(z_0 = \sqrt[1-p]{\frac{M - L_1}{M \cdot N(M)} \cdot 1 - p} \right). \tag{16}$$

Таким образом, если $\varphi(z) < M$ на отрезке $0 \leq z \leq z_0$, то и для преобразованной функции $\psi(z)$ на этом отрезке $|\psi(z)| < M$. Возьмем какую-нибудь функцию $\varphi_0(z)$, для которой $|\varphi_0(z)| < M$ (на отрезке $0 \leq z \leq z_0$). Для определенности положим $\varphi_0(z) = 0$. Определим последовательные приближения $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z), \dots$, полагая

$$\varphi_n(z) = V(z, \varphi_{n-1}). \quad (17)$$

В силу определения z_0 очевидно, что $|\varphi_n(z)| < M$ ($0 \leq z \leq z_0$) для всех n . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |\varphi_n(z) - \varphi_{n-1}(z)| &= |V(z, \varphi_{n-1}) - V(z, \varphi_{n-2})| \leq \\ &\leq N(M) \int_0^z \frac{\varphi_{n-1}(\zeta) - \varphi_{n-2}(\zeta)}{\sqrt{z - \zeta}} d\zeta, \end{aligned} \quad (18)$$

причем константа $N(M)$ для всех n одинакова.

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(z) &= 0, \\ |\varphi_1(z) - \varphi_0(z)| &= |V(z, 0)| \leq L_1, \\ |\varphi_2(z) - \varphi_1(z)| &\leq L_1 N \int_0^z \frac{d\zeta}{(z - \zeta)^p} = \\ &= L_1 N z^{1-p} \int_0^1 \frac{d\beta}{(1 - \beta)^p} = L_1 N \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(2-p)} z^{1-p}, \\ |\varphi_3(z) - \varphi_2(z)| &\leq L_1 N^2 \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(2-p)} \int_0^z \frac{\zeta^{1-p} d\zeta}{(z - \zeta)^p} = \\ &= L_1 N^2 \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(2-p)} z^{2(1-p)} \int_0^1 \frac{\beta^{1-p} d\beta}{(1 - \beta)^p} = L_1 N^2 \frac{\Gamma^2(1-p)}{\Gamma(1+2(1-p))} \cdot z^{2(1-p)}, \\ &\dots \dots \dots \\ |\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| &\leq L_1 N^n \frac{\Gamma^n(1-p)}{\Gamma(1+n(1-p))} z^{n(1-p)}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Отсюда следует окончательно⁶⁾

$$\varphi(z) = V(z, \varphi) \quad (\text{для } 0 \leq z \leq z_0).$$

§ 3.

Обратимся к уравнению (11):

$$\varphi(z) = \left[1 - \int_0^z \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta \right]^4 = V(z, \varphi). \quad (22)$$

Отметим еще одно обстоятельство, касающееся последовательных приближений. Допустим, что функционал $V(z, \varphi)$ — монотонно убывающий в следующем смысле: если $\varphi_1(\zeta) \leq \varphi_2(\zeta)$ для $0 \leq \zeta \leq z$, то

$$V(z, \varphi_1) \geq V(z, \varphi_2). \quad (23)$$

Тогда, если нам известна функция $\varphi_0(z)$, которая, заведомо, меньше решения нашего уравнения [$\varphi_0(z) \leq \varphi(z)$], то последовательные приближения, построенные по закону

$$\varphi_1(z) = V(z, \varphi_1); \dots; \varphi_n(z) = V(z, \varphi_{n-1}); \dots \quad (24)$$

приближаются к решению уравнения

$$\varphi(z) = V(z, \varphi),$$

подходя с разных сторон. Действительно,

так как

$$\varphi_0(z) \leq \varphi(z), \quad \text{то } \varphi_1(z) = V(z, \varphi_0) \geq V(z, \varphi) = \varphi(z),$$

но если

$$\varphi_1(z) \geq \varphi(z), \quad \text{то } \varphi_2(z) = V(z, \varphi_1) \leq V(z, \varphi) = \varphi(z),$$

(25)

и т. д., т. е. все $\varphi_n(z)$ с четными номерами меньше $\varphi(z)$, а все $\varphi_n(z)$ с нечетными номерами больше $\varphi(z)$.

⁶⁾Ограничение $0 \leq z \leq z_0$ используется нами только для доказательства того, что $|\varphi_n(z)| < M$ для всех z . Если последовательные приближения окажутся равномерно ограниченными на некотором отрезке $0 \leq z \leq z_1$ или для $0 \leq z < \infty$, то они будут сходиться во всей этой области и определяют в ней решение уравнения (13).

Сделанное замечание имеет прямое отношение к нашему уравнению (11). Действительно, очевидно, что для функции $\varphi_0(z) = 0$

$$\varphi_0(z) \leq \varphi(z), \quad (26)$$

так как $\varphi(z)$, равняясь 4-й степени некоторого числа, всегда ≥ 0 . Что касается монотонности нашего оператора

$$V(z, \varphi) = \left[1 - \int_0^z \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta \right]^4, \quad (27)$$

то она совершенно очевидна, если только ограничиваться такими функциями $\varphi(z)$ и такими промежутками $0 \leq \zeta \leq z$, для которых

$$\int_0^z \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta < 1. \quad (28)$$

Как было отмечено в сноске (3), для решения $\varphi(z)$ уравнения (11) это неравенство становится ясным в силу физических соображений (более подробно см. § 6). Таким образом, беря $\varphi_0(z) = 0$, получаем

$$\varphi_1(z) = 1 \geq \varphi(z). \quad (29)$$

Далее, $\varphi_2(z) = V(z, \varphi_1) < \varphi(z)$, но при этом может случиться, что

$$\int_0^z \frac{\varphi_1(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta \geq 1 \quad \text{для } z > z_0^{(1)}, \quad (30)$$

а при этом монотонность нашего оператора нарушается. Положим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(z) &= \psi_2(z), & 0 \leq z \leq z_0^{(1)}, \\ \varphi_2(z) &= 0, & z_0^{(1)} \leq z. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Очевидно, что $\varphi_2(z) \leq \varphi(z)$ для любых значений z . Положим, далее, $\varphi_3(z) = V(z, \varphi_2)$, при этом $\varphi_3(z) \geq \varphi(z)$.

Рассмотрим функцию $\varphi_4(z) = V(z, \varphi_3)$; может случиться, что, начиная с некоторого значения $z_0^{(3)}$,

$$\int_0^z \frac{\varphi_3(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta \geq 1 \quad (\text{для } z \geq z_0^{(3)}), \quad (32)$$

а при этом монотонность нашего оператора также нарушается. Положим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_4(z) &= \psi_4(z), & 0 \leq z \leq z_0^{(3)}, \\ \varphi_4(z) &= 0, & z_0^{(3)} \leq z; \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

очевидно, что $\varphi_4(z) \leq \varphi(z)$ для любых значений z и т. д.

Вычисления дают следующий результат⁷⁾:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(z) &= 0, \\ \varphi_1(z) &= 1, \\ \varphi_2(z) &= 1 - 8z^{1/2} + 24z - 32z^{3/2} + 16z^2, \\ \varphi_3(z) &\approx 1 - 8z^{1/2} + 74,2656z - 1449,989z^{3/2} + 2485,46z^2 - \\ &\quad - 11557,66z^{5/2} + 89307,12z^3 - 516314z^{7/2} + 462033z^4 - \dots, \\ \varphi_4(z) &\approx 1 - 8z^{1/2} + 74,2656z - 729,675z^{3/2} + 6140,86z^2 - \\ &\quad - 89951,40z^{5/2} + 336624z^3 - 2763113z^{7/2} + \dots, \\ \varphi_5(z) &\approx [1 - 2z^{1/2} + 12,5666z - 99,021z^{3/2} + 859,62z^2 - \\ &\quad - 6550,3z^{5/2} + 88309,8z^3 - 307771z^{7/2} + 2373594z^4 - \dots]^4. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

⁷⁾Вычисление выполнено В. Я. Захаровым.

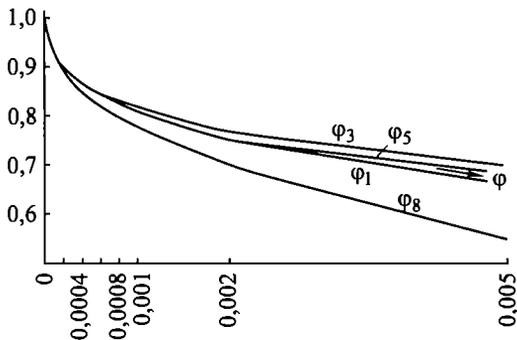


Рис.

и что на границе имеется приток тепла извне, величина которого, отнесенная к единице площади и единице времени, равна $Q(t)$. Таким образом, граничное условие будет:

$$k \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \sigma u^4(0, t) - Q(t). \quad (38)$$

Как известно,

$$U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \cdot a^2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right) \right\} \mu(\xi) d\xi \quad (39)$$

представляет решение уравнения теплопроводности (1), удовлетворяющее условиям:

$$\left. \begin{aligned} U(x, 0) &= \mu(x), \\ \frac{\partial U}{\partial x}(0, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Будем искать решение нашей задачи в виде

$$u(x, t) = U(x, t) - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \nu(\tau) d\tau; \quad (41)$$

тогда граничное условие (38) принимает вид ⁸⁾:

$$k \cdot \nu(t) = \sigma \left\{ 2 \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} \frac{\mu(\xi)}{a\sqrt{t}} d\xi - 2 \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right\}^4 - Q(t). \quad (42)$$

Это есть нелинейное интегральное уравнение типа Volterra, к которому применим метод решения, изложенный в § 2; даже общие соображения § 3 вполне к нему применимы.

В случае остывания сферы радиуса R в предположении, что температура меняется только в зависимости от изменения радиуса и времени, уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (43)$$

и граничные условия:

$$-k \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \sigma u^4(R, t) - Q(t). \quad (44)$$

Если температура зависит только от r , то, как известно, введением новой вспомогательной функции

$$v(r, t) = r \cdot u(r, t) \quad (45)$$

уравнение (43) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (46)$$

а условие (44) переходит в

$$-k \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R} = -k \cdot \frac{1}{R^2} v(R, t) + \sigma \left[\frac{v(R, t)}{R} \right]^4 - Q(t), \quad (47)$$

причем, кроме того, при $r = 0$ появляется новое граничное условие:

$$v(0, t) = 0. \quad (48)$$

Чтобы не усложнять формул, будем считать, что $u(r, 0) = T$, так как мы видели, что учет переменной начальной температуры не представляет принципиальных затруднений.

⁸⁾ При $\mu(\xi) = T_0$ и $Q(t) = 0$ это уравнение превращается в (11).

Будем искать решение в виде

$$v(r, t) = T \cdot r - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \exp\left(-\frac{(R-r)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(R+r)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \right\} \nu(\tau) d\tau. \quad (49)$$

Очевидно, что

$$v(R, t) = T \cdot R - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{(2R)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \right\} \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad (50)$$

а

$$\frac{\partial v}{\partial r}(R, t) = T - v(t) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{2R}{a(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(2R)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \nu(\tau) d\tau, \quad (51)$$

откуда для определения функции $\nu(t)$ приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{k}{R} \nu(t) = & \frac{k}{R} \left\{ T - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{2R}{a(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(2R)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \nu(\tau) d\tau \right\} - \\ & - \frac{k}{R^2} \left\{ T \cdot R - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[1 - \exp\left(-\frac{(2R)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \right] \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right\} + \\ & + \frac{\sigma}{R^4} \left\{ T \cdot R - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[1 - \exp\left(-\frac{(2R)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \right] \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right\} - Q(t), \quad (52) \end{aligned}$$

т. е. опять получаем интегральное уравнение, для которого в § 2 дан метод решения.

§ 5.

Пусть нам дано некоторое выпуклое тело T , ограниченное поверхностью S , остывание которого мы изучаем⁹⁾, и пусть оно получает извне поток тепла, плотность которого равна $Q(P, t)$. Эта величина может меняться не только с изменением t , но также и с изменением P точки поверхности нашего тела.

Таким образом, мы должны найти функцию, удовлетворяющую внутри тела уравнению теплопроводности

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (53)$$

на поверхности S — условию

$$k \frac{\partial u}{\partial n_i}(P, t) = \sigma u(P, t)^4 - Q(P, t) \quad (P \subset S) \quad (54)$$

(n_i — направление внутренней нормали), и, кроме того, условию

$$u(P, 0) = \psi(P), \quad (P \subset T) \quad (55)$$

где функция $\psi(P)$ представляет начальное распределение температуры внутри тела T .

Для представления искомого решения опять воспользуемся некоторыми вспомогательными функциями. Рассмотрим функцию

$$U_1(P, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^3 \iiint_T \left(\frac{1}{a\sqrt{t}}\right)^3 \exp\left(-\frac{r_{PP'}^2}{4a^2t}\right) \psi(P') dw', \quad (56)$$

где P' — точка, переменная при интеграции, а $r_{PP'}$ — расстояние между точками P и P' . Как известно, эта функция удовлетворяет уравнению (53) и условию (55) для точек, лежащих внутри T .

Рассмотрим также функцию

$$U_2(P, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^3 \int_0^t \left\{ \iint_S \frac{1}{a(\sqrt{t-\tau})^3} \exp\left(-\frac{r_{PP'}^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \psi(P', \tau) d\sigma' \right\} d\tau, \quad (57)$$

⁹⁾В настоящем параграфе мы даем только краткий эскиз решения формулированной задачи; подробное изложение которой (даже в более общей постановке) мы дадим в другой работе, называемой «О функциональных уравнениях типа Volterra и их приложениях к некоторым задачам математической физики».

которая удовлетворяет уравнению теплопроводности. $\frac{\partial U_2}{\partial n}$ (n — нормаль к S) претерпевает разрыв на поверхности, когда $P \rightarrow P_0 \subset S$ изнутри:

$$\lim \frac{\partial U_2}{\partial n}(P, t) = \left[\frac{\partial U_2}{\partial n}(P, t) \right]_{P=P_0} - \frac{1}{2} \nu(P_0, \tau) \quad (58)$$

и в начальный момент

$$U_2(P, 0) = 0. \quad (59)$$

Будем искать решение нашего уравнения в виде

$$u(P, t) = U_1(P, t) + U_2(P, t). \quad (60)$$

Очевидно, что как уравнение (53), так и условие (55) удовлетворены. Установим уравнение, которому должна удовлетворять функция $\nu(P, t)$ для того, чтобы выполнялось условие (54).

Поток тепла через поверхность S в точке P_0 равняется

$$k \cdot \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\partial u}{\partial n}(P, t) = k \frac{\partial U_1}{\partial n}(P_0, t) + k \cdot \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\partial U_2}{\partial n}(P, t), \quad (61)$$

откуда приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \nu(P_0, t) = \frac{2}{k} \left\{ k \cdot \frac{\partial U_1}{\partial n}(P_0, t) + k \left[\frac{\partial U_2}{\partial n}(P, t) \right]_{P=P_0} + \right. \\ \left. + \sigma [U_1(P_0, t) + U_2(P_0, t)]^4 - Q(t) \right\}, \quad (62) \end{aligned}$$

которое можно было бы получить в явном виде, вставляя туда выражения $U_1(P, t)$ и $U_2(P, t)$, но нам не представляется это необходимым выписывать подробно. Заметим только, что полученное уравнение принадлежит к типу функциональных уравнений

$$\varphi(P, t) = V(P, t; \varphi), \quad (63)$$

где $V(P, t; \varphi)$ — функционал, зависящий от тех значений $\varphi'(P', \tau)$, которые соответствуют значениям τ : $0 \leq \tau < t$, а P' есть некоторая точка поверхности S .

Уравнения такого типа можно решать по способу, развитому нами в § 2. Положим $\varphi_0(P, t)$ равной какой-либо функции P и t и возьмем последовательные приближения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(P, t) &= V(P, t; \varphi_0), \\ \varphi_2(P, t) &= V(P, t; \varphi_1), \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_{n+1}(P, t) &= V(P, t; \varphi_n), \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

При определенных условиях, налагаемых на $V(P, t; \varphi)$, которым удовлетворяет правая часть уравнения (62), эти последовательные приближения сходятся к предельной функции $\varphi(P, t)$, являющейся решением этого уравнения.

Мы не будем проводить подробного доказательства сходимости последовательных приближений, отсылая читателя к работе, цитированной выше в сноске (9).

§ 6.

Остановимся более подробно на простейшей задаче об остывании полуграниченного слоя в пустоте, рассмотренной нами в § 1-3. Нами было доказано в § 2, что последовательные приближения $\varphi_n(z)$ сходятся к решению нашего уравнения на некотором достаточно малом отрезке $0 \leq z \leq z_0$. Покажем, что при помощи указанного процесса можно убедиться в существовании решения уравнения

$$\varphi(z) = \left[1 - \int_0^z \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta \right]^4 \quad (65)$$

для всех $z \geq 0$ и найти самое решение. Вообще, рассмотрим уравнение

$$\varphi(z) = F \left(1 - \int_0^z \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta \right) = V(z; \varphi), \quad (66)$$

где $F(u)$ - некоторая непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая функция, для которой

$$F(0) = 0 \quad \text{и} \quad F'(u) > 0 \quad (u > 0). \quad (67)$$

Наша задача получается при $F(u) = \sigma u^4$, причем поставленные условия для этой функции удовлетворены. К подобной задаче сводится задача об остывании полугранного тела $0 \leq z < \infty$ при излучении в пустоту по закону

$$Q = l \cdot (\sigma \cdot t). \quad (68)$$

Если $\varphi(z)$ - непрерывная функция, то условие 1° § 2 удовлетворено. Если $|\varphi(z)| < M$, то

$$|v(z, \varphi)| = \left| 1 - \int_0^z \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta \right| \leq 1 + 2\sqrt{z} \cdot M, \quad (69)$$

откуда следует, что функционал из правой части (66) удовлетворяет условию:

$$\begin{aligned} |V(z, \varphi_1) - V(z, \varphi_2)| &\leq F'(u^*) \cdot \int_0^z \frac{|\varphi_1(\zeta) - \varphi_2(\zeta)|}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta \leq \\ &\leq N_z(M) \int_0^z \frac{|\varphi_1(\zeta) - \varphi_2(\zeta)|}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta, \quad (70) \end{aligned}$$

где u^* - некоторое число, заключенное между $v_1(z, \varphi_1)$ и $v_2(z, \varphi_2)$, т. е. во всяком случае,

$$0 \leq u^* \leq 1 + 2M\sqrt{z}, \quad (71)$$

а

$$N_z(M) = \max_{0 \leq u \leq 1 + 2M\sqrt{z}} F'(u). \quad (72)$$

Таким образом, $V(z, \varphi)$ удовлетворяет также и условию 2° § 2, и, пользуясь теоремой, доказанной в этом параграфе, мы можем утверждать существование решения уравнения (66) на достаточно малом промежутке $0 \leq z \leq z_0$, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Рассмотрим функционал

$$v(z, \varphi) = 1 - \int_0^z \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{z - \zeta}}, \quad (73)$$

стоящий под знаком функции F и пропорциональный $u(0, t)$, значениям температуры на поверхности нашего тела.

Очевидно, следуя физическому смыслу задачи, что $v(z, \varphi) \geq 0$ для функции φ , удовлетворяющей уравнению (66). Мы докажем это неравенство несколько позже, исходя из самого уравнения (66), а пока, принимая его как гипотезу, докажем, что последовательные приближения сходятся для всех z .

Итак, допустим, что мы нашли функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую уравнению (66) для $0 \leq z \leq z_1$, причем

$$\varphi(z) > 0 \text{ и } v(z, \varphi) = 1 - \int_0^z \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{z - \zeta}} \geq u_0 > 0 \quad (\text{для } 0 \leq z \leq z_1). \quad (74)$$

Покажем, что в этом случае существует решение на отрезке

$$z_1 \leq z \leq z_1 + \Delta z_1,$$

где

$$\Delta z_1 \geq h(u_0); \quad (75)$$

здесь $h(u_0)$ — некоторая положительная функция u , причем последовательные приближения, определявшие функцию $\varphi(z)$ для $0 \leq z \leq z_1$, сходятся также и на $0 \leq z \leq z_1 + \Delta z_1$.

Возьмем постоянное λ ($0 < \lambda < 1$) и определим Δz_1 из соотношения

$$F(1) \cdot 2\sqrt{\Delta z_1} = u_0 \cdot \lambda, \quad \text{т. е. } \Delta z_1 = \frac{u_0^2 \cdot \lambda^2}{4F^2(1)} \quad (0 < \lambda < 1). \quad (76)$$

В этом случае, если мы рассмотрим функцию $\tilde{\varphi}(z)$, совпадающую с $\varphi(z)$ на $0 \leq z \leq z_1$ и удовлетворяющую условию

$$0 \leq \tilde{\varphi}(z) \leq F(1) \quad (\text{для } z_1 \leq z \leq z_1 + \Delta z_1), \quad (77)$$

то для этого промежутка

$$1 \geq v(z, \tilde{\varphi}) = 1 - \int_0^z \frac{\tilde{\varphi}(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta = \left(1 - \int_0^{z_1} \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\tilde{\varphi}(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta \right) \geq \\ \geq u_0 - F(1) \cdot 2 \cdot \sqrt{z-z_1} \geq (1-\lambda)u_0 > 0. \quad (78)$$

Более того, если $\tilde{\varphi}(\zeta)$ хотя и не совпадает с $\varphi(z)$ на $(0, z_1)$, но мало отличается от этой функции, то и тогда

$$v(z, \tilde{\varphi}) = 1 - \int_0^z \frac{\tilde{\varphi}(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta = 1 - \int_0^{z_1} \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta - \\ - \int_0^{z_1} \frac{\tilde{\varphi}(\zeta) - \varphi(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta - \int_{z_1}^z \frac{\tilde{\varphi}(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta \geq u_0 - 2\varepsilon [\sqrt{z} - \sqrt{z-z_1}] - \\ - F_1 \cdot 2\sqrt{z-z_1} > u_0(1-\lambda) - 2\varepsilon\sqrt{z} > 0, \quad (79)$$

если

$$|\tilde{\varphi}(\zeta) - \varphi(\zeta)| < \varepsilon < \frac{u_0(1-\lambda)}{\sqrt{z_1 + \Delta z_1}}. \quad (80)$$

Итак, если мы возьмем какую-либо функцию $\tilde{\varphi}(z)$, отличающуюся от $\varphi(z)$ меньше, чем на ε , на $(0, z_1)$ и удовлетворяющую условию (77) на $(z_1, z_1 + \Delta z_1)$, то $v(z, \tilde{\varphi})$ на $(z_1, z_1 + \Delta z_1)$ будет удовлетворять условию:

$$0 \leq v(z, \tilde{\varphi}) \leq 1, \quad (81)$$

и, следовательно, $V(z, \varphi)$ будет удовлетворять неравенству

$$0 \leq V(z, \varphi) \leq F(1). \quad (82)$$

Таким образом, если последовательность приближений $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z), \dots$ равномерно сходится к $\varphi(z)$ на $(0, z_1)$, то, беря номер n , для которого

$$|\varphi_n(z) - \varphi(z)| \leq \varepsilon = \frac{u_0(1-\lambda)}{z_1 + \Delta z_1}, \quad (83)$$

и продолжая функцию $\varphi_n(z)$ на отрезке $(z_1, z_1 + \Delta z_1)$ произвольно с единственным условием

$$0 \leq \varphi_n(z) \leq F(1), \quad (84)$$

получим, что все функции $\varphi_m(z)$ для $m > n$ будут определены на отрезке $(0, z_1 + \Delta z_1)$ и равномерно на нем ограничены. Как мы отмечали в сноске ⁽⁶⁾, в этом случае $\varphi_n(z)$ равномерно сходятся на $(0, z_1 + \Delta z_1)$ к некоторой функции $\varphi(z)$, которая и является решением уравнения (66) на этом отрезке.

Если мы теперь докажем, что $\varphi(z)$, решение уравнения (66), а тем самым и

$$u(z) = v(z, \varphi) \quad (85)$$

являются монотонно убывающими функциями, которые нигде на конечном расстоянии в нуль не обращаются, то этим и будет доказано, что эти функции существуют для всех $z \geq 0$ и что $\varphi(z)$ может быть найдено методом последовательных приближений в том смысле, как это следует из только что доказанной теоремы.

Допустим, что в некотором промежутке $(0, z_1)$ существует решение уравнения (66), определяемое функцией $\varphi(z)$. Покажем, что $\varphi(z)$ является монотонно убывающей функцией, нигде не равной нулю.

Покажем, прежде всего, что функция $\varphi(z)$ дифференцируема для $z > 0$. Рассмотрим разность:

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta z} = \frac{\varphi(z + \Delta z) - \varphi(z)}{\Delta z}. \quad (86)$$

Очевидно, что эта разность удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \varphi}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \left\{ F \left(1 - \int_0^{z+\Delta z} \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z+\Delta z-\zeta}} d\zeta \right) - F \left(1 - \int_0^z \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{\Delta z} F_1 \left[- \int_{\Delta z}^{z+\Delta z} \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z+\Delta z-\zeta}} d\zeta + \int_0^z \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta - \int_0^{\Delta z} \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z+\Delta z-\zeta}} d\zeta \right] = \\ &= -F_1 \cdot \left\{ \int_0^z \left(\frac{\varphi(\zeta + \Delta z) - \varphi(\zeta)}{\Delta z} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta + \frac{1}{\Delta z} \int_0^{\Delta z} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{z+\Delta z-\zeta}} \right\}. \quad (87) \end{aligned}$$

Здесь F_1 — непрерывная функция, равная

$$F_1 = F'(u^*), \quad (88)$$

где u^* — среднее значение между

$$u(z + \Delta z) \text{ и } u(z), \quad (89)$$

причем

$$u(z) = 1 - \int_0^z \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta. \quad (90)$$

Это равенство можно рассматривать как линейное интегральное уравнение для функции

$$\frac{\varphi(z + \Delta z) - \varphi(z)}{\Delta z}. \quad (91)$$

Отсюда легко заключить, что существует предел этого отношения $\varphi'(z)$, удовлетворяющий уравнению

$$\varphi'(z) = -F'(u) \cdot \left\{ \int_0^z \frac{\varphi'(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} d\zeta + \frac{\varphi(0)}{\sqrt{z}} \right\}. \quad (92)$$

Беря резольвенту этого линейного уравнения типа Volterra и представляя решение при ее помощи, получим

$$\varphi'(z) = -F'(u) \cdot \frac{\varphi(0)}{\sqrt{z}} + \varphi^*(z), \quad (93)$$

где $\varphi^*(z)$ — ограниченная функция. Отсюда следует, что $\varphi'(z)$ отрицательна для некоторого промежутка $0 < z \leq Z$.

Функция $u(z)$ связана с функцией $\varphi(z)$ соотношением $\varphi(z) = F(u(z))$. В силу предположения $F(u)$ — монотонно возрастающая функция в области положительных u . Таким образом, в области положительных u это уравнение разрешимо относительно $u(z)$. В частности, если $\varphi(z)$ дифференцируема, то и $u(z)$ дифференцируема также, и их производные связаны соотношением:

$$\varphi'(z) = F'(u) \cdot u'(z). \quad (94)$$

Возвращаясь к нашей задаче, имеем, что при $z = 0$ $\varphi(0)$ и $u(0)$ положительны; затем они начинают убывать, так как их производные отрицательны.

Рассмотрим некоторый промежуток $(0, z)$, на котором $u(z) > 0$. Докажем, что в этом промежутке $u'(z) < 0$. Пусть z_0 — наименьшее число на отрезке $(0, z)$, для которого $u'(z) = 0$. Очевидно, что z_0 является также наименьшим числом, для которого $\varphi'(z_0) = 0$, и что в силу (92)

$$\varphi(0) = - \int_0^{z_0} \varphi'(\zeta) \frac{\sqrt{z_0}}{\sqrt{z_0 - \zeta}} d\zeta. \quad (95)$$

Рассмотрим $\varphi'(z)$ вблизи z_0 для значений $z < z_0$:

$$\varphi'(z) = -F'(u) \left\{ \int_0^z \frac{\varphi'(\zeta)}{\sqrt{z - \zeta}} d\zeta + \frac{\varphi(0)}{\sqrt{z}} \right\} = -F'(u) \{ \bar{u}(z) + \bar{\bar{u}}(z) \}, \quad (96)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}(z) &= \int_0^z \frac{\varphi'(\zeta)}{\sqrt{z - \zeta}} d\zeta - \frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^z \varphi'(\zeta) \frac{\sqrt{z_0}}{\sqrt{z_0 - \zeta}} d\zeta, \\ \bar{\bar{u}}(z) &= - \frac{1}{\sqrt{z}} \int_z^{z_0} \varphi'(\zeta) \frac{\sqrt{z_0}}{\sqrt{z_0 - \zeta}} d\zeta. \end{aligned} \quad (97)$$

Покажем, что $\bar{u}(z)$ положительна для $z < z_0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{u}(z) &= \int_0^z \varphi'(\zeta) \left\{ \frac{1}{\sqrt{z - \zeta}} - \frac{1}{\sqrt{z_0 - \zeta}} \frac{\sqrt{z_0}}{\sqrt{z}} \right\} d\zeta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^z \varphi'(\zeta) \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\zeta}{z}\right)}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\zeta}{z_0}\right)}} \right\} d\zeta; \end{aligned} \quad (98)$$

так как $\varphi'(\zeta) < 0$ для $0 \leq \zeta < z_0$ и выражение в квадратных скобках положительно для $0 < \zeta < z < z_0$, то отсюда и следует, что $\bar{u}(z) > 0$ для $z < z_0$.

Итак,

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= -F'(u) \frac{\sqrt{z_0}}{\sqrt{z}} \int_z^{z_0} \frac{\varphi'(\zeta)}{\sqrt{z_0 - \zeta}} d\zeta - F'(u) \cdot \bar{u}(z) = \\ &= \int_z^{z_0} K(z, \zeta) \cdot \varphi'(\zeta) d\zeta + f(z). \end{aligned} \quad (99)$$

Выражая из этого соотношения $\varphi'(z)$ через $f(z)$ при помощи резольвенты интегрального уравнения (99), получим

$$\varphi'(z) = f(z) + \int_z^{z_0} R(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta \geq f(z) - \int_z^{z_0} |R(z, \zeta)| f(\zeta) d\zeta. \quad (100)$$

Для значений z , близких к z_0 , имеем

$$\int_z^{z_0} |R(z, \zeta)| d\zeta < 1 \quad (101)$$

в силу сходимости этого интеграла. Кроме того, в любой близости к z_0 можно найти такие значения z ($z < z_0$), для которых, кроме условия (101), выполняется неравенство

$$\varphi'(z) \geq f(z) - \int_z^{z_0} |R(z, \zeta)| f(\zeta) d\zeta \geq f(z) \left(1 - \int_z^{z_0} |R(z, \zeta)| d\zeta \right). \quad (102)$$

Этому последнему неравенству можно удовлетворить, выбирая z так, чтобы $f(z) > f(\zeta)$ ($z < \zeta < z_0$), что возможно в силу того, что $f(\zeta) > 0$ и непрерывна для $\zeta < z_0$ и $f(z_0) = 0$. Итак, найдутся такие $z < z_0$, для которых $\varphi'(z) > 0$, что противоречит определению z_0 .

Если функция $u(z) > 0$ во всех точках отрезка $(0, z)$, то, в силу доказанной ранее теоремы, она может быть продолжена вне этого отрезка, причем она все время будет монотонно убывать, пока $u(z) > 0$. Если мы покажем теперь, что $u(z)$ не может нигде обратиться в нуль; то этим и будет доказано, что $u(z)$ и $\varphi(z)$ являются монотонно убывающими функциями, определенными для всех $z: 0 \leq z < \infty$.

Допустим теперь, что z_0 первая точка, в которой $u(z_0) = 0$. Эта точка является также первой точкой, в которой $\varphi(z_0) = 0$.

Очевидно, что

$$\varphi'(z_0) \leq 0 \quad \text{и} \quad u'(z_0) \leq 0 \quad (103)$$

и что имеет место равенство

$$\int_0^{z_0} \varphi'(\zeta) d\zeta = \varphi(z_0) - \varphi(0) = -\varphi(0). \quad (104)$$

Производная функции $u(z)$

$$\begin{aligned} u'(z_0) &= - \left\{ \int_0^{z_0} \frac{\varphi'(\zeta)}{\sqrt{z_0 - \zeta}} d\zeta + \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{z_0}} \right\} = \\ &= - \int_z^{z_0} \varphi'(\zeta) \cdot \frac{1}{\sqrt{z_0}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\zeta}{z_0}}} - 1 \right\} d\zeta > 0, \quad (105) \end{aligned}$$

причем правая часть строго больше нуля, так как выражение в квадратных скобках строго > 0 для $0 < \zeta < z_0$, а в промежутке $(0, z_0)$.

Отдел теоретической геофизики
Института географии Академии Наук СССР

Поступило 20 V 1937

ON THE COOLING OF SOLIDS DURING RADIATION FOLLOWING THE STEFAN-BOLTZMANN LAW

A. Tychonoff

SUMMARY

The present work deals with temperature changes of a solid body, when on its surface proceeds radiation following the Stefan-Boltzmann law.

In chapters 1-3 and 6 the author examines narrowly the problem of cooling in vacuo of an semi-limited layer $0 \leq x < \infty$ with a constant initial temperature. considering that within the body the temperature is subject to the equation of heat conduction (1), whilst at the surface the Stefan-Boltzmann law (2) is observed.

The author solves this problem by means of a non-linear integral equation of the Volterra type, for which a method of solution by consecutive approximation is given.

Chapter 4 and 5 illustrate how, by similar method, may be solved the problem of cooling of bodies with varying initial temperature and likewise in the case of a certain heat flow falling on the surface of the body.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ В ВИДЕ СУММЫ ПОЛЕЙ TE И TM

А. А. Самарский и А. Н. Тихонов

Несмотря на то, что утверждение о возможности разложения произвольного поля в волноводе на сумму трансверсального электрического поля TE и трансверсального магнитного поля TM неоднократно высказывалось рядом авторов¹⁾, однако мы нигде не встречали какого-либо доказательства этого, казалось бы, очевидного факта. Целью настоящей статьи является проведение строгого математического доказательства полноты системы TE и TM полей для волновода произвольной формы. Таким образом, будет доказано, что любое электромагнитное поле в волноводе может быть представлено при помощи двух векторов Герца, имеющих лишь по одной отличной от нуля компоненте. Тем самым проблема определения электромагнитных полей в волноводе сводится к задаче нахождения двух скалярных функций Z_e и Z_m (продольных компонент электрического и магнитного векторов Герца).

1. Пусть в направлении оси z простирается бесконечный полый цилиндр Σ с идеально проводящими стенками, поперечным сечением S , форма которого определяется кривой C . В плоскости перпендикулярного сечения S расположены оси x и y .

Для электромагнитного поля внутри такого волновода, в силу идеальной проводимости стенок, имеет место граничное условие

$$\text{и, следовательно, } \left. \begin{array}{l} E_z = 0 \\ H_n = 0 \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Журн. техн. физики. — М.-Л.: Издательство Академии наук СССР. — 1948. — Т. XVIII (18), вып. 7. — С. 959–970.

¹⁾См., например, *Stratton. Electromagnetic theory.* — New York, 1941.

Введенский и Аренберг. Радиоволноводы. — М.-Л.: ОГИЗ, 1946.

Каждая из компонент E_z и H_z удовлетворяет волновому уравнению, крайевым условиям

$$E_z = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Sigma \quad (2)$$

и принципу излучения на бесконечности, который мы берем в виде отсутствия волн, приходящих из бесконечности.

Рассмотрим некоторое электромагнитное поле внутри волновода, зависящее от времени по закону $e^{-i\omega t}$ (этот фактор, как обычно, опускаем), регулярное всюду в области $z > 0$. Покажем, что это поле можно представить в виде суммы полей

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ \vec{H} &= \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

причем $E_{2z} = 0$ и $H_{1z} = 0$, т. е. первое поле $\{\vec{E}_1, \vec{H}_1\}$ является трансверсальным магнитным, а второе — трансверсальным электрическим.

Если \vec{Z}_e и \vec{Z}_m — электрический и магнитный векторы Герца, то можно записать (3) следующим образом

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \text{grad div } \vec{Z}_e + k^2 \vec{Z}_e + ik \text{rot } \vec{Z}_m \\ \vec{H} &= -ik \text{rot } \vec{Z}_e + \text{grad div } \vec{Z}_m + k^2 \vec{Z}_m \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

$$\left(k = \frac{\omega}{c} \right),$$

причем \vec{Z}_e и \vec{Z}_m имеют лишь по одной отличной от нуля компоненте вдоль оси волновода (оси z), так что

$$\vec{Z}_e = Z_e \cdot \vec{i}_z; \quad \vec{Z}_m = Z_m \cdot \vec{i}_z,$$

где \vec{i}_z — орт оси Oz .

Переходя в (4) к отдельным компонентам поля, получим

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2 Z_e}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial Z_m}{\partial y}, & H_x &= -ik \frac{\partial Z_e}{\partial y} + \frac{\partial^2 Z_m}{\partial x \partial z} \\ E_y &= \frac{\partial^2 Z_e}{\partial y \partial z} - ik \frac{\partial Z_m}{\partial x}, & H_y &= ik \frac{\partial Z_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z_m}{\partial y \partial z} \\ E_z &= \frac{\partial^2 Z_e}{\partial z^2} + k^2 Z_e, & H_z &= \frac{\partial^2 Z_m}{\partial z^2} + k^2 Z_m \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Мы должны доказать возможность определения векторов \vec{Z}_e и \vec{Z}_m по заданному полю $\{\vec{E}, \vec{H}\}$. Как будет показано, для определения модулей Z_e и Z_m достаточно использовать не все компоненты поля, а лишь две его составляющие E_z и H_z , которые тем самым полностью определяют все остальные компоненты поля.

Тогда модули векторов Герца Z_e и Z_m должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2 Z_e}{\partial z^2} + k^2 Z_e = E_z, \quad \frac{\partial^2 Z_m}{\partial z^2} + k^2 Z_m = H_z, \quad (6)$$

а также волновым уравнениям

$$\Delta Z_e + k^2 Z_e = 0, \quad \Delta Z_m + k^2 Z_m = 0. \quad (7)$$

Мы будем определять функции Z_e и Z_m из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 Z_e &= -E_z(x, y, z), \\ \Delta_2 Z_m &= -H_z(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(Δ_2 — двумерный оператор Лапласа), которые должны выполняться в силу (6) и (7).

Кроме того, Z_e и Z_m должны удовлетворять краевым условиям

$$Z_e = 0, \quad \frac{\partial Z_m}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Sigma. \quad (9)$$

2. Уравнения (8) представляют собой уравнения Пуассона и могут быть без труда решены с помощью соответствующей функции Грина

$$Z_e(M, z) = \iint_{(S)} G_2(M, \bar{M}) E_z(\bar{M}, z) d\sigma_{\bar{M}}, \quad (10)$$

$$Z_m(M, z) = \iint_{(S)} \hat{G}_2(M, \bar{M}) H_z(\bar{M}, z) d\sigma_{\bar{M}}, \quad (11)$$

где $G_2(M, \bar{M})$ — функция Грина закрепленной мембраны; $\hat{G}_2(M, \bar{M})$ — функция Грина свободной мембраны; $M(x, y)$ и $\bar{M}(\xi, \eta)$ — точка наблюдения и точка интегрирования в плоскости перпендикулярного сечения.

Такое определение является однозначным и возможно для тех областей S , для которых существует функция Грина.

Покажем, что функции $Z_e(M, z)$ и $Z_m(M, z)$, определяемые формулами (10) и (11), удовлетворяют волновым уравнениям (7) и тем самым уравнениям (6).

Как показано в «Добавлении», функции E_z и H_z имеют непрерывные производные по z в области $z > 0$. Отсюда следует существование z -производных функций Z_e и Z_m , которые можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла. При этом особенности функции Грина никаких осложнений не вызывают.

Поэтому

$$\frac{\partial^2 Z_e}{\partial z^2} + k^2 Z_e = \iint_{(S)} G_2(M, \bar{M}) \left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z(\bar{M}, z) \right] d\sigma_{\bar{M}}. \quad (12)$$

Учитывая, что

$$\Delta_2 E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0, \quad (13)$$

получим

$$\frac{\partial^2 Z_e}{\partial z^2} + k^2 Z_e = - \iint_{(S)} G_2(M, \bar{M}) \Delta_2 E_z(\bar{M}, z) d\sigma_{\bar{M}}.$$

Последний интеграл, в силу свойства функции Грина, равен $E_z(M, z)$. Пользуясь, наконец, определяющим функцию $Z_e(M, z)$ уравнением (8), находим

$$\Delta Z_e + k^2 Z_e = 0.$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$\Delta Z_m + k^2 Z_m = 0.$$

В уравнениях (8) переменная z играет роль параметра. Функции $Z_e(M, z)$ и $Z_m(M, z)$ в каждом перпендикулярном сечении при фиксированном z полностью определяются значениями E_z и соответственно H_z в этом сечении. Нетрудно видеть из (10) и (11), что Z_e и Z_m удовлетворяют принципу излучения при $z \rightarrow \infty$, так как этот принцип имеет место для величин $E_z(M, z)$ и $H_z(M, z)$.

3. Итак, считая поле заданным всюду в области $z > 0$ и беря только две компоненты поля E_z и H_z , мы нашли векторы Герца \vec{Z}_e и \vec{Z}_m , которым,

согласно формулам (4), соответствует некоторое поле $\{\widehat{\vec{E}}, \widehat{\vec{H}}\}$, которое мы будем называть вычисленным полем. При этом, очевидно,

$$\widehat{E}_z = E_z, \quad \widehat{H}_z = H_z.$$

Мы должны доказать тождество поля вычисленного $\{\widehat{\vec{E}}, \widehat{\vec{H}}\}$ с полем заданным $\{\vec{E}, \vec{H}\}$.

С этой целью подставим вычисленные по (10) и (11) величины Z_e и Z_m в уравнения (5) и затем воспользуемся уравнениями Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= -ik\vec{E}, & \text{div } \vec{E} &= 0 \\ \text{rot } \vec{E} &= ik\vec{H}, & \text{div } \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \widehat{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \widehat{E}_x}{\partial y} &= ik\widehat{H}_z \\ \frac{\partial \widehat{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{E}_y}{\partial y} &= -\frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Такие же соотношения, очевидно, имеют место и для заданных полей $\{\vec{E}, \vec{H}\}$. При этом на границе Σ выполняется краевое условие

$$\widehat{E}_z = \alpha \widehat{E}_x + \beta \widehat{E}_y = 0$$

и соответственно

$$E_z = \alpha E_x + \beta E_y = 0.$$

Здесь α и β — косинусы тангенциального направления \vec{s} в плоскости xy .

Вводя функции

$$\left. \begin{aligned} E_x^0 &= E_x - \widehat{E}_x \\ E_y^0 &= E_y - \widehat{E}_y \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

и учитывая (13), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_y^0}{\partial x} - \frac{\partial E_x^0}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial E_x^0}{\partial x} + \frac{\partial E_y^0}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

$$\alpha E_x^0 + \beta E_y^0 = 0 \quad \text{на } C. \quad (18)$$

Нетрудно видеть отсюда, что уравнения (17) с граничным условием (18) представляют собой известную проблему Гильберта.

Найти две сопряженные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ внутри области S , определяемые условиями

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{внутри } S, \quad (19)$$

$$\alpha u + \beta v = F(s) \text{ на } C, \quad (20)$$

где $F(s)$ — некоторая заданная на контуре C функция дуги s .

Проблема Гильберта, как известно, имеет единственное решение. В силу однородности краевого условия (18), отсюда следует, что

$$E_x^0 \equiv 0, \quad E_y^0 \equiv 0, \quad (21)$$

т. е.

$$\widehat{E}_x \equiv E_x,$$

$$\widehat{E}_y \equiv E_y.$$

Так как, согласно (13), $\widehat{E}_z = E_z$, $\widehat{H}_z = H_z$, то из уравнения Максвелла

$$ik\vec{H} = \text{rot } \vec{E}$$

сразу же вытекает, что

$$\widehat{H}_x \equiv H_x,$$

$$\widehat{H}_y \equiv H_y.$$

Таким образом, доказано полное совпадение полей вычисленных с полями заданными:

$$\widehat{\vec{E}} = \vec{E},$$

$$\widehat{\vec{H}} = \vec{H}.$$

Этим самым установлено, что всякое электромагнитное поле в волноводе полностью определяется его компонентами E_z и H_z , откуда, в частности, согласно вышеизложенному, и следует возможность представления любого поля в волноводе в виде суммы поперечного электрического TE и поперечного магнитного TM полей, в области, где отсутствуют источники.

Добавление

Пусть нам задана функция $u(x, y, z)$, удовлетворяющая внутри бесконечной цилиндрической области V уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

непрерывная в замкнутой области и обращающаяся в 0 на границе. Докажем, что производные этой функции по переменному z непрерывны в области V и на ее границе.

Рассмотрим область T , вырезанную из V двумя параллельными плоскостями $z = z_1$ и $z = z_2$, находящимися на расстоянии l друг от друга. Пусть

$$u(x, y, z_1) = f_1(x, y) \quad \text{и} \quad u(x, y, z_2) = f_2(x, y),$$

где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ — непрерывные функции, определенные внутри S и обращающиеся в 0 на C .

Найдем решение уравнения

$$\Delta u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0$$

для области T , считая функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ заданными; при этом $u(x, y, z)$ должно обращаться в нуль на боковой поверхности Σ (или $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на Σ).

Как известно, уравнение $\Delta u + k^2 u = 0$ имеет единственное решение для области достаточно малого объема [1].

При этом мы считаем l настолько малым, что в рассматриваемой области T решение уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ однозначно определяется своими краевыми значениями. Построим решение уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ для области T методом разделения переменных. Положим

$$U = U_1 + U_2, \tag{22}$$

где

$$\left. \begin{aligned} U_1(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x, y) f_1^{(n)} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_n^2 - k^2} (l - z)}{\text{sh} \sqrt{\lambda_n^2 - k^2} l} \\ U_2(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x, y) f_2^{(n)} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_n^2 - k^2} z}{\text{sh} \sqrt{\lambda_n^2 - k^2} l} \end{aligned} \right\}, \tag{23}$$

где $f_1^{(n)}$, $f_2^{(n)}$ — коэффициенты Фурье разложения функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ по собственным функциям $\psi_n(x, y)$.

Рассмотрим сначала функцию $U_1(x, y, z)$.

Если $f(x, y)$ истокообразно представима при помощи функции Грина плоской области S , то согласно теореме Гильберта–Шмидта [2] $\sum \psi_n f^{(n)}$ равномерно и абсолютно сходится, а следовательно, сходится и наш ряд (23).

Функция $U_1(x, y, z)$ удовлетворяет условиям на боковых стенках цилиндра T и при $z = z_1 = 0$ и обращается в нуль при $z = z_2 = l$; аналогично функция $U_2(x, y, z)$ удовлетворяет краевым условиям на Σ и при $z = z_2 = l$ и исчезает при $z = 0$. Поэтому функция

$$U(x, y, z) = U_1(x, y, z) + U_2(x, y, z)$$

удовлетворяет всем поставленным краевым условиям.

Построенное решение (17) справедливо для функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, представимых истокообразно. Покажем, что эти же формулы сохраняют силу для любых непрерывных функций f_1 и f_2 , обращающихся в 0 на C .

Для этого нами будет доказана следующая

Теорема. Функция

$$\left. \begin{aligned} U_1(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x, y) f_1^{(n)} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n - k^2} (l - z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n - k^2} l} && \text{для } z > 0 \\ U_1(x, y, z) &= f_1(x, y) && \text{для } z = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (24)$$

где $f_1(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в S и обращающаяся в 0 на C , а $f_1^{(n)}$ ее коэффициент Фурье,

- 1) удовлетворяет уравнению $\Delta u + k^2 u = 0$ внутри области T ;
- 2) непрерывна в замкнутой области T и обращается в 0 на Σ и при $z = l$, а при $z = 0$ равна $f_1(x, y)$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится:

Лемма [3]. Нормированные собственные функции $\psi_n(x, y)$ растут не быстрее $A_1 \lambda_n$, где A_1 некоторая константа, т. е.

$$|\psi_n(x, y)| \leq A_1 \lambda_n. \quad (25)$$

Для первых производных имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right| < A_2 \lambda_n^2, \quad \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \right| < A_2 \lambda_n^2, \quad (26)$$

а для вторых производных — оценки

$$\left| \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} \right| < A_3 \lambda_n^3, \quad \left| \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \right| < A_3 \lambda_n^3, \quad (27)$$

справедливые для всякой области, целиком лежащей внутри S .

Из (25) следует, что коэффициенты Фурье $f^{(n)}$ непрерывной функции $f(x, y)$

$$|f^{(n)}| \leq \overline{M}_f A_1 \lambda_n S = B \cdot \lambda_n,$$

где \overline{M}_f — максимум функции $f(x, y)$, а S — площадь области.

На основании этих оценок ясно, что ряд, определяющий функцию $U_1(x, y, z)$, сходится равномерно в области $z > \bar{z}$, где \bar{z} — произвольное число, большее нуля. Учитывая оценки (25)–(27), нетрудно убедиться в том, что ряды для первых производных равномерно сходятся внутри той же области, а ряды для вторых производных сходятся равномерно для всякой внутренней к S области для $z > \bar{z}$.

Отсюда вытекает, что функция $U_1(x, y, z)$ дифференцируема дважды для всякой внутренней точки при $z > \bar{z}$ и удовлетворяет уравнению $\Delta u + k^2 u = 0$. Кроме того, эта функция непрерывна при $z > \bar{z}$ и обращается в 0 на Σ и при $z = l$.

Таким образом, нам остается выяснить непрерывность функции U_1 при $z = 0$.

Убедимся, прежде всего, в том, что решение уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ монотонно зависит от граничных значений. Для этого достаточно убедиться в том, что если на границе функция $u \geq 0$, то она не может внутри области иметь отрицательных значений; если же на границе $u \leq 0$, то внутри области u не может достигать положительных значений. В самом деле, допустим, что $u \geq 0$ на границе, а внутри области может принимать отрицательные значения. Пусть \mathcal{M} область, в точках которой $u < 0$. Тогда на границе области \mathcal{M} функция $u(x, y, z)$ должна обращаться в нуль. Но в таком случае, в силу отмеченной выше теоремы единственности для достаточно малой области T , функция $u(x, y, z) \equiv 0$ в области \mathcal{M} , что противоречит исходному предположению. Отсюда сразу же следует, что если краевые значения функции u' больше краевых значений функции u'' , то это же неравенство имеет место всюду в области определения функций u' и u'' .

Очевидно, что можно написать

$$U_1(M, z) = \iint_{(S)} f(M_0) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(M) \psi_n(M_0) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n - k^2} (l - z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n - k^2} l} \right\} d\sigma_{M_0}. \quad (28)$$

Если $f(x, y)$ истокообразно представимая функция, то функция $U_1(x, y, z)$ при $z = 0$ принимает краевые значения f в силу равномерной и абсолютной сходимости ряда Фурье–Гильберта. Отсюда и на основании предшествующего заключаем, что если истокообразно представимая функция $f > 0$, то и $U > 0$.

Так как это справедливо для произвольной истокообразно представимой функции $f > 0$, то

$$K(M, z; M_0, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(M) \psi_n(M_0) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n - k^2} (l - z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n - k^2} l} > 0. \quad (29)$$

Докажем теперь, что интеграл

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(M) \psi_n(M_0) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n - k^2} (l - z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n - k^2} l} \right\} d\sigma_{M_0} = \\ = \iint_{(S)} K(M, z; M_0, 0) d\sigma_{M_0} < B_1, \quad (30) \end{aligned}$$

где B_1 — некоторая константа.

Рассмотрим возрастающую последовательность областей

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots,$$

сходящуюся к области S , и определим последовательность монотонно возрастающих, истокообразно представимых неотрицательных функций f_n , обладающих следующими свойствами

$$f_n(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{в } S_n, \\ 0 & \text{на } C. \end{cases} \quad (31)$$

Возможность построения таких функций не вызывает сомнений. Функция

$$u_n(x, y, z) = \iint_{(S)} f_n(\xi, \eta) K(x, y, z; \xi, \eta, 0) d\xi d\eta \quad (32)$$

есть решение уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

краевые значения которого всюду ≤ 1 . Поэтому

$$u_n \leq U_0,$$

где U_0 — то решение нашего уравнения, которое соответствует краевым значениям, равным 1. Обозначим максимум этого решения через B_1 . Тогда получаем

$$\iint_{(S)} K(x, y, z; \xi, \eta, 0) d\xi d\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{(S)} f_n(\xi, \eta) K(x, y, z; \xi, \eta, 0) d\xi d\eta < B_1 \quad (33)$$

для всякой точки (x, y, z) , лежащей внутри T . Эта оценка потребуется нам в дальнейшем.

Переходим теперь непосредственно к доказательству непрерывности функции $u(M, z)$ при $z = 0$ в любой точке $M_0 \subset S$.

Пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$. Построим такую окрестность W_{M_0} точки M_0 , чтобы $|u(M, z) - f(M_0)| < \varepsilon$ для любой точки $(M, z) \in W_{M_0}$.

Проведем некоторую кривую C_1 , расположенную внутри кривой C и достаточно близко к ней подходящую. Область, ограниченную кривыми C и C_1 , которую мы обозначим через L , выберем настолько малой, что выполняется неравенство

$$\iint_{(L)} f K d\sigma < \frac{\varepsilon}{3},$$

что очевидно в силу доказанной выше оценки (26) для $\iint K d\sigma$, положительности K и малости f в области L ($f = 0$ на C). Подберем окрестность $U_\omega \subset S$ точки M_0 таким образом, чтобы колебание $f(M)$ в этой окрестности было меньше $\omega = \frac{\varepsilon}{3}$. Положим $\bar{f}(M) = f(M_0) + \omega$ для точек M , принадлежащих окрестности U_ω . Очевидно, что и внутри области U_ω функция $\bar{f}(M) > f(M)$.

Определим функцию \bar{f} для остальных точек области S так, чтобы она была истокообразно представимой и удовлетворяла требованиям

$$\begin{aligned}\bar{f} &> f \quad \text{в области } S - U_\omega - L, \\ \bar{f} &> 0 \quad \text{в области } L, \\ \bar{f} &= 0 \quad \text{на } C,\end{aligned}$$

в остальном же функция \bar{f} произвольна.

Очевидно, что

$$\bar{u} - u > -\frac{\varepsilon}{3}.$$

В самом деле,

$$\bar{u} - u = \iint_{(S-L)} (\bar{f} - f)K \, d\sigma + \iint_{(L)} \bar{f}K \, d\sigma - \iint_{(L)} fK \, d\sigma.$$

Так как

$$\iint_{(S-L)} (\bar{f} - f)K \, d\sigma \geq 0$$

и

$$\iint_{(L)} \bar{f}K \, d\sigma \geq 0$$

и, кроме того, согласно сделанному выше предположению,

$$\iint_{(L)} fK \, d\sigma < \frac{\varepsilon}{3},$$

то

$$\bar{u} - u > -\frac{\varepsilon}{3}.$$

Из непрерывности функции \bar{u} вытекает существование такой окрестности \bar{W}_{M_0} , что

$$\bar{u}(M) - \left[f(M_0) + \frac{\varepsilon}{3} \right] < \frac{\varepsilon}{3}$$

или

$$\bar{u}(M) < \left[f(M_0) + \frac{2\varepsilon}{3} \right].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} u(M) - f(M_0) &< \left[\bar{u}(M) + \frac{\varepsilon}{3} \right] - f(M_0) < \\ &< \left[\left(f(M_0) + \frac{2\varepsilon}{3} \right) + \frac{\varepsilon}{3} \right] - f(M_0) = \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е.

$$u(M) - f(M_0) < \varepsilon$$

для любой точки M , принадлежащей окрестности \overline{W}_{M_0} .

С другой стороны, строя совершенно аналогичным образом функцию \underline{f} , можно установить, что

$$u(M) - f(M_0) \geq -\varepsilon \quad (34)$$

для любой точки M , принадлежащей окрестности \underline{W}_{M_0} .

Отсюда следует

$$|u(M) - f(M_0)| < \varepsilon \quad (35)$$

для любой точки $M \in \overline{W}_{M_0} \cdot \underline{W}_{M_0}$, что и показывает непрерывность $u(M)$ в произвольной точке M_0 при $z = 0$.

Нетрудно видеть, что для точек, лежащих на границе, рассуждения существенно не меняются, чем и доказана непрерывность функции U_1 в замкнутой области T .

Точно таким же путем можно установить непрерывность функции U_2 , а следовательно, на основании предыдущего, и функции $U = U_1 + U_2$ в замкнутой области T .

Теорема доказана.

Таким образом, мы получили явное выражение для функции $u(x, y, z)$ в области $z_1 < z < z_2$ через ее значения при $z = z_1$ и $z = z_2$. Из этого представления следует, что $\frac{\partial^k u}{\partial z^k}$ ($k = 1, 2, \dots$) является непрерывной функцией в точке (M, z) , где M произвольная точка замкнутой области $S + C$, а $\bar{z}_1 < z < \bar{z}_2$, причем

$$z_1 < \bar{z}_1 < \bar{z}_2 < z_2.$$

Установление этого факта и являлось основной целью данного добавления. Отметим, далее, что из доказанной непрерывности $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ следует, что

$$\Delta_2 u = -F(x, y, z) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u \right), \quad (36)$$

где $F(x, y, z)$ — непрерывная функция.

Следовательно, функция $u(x, y, z)$ представима истокообразно через функцию Грина $G_2(M, M_0)$ для плоской области S , т. е.

$$u(M, z) = \iint_{(S)} G_2(M, M_0) F(M_0, z) d\sigma_{M_0} \quad (37)$$

и в силу теоремы Гильберта–Шмидта разлагается в равномерно абсолютно сходящийся ряд

$$u(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \psi_n(M), \quad (38)$$

где

$$f_n(z) = \iint_{(S)} u(M, z) \psi_n(M) d\sigma_M$$

коэффициент Фурье функции u . Очевидно, что функция $f_n(z)$ дифференцируема по z сколько угодно раз в силу доказанной непрерывности для $\frac{\partial^k u}{\partial z^k}$ (для $\bar{z}_1 < z < \bar{z}_2$ и $M \subset S + C$).

Нетрудно убедиться в том, что $f_n(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f_n}{dz^2} + (k^2 - \lambda_n) f_n(z) = 0. \quad (39)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_n(z)}{dz^2} &= \iint_{(S)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \psi_n(M) d\sigma_M = - \iint_{(S)} (\Delta_2 u + k^2 u) \psi_n d\sigma = \\ &= - \iint_{(S)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (\Delta_2 \psi_m + k^2 \psi_m) f_m \right\} \psi_n(M) d\sigma_M = \\ &= - \iint_{(S)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (k^2 - \lambda_m) \psi_m f_m \right\} \psi_n(M) d\sigma_M. \end{aligned}$$

В последнем интеграле допустимо почленное интегрирование в силу установленного выше вида функции $f_n(z)$, что нам дает

$$\frac{d^2 f_n}{dz^2} = -(k^2 - \lambda_n) f_n(z).$$

Таким образом, нами также показано, что произвольное решение волнового уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

определенное в бесконечной цилиндрической области V и обращающееся в 0 на границе, может быть представлено в виде

$$u(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(M) f_n(z),$$

где $f_n(z)$ определяется уравнением (39).

Поступило в Редакцию
12 июля 1947 г.

Список литературы

1. *Немыцкий В. В.* Решения уравнений эллиптического типа для "малых" областей // Матем. сборн. — 1936. — Т. 1(43), № 4. — С. 485–502. (издано на фран.: *Niemytzki V. V. Solutions des équation ellitique pour les "petits" domaines.*)
2. *Привалов И. И.* Интегральные уравнения. — М.-Л.: ОНТИ, 1935. — 129 с.
3. *Самарский А. А., Тихонов А. Н.* О возбуждении радиоволноводов. I // Журн. техн. физики. — М.-Л.: Издательство Академии наук СССР, 1947. — Т. XVII (17), вып. 11. — С. 1284–1296.

О ПРИНЦИПЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

Сформулирован общий принцип излучения для волнового уравнения (1) в том смысле, что решениями, удовлетворяющими этому принципу, являются предельные (при $t \rightarrow \infty$) решения задачи Коши с нулевыми начальными условиями для соответствующего уравнения колебаний (1а). Показано, что для неограниченного пространства названный метод приводит к решениям, удовлетворяющим известному условию Зоммерфельда.

Решение волнового уравнения

$$\Delta v + k^2 v = -F(M) \quad [M = (x, y, z)] \quad (1)$$

в неограниченной области Ω не всегда однозначно определяется заданием значения функции $v(M)$ ¹⁾ (или ее нормальной производной $\partial v / \partial n$) на поверхности Σ , являющейся границей области Ω . Например, если область Ω является внешней областью к замкнутой поверхности Σ , то для выделения единственного решения, являющегося расходящейся волной $v = v(M)$ к граничным условиям на Σ добавляют условие излучения Зоммерфельда [1], которое можно записать в виде:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial v}{\partial r} - ikv \right) = 0. \quad (2)$$

Однако это условие видоизменяется в тех случаях, когда граница Σ простирается в бесконечность. Так, для плоской области (цилиндрические волны) имеет место следующее условие [2]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0. \quad (2')$$

Для случая одного независимого переменного (плоские волны) условие излучения имеет вид:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0. \quad (2'')$$

¹⁾В дальнейшем будем принимать это значение равным нулю.

Для областей другого типа, как, например, для слоя между двумя параллельными плоскостями или бесконечной цилиндрической области, оказывается необходимым вводить не одно, а несколько условий в форме условий Зоммерфельда («парциальный принцип излучения»). В связи с этим возникает вопрос об установлении единообразного принципа выделения «расходящейся волны» (принцип излучения), независимого от формы области.

Понятие расходящейся волны тесно связано с понятием установившегося режима:

$$u = v \exp(-i\omega_0 t), \quad (3)$$

удовлетворяющего уравнению колебаний

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -F(M) \exp(-i\omega_0 t) \quad \left(k^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2}\right). \quad (1a)$$

При рассмотрении установившегося режима обычно множитель $\exp(-i\omega_0 t)$ опускается.

С этой точки зрения функцию $v(M)$ — амплитуду установившегося режима — естественно трактовать как предел:

$$v(M) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(M, t) \exp(i\omega_0 t), \quad (4)$$

где функция $u(M, t)$ определяется силами, периодически действующими с той же частотой ω_0 и с амплитудой, равной величине сил, определяющих функцию $v(M)$.

Для получения расходящейся волны $v(M)$ будем брать функцию $u(M, t)$, удовлетворяющую нулевым начальным условиям Коши:

$$u(M, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(M, 0) = 0. \quad (5)$$

По самому характеру постановки задачи ясно, что функция $u(M, t)$, а тем самым и функция $v(M)$, если только она существует, определяются однозначно.

В настоящей статье мы покажем, что решение, выделяемое с помощью предлагаемого принципа излучения, совпадает с решением, определяемым принципом излучения Зоммерфельда для неограниченного пространства²⁾.

²⁾Как нам стало известно, в период подготовки настоящей работы к печати, аналогичным вопросом занимался А. А. Соколов, следуя методам, изложенным в его монографии «Дельта-функция и ее применение к решению некоторых математических задач геофизики» (Свердловск, 1946 г.)

1. Рассмотрим неоднородное волновое уравнение (1) в неограниченном пространстве, считая, что функция $F(M)$ является локальной функцией, т. е. отлична от нуля в ограниченной части пространства G .

Решение уравнения (1), удовлетворяющее принципу излучения Зоммерфельда в форме (2), имеет вид:

$$v(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_G \frac{\exp(ikr)}{r_{M\bar{M}}} F(\bar{M}) d\tau_{\bar{M}} \quad (6)$$

($d\tau_{\bar{M}} = d\xi d\eta d\zeta$ — элемент объема).

Рассмотрим функцию $u(M, t)$, удовлетворяющую уравнению (1a) и начальным условиям (5). Функция $u(M, t)$, представляющая решение задачи Коши, определена однозначно.

Покажем, что имеет место соотношение (4), т. е. что функция $v(M)$ может быть определена как амплитуда режима, установившегося под действием силы $F(M) \exp(-i\omega_0 t)$ при нулевых начальных условиях. При этом предполагается, что функция $F(M)$ удовлетворяет достаточно высоким требованиям дифференцируемости.

2. Рассмотрим вспомогательную функцию $u_1(M, t)$, удовлетворяющую уравнению:

$$\Delta u_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -F(M)\varphi(t), \quad (7)$$

где

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp(-i\omega_0 t) & \text{для } 0 < t \leq T, \\ \varphi(t) = 0 & \text{для } t > T, \end{cases}$$

и начальным условиям:

$$u_1(M, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(M, 0) = 0. \quad (7')$$

Величина T представляет собой параметр, который мы в дальнейшем устремим к бесконечности. Очевидно, что в области $t \leq T$ функция $u_1(M, t) = u(M, t)$.

Введем функцию $\bar{u}(M, t)$ с помощью соотношения

$$\bar{u}(M, t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} u_1(M, \theta) d\theta. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться в том, что для этой функции справедливы условия:

$$\Delta \bar{u} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = -F(M) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \varphi(\theta) d\theta, \quad (9)$$

$$\bar{u}(M, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(M, 0) = 0, \quad (9')$$

которые функцию $\bar{u}(M, t)$ определяют однозначно.

Очевидно, что

$$u_1(M, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{u}(M, t). \quad (8')$$

3. Совершим над $\bar{u}(M, t)$ преобразование Лапласа, в результате чего получим лапласову сопряженную функцию:

$$\frac{\bar{v}(M, \gamma)}{\gamma} = \int_0^{\infty} \bar{u}(M, t) \exp(-\gamma t) dt, \quad (10)$$

определенную в области $\text{Re } \gamma = \alpha > \alpha_0 > 0$, так как функция $\bar{u}(M, t)$, очевидно, является функцией, ограниченной равномерно относительно всех ее аргументов.

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (9) и учитывая начальные условия для функции $\bar{u}(M, t)$ легко находим:

$$\Delta \bar{v} - \frac{\gamma^2}{c^2} \bar{v} = -F(M)B(\gamma), \quad (11)$$

где

$$B(\gamma) = \gamma \int_0^{\infty} \exp(-\gamma t) dt \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \varphi(\theta) d\theta.$$

Интегрируя по частям, преобразуем правую часть к виду:

$$B(\gamma) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\gamma t)}{\gamma} \varphi(t) dt = \int_0^T \frac{\exp[-(\gamma + i\omega_0)t]}{\gamma} dt,$$

откуда

$$B(\gamma) = \frac{1 - \exp[-(\gamma + i\omega_0)T]}{\gamma(\gamma + i\omega_0)}. \quad (12)$$

4. Возьмем функцию

$$\widehat{v}(M, \gamma) = \frac{1}{4\pi} \iiint_G \frac{\exp(-\gamma r/c)}{r_{M\overline{M}}} F(\overline{M}) B(\gamma) d\tau_{\overline{M}}. \quad (13)$$

Покажем, что искомая функция $\overline{u}(M, t)$ может быть представлена в виде:

$$\overline{u}(M, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\widehat{v}(M, \gamma)}{\gamma} \exp(\gamma t) d\gamma, \quad (14)$$

а тем самым

$$\widehat{v}(M, \gamma) = \overline{v}(M, \gamma).$$

В качестве пути интегрирования L в формуле (14) взята прямая

$$\gamma = \alpha_0 + i\beta, \quad \alpha_0 = \text{const} > 0,$$

параллельная мнимой оси.

При определении функций $\widehat{v}(M, \gamma)$ мы взяли решение в форме $\exp(-\gamma r)/r$, так как именно этой функции при помощи формулы (14) соответствует функция $\overline{u}(M, t)$, которая удовлетворяет нулевым условиям Коши, как это и будет показано ниже.

5. Убедимся в том, что функция $\overline{u}(M, t)$ определяемая формулой (14), удовлетворяет всем условиям задачи (9), (9'). Для этого, прежде всего, изменим порядок интегрирования и представим функцию $\overline{u}(M, t)$ в виде:

$$\begin{aligned} \overline{u}(M, t) = & \frac{1}{2\pi i} \iiint_G F(\overline{M}) d\tau_{\overline{M}} \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{\exp[\gamma(t - r/c)]}{r} \times \\ & \times \frac{1 - \exp[-(\gamma + i\omega_0)T]}{\gamma^2(\gamma + i\omega_0)} d\gamma. \quad (15) \end{aligned}$$

Такое изменение порядка интегрирования возможно, потому что вдоль пути L подынтегральная функция имеет равномерный порядок $1/|\gamma|^3$.

Докажем, что функция $\overline{u}(M, t)$ удовлетворяет начальным условиям. Так как подынтегральная функция в правой полуплоскости не имеет полюсов, то вычисление интеграла вдоль L можно произвести с помощью известной

леммы Жордана [3]. В нашем случае лемма Жордана формулируется следующим образом. Интеграл

$$\int_{C_R} \Phi(z) \exp(-mz) dz \rightarrow 0, \quad (m > 0), \quad (16)$$

при условиях: контур C_R представляет собой часть полуокружности радиуса R , расположенную в области $\operatorname{Re} \gamma = \alpha > \alpha_0 > 0$ и имеющую центр в начале координат; функция $\Phi(z)$ равномерно стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$ в области $\operatorname{Re} \gamma = \alpha > \alpha_0 > 0$.

Пользуясь этой леммой, непосредственно получаем:

$$\int_L \frac{\exp(-\gamma r/c)}{r} \frac{1 - \exp[-(\gamma + i\omega_0)T]}{\gamma^2(\gamma + i\omega_0)} d\gamma = 0,$$

$$\int_L \frac{\exp(-\gamma r/c)}{r} \frac{1 - \exp[-(\gamma + i\omega_0)T]}{\gamma(\gamma + i\omega_0)} d\gamma = 0.$$

Отсюда следует, что функции $\bar{u}(M, t)$ и $\partial \bar{u}(M, t)/\partial t$ непрерывны при $t = 0$ и начальные условия Коши (9') удовлетворены. При этом возможность дифференцирования под знаком интеграла при вычислении $\partial \bar{u}/\partial t$ не вызывает сомнения, так как интеграл, полученный после дифференцирования под знаком интеграла, сходится равномерно.

Вернемся теперь к функции

$$u_1(M, t) = \frac{\partial^2 \bar{u}(M, t)}{\partial t^2}.$$

Пользуясь интегральным представлением (15) для функции $\bar{u}(M, t)$, найдем:

$$u_1(M, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \iiint_G F(\bar{M}) d\tau_{\bar{M}} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\exp[\gamma(1-r/c)]}{r} \times \\ \times \frac{1 - \exp[-(\gamma + i\omega_0)T]}{\gamma(\gamma + i\omega_0)} d\gamma.$$

Дальнейшее дифференцирование под знаком интеграла не проводится, так как получаемое в результате дифференцирования подынтегральное выражение не может быть равномерно оценено, и, тем самым, нет оснований для изменения порядка интегрирования.

6. Покажем, что существует предел:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(M, t) \exp(i\omega_0 t) = v(M),$$

где $v(M)$ — функция, выражаемая формулой (6).

Фиксируем некоторую точку наблюдения $M = M_0$ и рассмотрим контурный интеграл:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\exp[\gamma(t - r/c)]}{r} \frac{1 - \exp[-(\gamma + i\omega_0)T]}{\gamma(\gamma + i\omega_0)} d\gamma = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\exp[\gamma(t - r/c)]}{r} \frac{1}{\gamma(\gamma + i\omega_0)} d\gamma - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\exp[\gamma(t - r/c)]}{r} \frac{\exp[-(\gamma + i\omega_0)T]}{\gamma(\gamma + i\omega_0)} d\gamma = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Интеграл

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\exp[-\gamma(T - t + r/c)]}{\gamma(\gamma + i\omega_0)} \frac{\exp(-i\omega_0 T)}{r} d\gamma = 0$$

для всех значений t , так как всегда справедливо неравенство

$$T - t + r/c > 0.$$

Интеграл

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\exp[\gamma(t - r/c)]}{r} \frac{1}{\gamma(\gamma + i\omega_0)} d\gamma$$

принимает различные значения для каждого из случаев: $t < r/c$ или $t > r/c$.

Нетрудно видеть, что

$$I_1 = 0 \quad \text{при} \quad t < r/c.$$

Для вычисления I_1 при $t > r/c$ замкнем прямую L другой C_R^- , расположенной в области $\operatorname{Re} \gamma = \alpha < \alpha_0 > 0$, т. е. в левой полуплоскости, и применим теорему вычетов. В результате найдем:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\exp[\gamma(t - r/c)]}{r} \frac{1}{\gamma(\gamma + i\omega_0)} d\gamma = \frac{1}{i\omega_0 r} - \frac{\exp[-i\omega_0(t - r/c)]}{i\omega_0},$$

так как интеграл по дуге C_R^- при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Возвращаясь снова к функции $u(M, t)$ и учитывая полученный выше результат, будем иметь:

$$\begin{aligned} u(M_0, t) \exp(i\omega_0 t) &= u_1(M, t) \exp(i\omega_0 t) = \\ &= -\exp(i\omega_0 t) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\exp(-i\omega_0 t)}{i\omega_0} \frac{1}{4\pi} \iiint_G \frac{\exp(i\omega_0 r/c)}{r} F(\overline{M}) d\tau_{\overline{M}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_G \frac{\exp(ikr)}{r} F(\overline{M}) d\tau_{\overline{M}} = v(M_0) \end{aligned}$$

для $T \geq t > \frac{d}{c}$, где $d = \max(M_0, \overline{M})$, причем $\overline{M} \subset C$.

Таким образом, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(M, t) \exp(i\omega_0 t) = v(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_G \frac{\exp(ikr)}{r_{M\overline{M}}} F(\overline{M}) d\tau_{\overline{M}},$$

что и требовалось доказать.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию 8 июля 1947 г.

Список литературы

1. Sommerfeld A. Jahresber // d. D. Math. Vereinigung — 1912. — Т. 21. — С. 309.
2. Купрадзе В. Д. Основные задачи математической теории дифракции. — Л.-М.: ОНТИ, 1935.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том III. — М.-Л.: ГТТИ, 1939. — 429 с.

Tikhonov A.N. Collection of Scientific Works : in 10 vol. / A.N. Tikhonov ; [Ed. by T.A. Sushkevich] ; Russian Academy of Sciences . — Moscow : Nauka, 2008 — . — (Classics of Science). — ISBN 978-5-02-036158-4.

Vol. 2: Mathematics : [in 2 vol.] : Part 2. Computational mathematics. 1956–1979. Mathematical physics. 1933–1948 / ed. by T.A. Sushkevich, A.V. Gulin. — 2009. — 590 p. — ISBN 978-5-02-036160-7 (in cloth.).

The second volume of academician A.N. Tikhonov's complete paper collection contains the articles on computational mathematics and some problems of mathematical physics. The vast series of papers deals with numerical methods of constructing and studying boundary value problems for ordinary and partial differential equations. In a number of papers on approximate methods for solving Cauchy problem for nonlinear systems of ordinary differential equations a theoretical study was carried out, the optimal grids are constructed and error estimations are obtained. The book includes also the early, now classical, A.N. Tikhonov's papers devoted to the statement and correctness study of some mathematical physics problems.

The book is intended for researchers and lecturers, specialists, young scientists, under- and post-graduate students engaged in the fields of applied and numerical mathematics.